Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Буслаев, А. М. Вершик, И. М. Гельфанд, С. Г. Гиндикин, О. А. Ладыженская, М. З. Соломяк, Л. Д. Фаддеев, Д. Р. Яфаев, Михаил Шлёмович Бирман (к семидесятилетию со дня рождения), *УМН*, 2000, том 55, выпуск 1, 204–207

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm266>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 11:54:06

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

МИХАИЛ ШЛЁМОВИЧ БИРМАН

(к семидесятилетию со дня рождения)

17 января 1928 года исполнилось 70 лет профессору Санкт-Петербургского Университета Михаилу Шлёмовичу Бирману. Его отец был профессором теоретической механики в одном из Ленинградских технических институтов, мать – школьным учителем. Во время второй мировой войны, в период блокады Ленинграда семья была эвакуирована в Свердловск (ныне Екатеринбург), где М.Ш. окончил среднюю школу. В 1945 году, после возвращения семьи в Ленинград, он поступил в Ленинградский Электротехнический институт. Результаты первых же экзаменов, сданных М.Ш., произвели сильное впечатление на его профессора математики, и он посоветовал М.Ш. перейти на математико-механический факультет Ленинградского Университета. Это и было сделано в 1946 году.

Еще будучи студентом, М.Ш. начал работу в Ленинградском отделении Математического института Академии Наук, в лаборатории Л.В. Канторовича. Очень скоро молодой сотрудник обратил на себя внимание Л.В. своими ярко выраженными способностями и независимостью мышления. Л.В. начал давать М.Ш. задания, далеко выходящие за рамки стандартных технических вычислений. Годы работы с Л.В. были очень важны для математического развития М.Ш. и в значительной степени определили его научные интересы.

М.Ш. Бирман окончил университет в 1950 году, защитив дипломную работу под руководством М.К. Гавурина и был принят на работу в качестве ассистента в Ленинградский горный институт. С начала пятидесятых годов М.Ш. стал одним из активных участников знаменитого впоследствии семинара по математической физике, организованного в то время В.И. Смирновым. Практически все научные результаты М.Ш., полученные почти за 50 лет научной работы, докладывались впервые на заседаниях этого семинара. В настоящее время, наряду с О.А. Ладыженской, М.Ш. руководит работой семинара.

В 1956 году М.Ш. был принят на работу на кафедру математической физики физического факультета Ленинградского Университета, и с тех пор вся научная и педагогическая деятельность М.Ш. неотделима от работы кафедры и всего факультета. В пятидесятые годы кафедра математической физики стала “выпускающей” и М.Ш. стал одной из ключевых фигур в этом преобразовании. Читая курсы студентам, специализирующимся по математической и теоретической физике, М.Ш. очень быстро завоевал репутацию выдающегося лектора. Его лекции привлекали и продолжают привлекать студентов как тщательностью подбора материала, так и ясностью и артистичностью изложения. В особенности, “продвинутые” курсы по спектральной теории дифференциальных операторов и теории рассеяния позволяли быстро войти в предмет и побуждали

к собственной научной работе. Многие известные ныне ученые начинали свой путь в науке либо под прямым руководством М. Ш., либо под влиянием его лекций и статей.

Это краткое биографическое введение было бы неполным, если бы мы не упомянули о том, что М. Ш. обладает исключительным личным влиянием на коллег и учеников. Это связано не только с его высоким профессиональным авторитетом, но и с тем, что он всегда глубоко неравнодушен к трудностям и проблемам других людей. Многие младшие коллеги могли бы рассказать о важном влиянии, которое оказал М. Ш. на их профессиональные судьбы. В то же время он неизменно твердо принципиален в своих требованиях к уровню научных работ, в первую очередь, конечно, собственных. Две стороны его личности: готовность поддержать других и высокий уровень профессиональных стандартов, хорошо известны и ярко проявляются, например, когда М. Ш. редактирует научные издания.

Ниже приводится краткое и по необходимости фрагментарное описание основных научных достижений М. Ш. Бирмана. Уже в ранних работах М. Ш., выполненных под влиянием Л. В. Канторовича, проявились характерные для него черты: исчерпывающий анализ проблемы, отточенное изложение ее решения, а также многочисленные комментарии, устанавливающие естественные, но далеко не всегда очевидные связи с другими математическими задачами. Первые работы М. Ш. (1950–1952) посвящены построению приближенного решения уравнения $Ax = f$ с положительно определенным и ограниченным оператором A . Развивая идеи М. К. Гавурина, М. Ш. построил многошаговые варианты метода последовательных приближений и метода наискорейшего спуска, основанные на систематическом использовании полиномов Чебышёва от оператора аргумента.

Практически вся последующая деятельность М. Ш. посвящена спектральной теории операторов в гильбертовом пространстве, в особенности теории дифференциальных операторов и теории рассеяния. В этих областях он является одним из признанных мировых лидеров.

В 1952–1956 гг., анализируя метод Треффтца для эллиптического уравнения второго порядка при общих условиях на границе, М. Ш. обнаружил, что адекватный подход к решению таких задач должен основываться на абстрактной теории расширений симметричных полуограниченных операторов. К тому времени эта теория интенсивно разрабатывалась М. Г. Крейном и М. И. Вишиком. Используя полученное М. И. Вишиком представление самосопряженных расширений A заданного симметричного оператора A_0 в терминах вспомогательного операторного параметра T , М. Ш. установил глубокие связи между спектральными свойствами расширения A и параметра T . Для эллиптических дифференциальных операторов он находит также описание этих объектов в терминах функциональных пространств. Это позволило, в частности, построить функционал Треффтца для задачи, послужившей отправной точкой этих исследований.

Вскоре М. Ш. находит другие применения развитой им теории. В частности, он устанавливает инвариантность существенного спектра оператора Лапласа во внешности ограниченной области при изменении границы или граничных условий. В другом цикле исследований (1956–1961 гг.) строится общая теория возмущений для сингулярных граничных задач. Находятся широкие условия сохранения существенного спектра и изучается дискретный спектр, появляющийся при внесении возмущения. Изложение ведется на уровне абстрактной теории операторов, но ориентировано на приложения к дифференциальным операторам математической физики. Возмущение в этом случае состоит в изменении коэффициентов дифференциального оператора. Типичный пример – сравнение спектров лапласиана $H_0 = -\Delta$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$ и оператора Шрёдингера $H = -\Delta + V(x)$ с убывающим на бесконечности потенциалом $V(x)$. М. Ш. находит, что число N_z собственных значений оператора H , лежащих левее точки $z < 0$, равно числу n_z собственных значений компактного оператора $(H_0 - z)^{-1/2} V (H_0 - z)^{-1/2}$ в интервале $(-\infty, -1)$. Это дает метод эффективной оценки величины N_z . При дополнительных условиях оно распространяется на случай $z = 0$, что позволяет найти общую кратность N_0 отрицательного спектра оператора Шрёдингера. На этой основе М. Ш. для $d = 3$ находит исторически первую эффективную оценку числа собственных значений для многомерного оператора Шрёдингера. Эта оценка и равенство $N_z = n_z$ были позднее переоткрыты Швингером и впоследствии получили соответственно название оценки и принципа Бирмана–Швингера.

На этом же пути была установлена связь дискретности и конечности отрицательного спектра операторов $H_\alpha = (-\Delta)^t - \alpha V$, $V \geq 0$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$ (сразу при всех значениях константы связи α) с компактностью вложения соответствующих функциональных пространств. Это позволило получить эффективные достаточные и (отдельно) необходимые условия дискретности и конечности

отрицательного спектра. Для случая $2l > d$ критерий компактности был найден в совместной работе М. Ш. и Б. С. Павлова.

От анализа существенного спектра М. Ш. естественно перешел к исследованиям по математической теории рассеяния, составившим один из самых известных циклов его работ. В конце пятидесятых годов Т. Като и М. Розенблум установили существование сильных пределов

$$(1) \quad W_{\pm}(B, A) = \text{s-lim}_{t \rightarrow \pm\infty} e^{iBt} e^{-iAt} P_A$$

(здесь P_A – проектор на абсолютно непрерывное подпространство оператора A) для пары самосопряженных операторов A, B , различающихся на ядерный. Операторы $W_{\pm}(B, A)$ получили название волновых операторов. Из их существования вытекает, что абсолютно непрерывные спектры у A и B совпадают. В терминах волновых операторов определяется оператор рассеяния $S = S(B, A) = W_{+}^{*}(B, A)W_{-}(B, A)$. Он коммутирует с A , и потому сводится к умножению на оператор-функцию $S(\lambda)$ (матрицу рассеяния) в диагональном представлении оператора A .

Связующим звеном между работами М. Ш. по устойчивости существенного спектра и по теории рассеяния служит его статья 1962 года, где среди других результатов была установлена инвариантность абсолютно непрерывной компоненты спектра при изменении границы или граничного условия для эллиптического оператора во внешности ограниченной области. Исходной, и, как впоследствии оказалось, очень плодотворной была идея М. Ш. применить теорему Като–Розенблума к подходящим функциям ϕ (например, к обратным степеням) операторов A и B .

Более того, в том же 1962 году М. Ш. показывает, что при широких условиях на функцию ϕ из ядерности $\phi(B) - \phi(A)$ вытекает равенство

$$W_{\pm}(\phi(B), \phi(A)) = W_{\pm}(B, A),$$

причем все четыре волновых оператора в этом равенстве существуют. Этот принцип инвариантности позволил, в частности, проверить существование волновых операторов $W_{\pm}(H, H_0)$ и $W_{\pm}(H_0, H)$ для оператора Шрёдингера $H = -\Delta + V(x)$, рассматриваемого как возмущение оператора кинетической энергии $H_0 = -\Delta$. Таким образом, М. Ш. внес решающий вклад в развитие ядерного метода в теории рассеяния до уровня, допускающего непосредственное применение к операторам математической физики. М. Ш. принадлежит также заслуга разработки, частично вместе с учениками, стационарной схемы в рамках ядерной теории рассеяния. В этом подходе пределы (1) при $t \rightarrow \pm\infty$ заменяются на пределы резольвент операторов A и B при выходе спектрального параметра на вещественную ось.

Краткая заметка, написанная М. Ш. совместно с М. Г. Крейном в 1962 г., оказалась одной из наиболее цитируемых работ по спектральной теории. В ней, в частности, была найдена удивительная связь матрицы рассеяния $S(\lambda) = S(\lambda; B, A)$ с функцией спектрального сдвига $\xi(\lambda) = \xi(\lambda; B, A)$. Эта заметка заложила основы спектральной теории матрицы рассеяния, развивавшейся впоследствии как учениками М. Ш., так и учеными других математических школ. Сам М. Ш. вернулся к этой проблематике в совместных работах с Д. Р. Яфаевым начала 80-х годов, где асимптотика спектра матрицы рассеяния была найдена для оператора Шрёдингера.

В связи с исследованиями по теории рассеяния появилась потребность в разработке аппарата двойных операторных интегралов (ДОИ), определяемых отображением

$$(2) \quad Q = \int \int \psi(\lambda, \mu) dF(\mu) T dE(\lambda).$$

Здесь dE и dF – спектральные меры, T – ограниченный оператор, а ψ – скалярная функция. Последовательная теория ДОИ была разработана М. Ш. совместно с М. З. Соломяком. В этой теории ДОИ рассматриваются как линейные отображения в различных идеалах S_p компактных операторов. М. Ш. и М. З. Соломяком были найдены достаточные, а в некоторых случаях и необходимые, условия ограниченности этого отображения. В качестве применения этих результатов отметим условия на функцию ϕ , обеспечивающие принадлежность разности $\phi(B) - \phi(A)$ тому же идеалу (например, ядерному), что и сам оператор $B - A$. Важнее, однако, оказалась связь теории ДОИ с разнообразными проблемами классического анализа. Так, в теории ДОИ потребовались точные по порядку оценки собственных и сингулярных чисел интегральных операторов в весовых пространствах L_2 и, в частности, условия ядерности таких операторов. Для решения этой задачи был применен восходящий к Г. Вейлю прием, основанный на кусочно-полиномиальных

аппроксимациях ядра. Совместно с М.З. Соломяком, М.Ш. разработал специальный аппарат кусочно-полиномиальных приближений функций классов Соболева W_p^l на d -мерном кубе $\mathbf{Q}^d$. Построение приближающей функции определяется выбором разбиения куба $\mathbf{Q}^d$ на меньшие кубы. Размеры этих кубов не фиксируются, контролируется только их число. На каждом кубе из выбранного разбиения функция $u(x)$ стандартным образом аппроксимируется полиномом некоторого фиксированного порядка.

Были построены два различных варианта теории. В первом из них, линейном, выбор разбиения не зависит от аппроксимируемой функции. Этот вариант оказался очень полезным для приложений к спектральной теории. В частности, он привел к новым условиям ограниченности интегральных операторов и условиям их принадлежности различным идеалам $\mathbf{S}_p$ (в том числе, условиям ядерности).

В другом, нелинейном, варианте теории уже само разбиение $\mathbf{Q}^d$ зависит от аппроксимируемой функции. Этот подход позволил решить классическую задачу об оценке ε -энтропии (в смысле Колмогорова) $\mathcal{K}(\varepsilon)$ единичного шара из пространства $W_p^l(\mathbf{Q}^d)$ как компакта в $L_q(\mathbf{Q}^d)$ (при условии, конечно, что соответствующий оператор вложения компактен). Было известно, что при $q = p$ $\mathcal{K}(\varepsilon) = O(\varepsilon^{-l/d})$, $\varepsilon \rightarrow 0$, но для $p \neq q$ вопрос оставался открытым даже для частного (и наиболее важного) случая $q = \infty$. Эта задача была решена в полной общности М.Ш. и М.З. Соломяком в 1967 году. В частности, была установлена двусторонняя оценка $\mathcal{K}(\varepsilon) \asymp \varepsilon^{-l/d}$. Этот неожиданный результат показывает, что порядок ε -энтропии определяется только размерностью куба и порядком гладкости, но не зависит от характера метрики приближения и метрики, в которой измеряется гладкость.

Результаты по кусочно-полиномиальным приближениям непосредственно привели к оценкам и асимптотике собственных чисел негладких эллиптических задач вида

$$(3) \quad -\Delta u = \lambda V u, \quad u|_{\partial\Omega} = 0,$$

где Ω – открытое множество в $\mathbb{R}^d$ и $V \geq 0$ – весовая функция. Основным итогом работ М.Ш. и М.З. Соломяка на эту тему явилось принципиальное усовершенствование вариационного подхода к вычислению главного члена спектральных асимптотик. Предложенная схема позволила существенно расширить пределы применимости классической формулы Вейля и, в частности, снять требования гладкости границы и коэффициентов уравнения.

Другой традиционной для М.Ш. областью исследований является изучение дискретного спектра, возникающего в лакуне (обозначим ее (λ_-, λ_+)) самосопряженного оператора A при его возмущении. Типичные примеры – оператор Дирака и оператор Шредингера с периодическим потенциалом. Такие ситуации весьма важны для приложений, но вариационная техника к ним непосредственно неприменима. В работах последних лет М.Ш. подробно изучил поведение собственных значений $\lambda_k(t) \in (\lambda_-, \lambda_+)$ оператора $A_t = A - tV$ при возрастании константы связи t . Пусть для определенности $V \geq 0$. Тогда при увеличении t новые собственные значения возникают в точке λ_+ , движутся налево, а затем исчезают на левом конце λ_- . Пусть $N(\alpha, \lambda)$ – число собственных значений, прошедших через точку $\lambda \in [\lambda_-, \lambda_+]$ при возрастании t от 0 до α . Задача состоит в получении асимптотической формулы для $N(\alpha, \lambda)$ при $\alpha \rightarrow \infty$. Случай $\lambda \neq \lambda_+$ поддается изучению на абстрактном уровне. Соответствующие общие результаты, полученные М.Ш., позволили ему, в частности, решить эту задачу для многомерного периодического оператора Шрёдингера A , возмущенного убывающим на бесконечности потенциалом $V(x)$. Случай $\lambda = \lambda_+$ значительно сложнее и “чувствительнее” к изменениям параметров задачи. М.Ш. обнаружил новые эффекты, возникающие при $\lambda = \lambda_+$ и связанные с обсуждавшимися выше нерегулярными асимптотиками собственных чисел операторов типа (3).

Из недавних достижений М.Ш. отметим его совместную работу с Т.А. Суслиной, где решена важная задача об абсолютной непрерывности оператора Шрёдингера с периодическим магнитным потенциалом (в размерности 2).

Сердечно поздравляя Михаила Шлёмовича с днем рождения, мы желаем ему надолго сохранить энергию и творческий дух.

*В. С. Буслаев, А. М. Вершик, И. М. Гельфанд,
С. Г. Гиндикин, О. А. Ладыженская, М. З. Соломяк, Л. Д. Фаддеев, Д. Р. Яфаев*