Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. И. Адян, В. Г. Дурнев, Алгоритмические проблемы для групп и полугрупп,
УМН, 2000, том 55, выпуск 2, 3–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm267>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 06:47:21

УДК 510.53+512.53+512.54

АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ДЛЯ ГРУПП И ПОЛУГРУПП

С. И. Алян, В. Г. Дурнев

В статье дается подробный обзор результатов по основным алгоритмическим проблемам теории групп и полугрупп: проблемам равенства, изоморфизма, распознавания свойств и другим алгоритмическим вопросам, связанным с этими проблемами. Известные теоремы Маркова–Поста, П. С. Новикова, Адяна–Рабина, Хигмана, Магнуса, Линдона изложены с полными доказательствами. Как правило, приводимые в обзоре доказательства этих теорем существенно проще тех, которые давались авторами теорем в их оригинальных работах. В начале статьи для полноты приводится доказательство результата о неразрешимости проблемы остановки для машин Тьюринга, на котором основывается неразрешимость проблемы равенства для полугрупп. Особое внимание уделено также простейшим примерам полугрупп с неразрешимой проблемой равенства. Подробно изложено доказательство весьма примечательного результата Р. Линдона о разрешимости проблемы равенства в классе групп, задаваемых системой определяющих соотношений с условием, что максимальное взаимное наложение определяющих слов строго меньше $1/5$ длины самих этих слов, в то время как при замене в этом условии строгого неравенства на нестрогое уже возникает возможность неразрешимости. Изложено также доказательство аналогичного результата для конечно определенных полугрупп, где соответствующая точная граница равна $1/2$.

Библиография: 110 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Алгоритмы и машины Тьюринга	4
2. Неразрешимость проблемы равенства для полугрупп	9
3. Некоторые классы полугрупп с разрешимой проблемой равенства ...	22
4. Полугруппы с одним определяющим соотношением	27
5. Группы с условием малого сокращения	41
6. Неразрешимость проблемы равенства для групп	52
7. Группы с одним определяющим соотношением	65
8. Проблемы распознавания групповых свойств	74
9. Проблема вхождения и некоторые результаты о вложении	78
Список литературы	90

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и INTAS (грант № 97-1259).

1. Алгоритмы и машины Тьюринга

Под алгоритмом в интуитивном смысле мы понимаем точное предписание, определяющее вычислительный процесс, который ведет от исходных данных, варьируемых в некотором заданном множестве, к искомому результату. Этот вычислительный процесс должен быть конечным и должен однозначно определяться заданием предписания и конкретного исходного данного. Иногда называют алгоритмом и сам вычислительный процесс, определяемый данным предписанием.

Под *алгоритмической проблемой* понимается задача построения единого алгоритма для решения заданной массовой задачи, т.е. бесконечной серии однотипных вопросов, зависящих от каких-то параметров. В случае, когда искомый алгоритм невозможен, говорят, что данная алгоритмическая проблема *неразрешима*. Неразрешимость алгоритмической проблемы, конечно, вовсе не означает, что какая-то из задач рассматриваемой серии неразрешима. Это означает лишь, что нельзя указать единый метод решения всех задач данной серии. Возможность решения каждой из них своим способом при этом не исключается.

Предписание, задающее алгоритм, должно быть конечным, и искомый результат должен получаться через конечное число шагов работы алгоритма. Оно должно быть настолько четким, чтобы однозначно определять весь вычислительный процесс от начальных данных до результата. Это означает, что процесс осуществляется *вычислителем* (будь то человек или машина) чисто механически, т.е. без привлечения каких-либо творческих элементов, и может быть воспроизведен с тем же результатом другим вычислителем и в другое время. Иначе говоря, для выполнения вычислительного процесса не требуется никакого творческого усилия.

Вплоть до 30-х годов XX века математики обходились неточным интуитивным понятием алгоритма. Возникавшие алгоритмические проблемы решались указанием соответствующих разрешающих процедур. При этом каждый раз, когда конкретный алгоритм для решения той или иной серии однотипных задач был построен, не возникало никаких сомнений в том, что указанная процедура является алгоритмом.

К началу XX века в математике стали появляться глубокие алгоритмические проблемы, которые не удавалось решить, несмотря на усилия многих квалифицированных математиков. Начали возникать сомнения в возможности их положительного решения. Но для доказательства невозможности алгоритма, дающего решение той или иной серии задач, следовало сначала точно математически определить, какой смысл вкладывается в понятие “алгоритм”. Такое уточнение определения понятия алгоритма стало возможным благодаря развитию математической логики в начале XX века. Оно было получено в середине тридцатых годов в работах К. Геделя, Д. Эрбрана, А. Черча, Э. Поста и А. Тьюринга почти одновременно в двух внешне совершенно различных формах: в виде точного математического описания класса вычислимых функций натурального аргумента (частично рекурсивные и рекурсивные функции) и в виде точного математического определения класса вычислительных процессов, реализуемых механически абстрактным вычислителем (*машины Тьюринга*). Вскоре было установлено, что эти два уточнения понятия алгоритма по существу эквивалентны друг другу, т.е. они взаимозаменяемы. Это дало основание американскому математику А. Черчу в 1936 году [29] сформулировать следующий тезис.

ТЕЗИС ЧЕРЧА. *Всякий алгоритм в интуитивном смысле с точки зрения его вычислительных возможностей эквивалентен некоторому алгоритму в уточненном смысле.*

Появление точного понятия алгоритма позволило установить неразрешимость многих алгоритмических проблем. Сначала неразрешимые алгоритмические проблемы были отмечены в самой теории алгоритмов, затем в математической логике. Позже было доказано, что они есть и среди известных задач, поставленных в математике ранее.

Наиболее естественными объектами, используемыми в качестве исходных данных и результатов работы алгоритмов, являются слова в том или ином алфавите. *Алфавитом* называется любое непустое множество *символов*, называемых *буквами алфавита*. Конечная последовательность, составленная из записанных друг за другом букв алфавита $\mathcal{A}$, называется *словом в алфавите $\mathcal{A}$* . Мы рассматриваем также и пустое слово, которое обозначается через Λ или 1 . От алфавита требуется, чтобы была исключена возможность “разночтения” слов, т.е. каждое слово в этом алфавите должно иметь единственное разбиение на составляющие его буквы.

Множество всех слов в алфавите $\mathcal{A}$ будем обозначать через $\mathcal{A}^*$. *Графическое совпадение* слов X и Y обозначается через $X = Y$. Длину слова X будем обозначать через $|X|$. Символом $\Rightarrow$ обозначается равенство по определению. Говорят, что слово E *входит* в слово X , если можно указать такие слова R и Q , что $X = REQ$. Если при этом слово R (слово Q) пусто, то слово E называется *началом* (соответственно, *концом*) слова X .

Если X — некоторое слово, а n — натуральное число, то через X^n обозначается результат приписывания друг к другу n экземпляров слова X . При этом полагаем $X^0 = \Lambda$.

Машина Тьюринга T имеет ленту, разбитую на конечное число ячеек, в которые можно записывать символы из данного набора $\{a_0, a_1, \dots, a_k\}$, называемого *алфавитом ленточных символов*. По техническим причинам удобно считать, что среди этих символов имеется так называемый *пустой символ*, который мы будем обозначать a_0 . Ячейки ленты упорядочены слева направо. Мы будем предполагать, что лента машины *потенциально бесконечна в обе стороны*. Это означает, что в процессе работы машины Тьюринга разрешается добавлять новые пустые ячейки как к правому, так и к левому концу ленты (мы считаем, что в момент добавления в них записан пустой символ a_0). В принципе можно было бы считать ленту бесконечной, но потребовать, чтобы в каждый момент времени лишь конечное число ее ячеек содержало непустые символы.

У машины Тьюринга T имеется также *головка*, которая в каждый момент времени обозревает некоторую ячейку и сама находится в одном из данного множества *внутренних состояний*

$$\{q_0, q_1, \dots, q_l\}.$$

Состояние q_0 называется *заключительным состоянием*.

Работа машины Тьюринга состоит из отдельных тактов, выполняемых согласно заданной программе. Программа P_T машины Тьюринга T — это конечный набор команд следующих трех типов:

$$q_i a_j \mid q_r a_t, \quad q_i a_j \mid q_r R, \quad q_i a_j \mid q_r L.$$

При этом каждой паре символов (q_i, a_j) при $i > 0$ соответствует ровно одна команда, в которой перед $|$ стоит слово $q_i a_j$. Эту команду мы будем обозначать через $P_T(i, j)$. Если в рассматриваемый момент времени головка машины Тьюринга находится в состоянии q_i при $i > 0$, а в обозреваемой ею ячейке находится символ a_j , то машина выполняет команду $P_T(i, j)$ следующим образом.

1) Если команда имеет вид

$$q_i a_j \mid q_r a_t,$$

то в обозреваемой ячейке символ a_j заменяется на символ a_t и головка переходит в состояние q_r .

2) Если команда имеет вид

$$q_i a_j \mid q_r R \text{ или } q_i a_j \mid q_r L,$$

то, не меняя символ a_j , головка переходит в состояние q_r и сдвигается в соседнюю справа (соответственно, слева) ячейку. При этом если считывающая головка находилась в самой правой (левой) ячейке, то к ленте пристраивается новая пустая ячейка.

Если в результате выполнения некоторой команды головка машины приходит в заключительное состояние q_0 , то машина *останавливается*, так как по определению ни одна команда программы не начинается с q_0 .

Полное описание состояния машины Тьюринга в данный момент времени задается словом вида $Aq_i a_j B$, где q_i – состояние головки в данный момент, a_j – символ, записанный в обозреваемой ячейке, а A и B – слова, записанные левее и правее этой ячейки. Такое слово $Aq_i a_j B$ называется *полной конфигурацией* или просто *конфигурацией*, описывающей состояние машины Тьюринга в данный момент. При этом будем говорить, что машина T находится в конфигурации $Aq_i a_j B$.

Пусть конфигурация K_T , в которой машина T находится в данный момент времени, имеет вид $K_T = Aq_i a_j B$, где $1 \leq i \leq l$, $0 \leq j \leq k$.

Опишем конфигурацию K'_T , в которую машина перейдет в результате применения соответствующей команды $P_T(i, j)$ из программы P_T .

1) Если команда имеет вид $q_i a_j \mid q_r a_t$, то $K'_T = Aq_r a_t B$.

2) Пусть выполняемая команда имеет вид $q_i a_j \mid q_r R$.

Если слово B непусто, т.е. $B = a_s B'$ при некотором a_s , то $K'_T = Aa_t q_r a_s B'$.

Если же слово B пусто, то $K'_T = Aa_t q_r a_0$.

3) Если выполняемая команда $P_T(i, j)$ имеет вид $q_i a_j \mid q_r L$, то искомая конфигурация K'_T получается симметричным образом.

Среди внутренних состояний машины Тьюринга T часто выделяют еще и *начальное* состояние q_1 . Если машина Тьюринга T , начав работать в конфигурации $q_1 a_0 E$, через конечное число тактов работы перейдет в конфигурацию вида $Dq_0 B$, то слово DB называется результатом применения к слову E алгоритма, определяемого машиной Тьюринга T . В противном случае мы говорим, что этот алгоритм к слову E не применим. Иначе говоря, мы можем считать, что машина T вычисляет некоторую словарную функцию $f(x)$, значением которой при $x = E$ является слово DB , причем эта функция определена только для тех E , при которых машина остановится.

Машины Тьюринга можно использовать для вычисления функций, аргументы и значения которых пробегают слова в данном алфавите, содержащемся в алфавите ленточных символов. В частности, речь может идти о вычислении функций от натурального аргумента. При этом натуральное число n представляется словом $\bar{n}$ длины n в однокбуквенном алфавите $\{1\}$. Мы говорим, что машина Тьюринга T вычисляет данную

функцию $f(n)$, если начав работу в состоянии $q_1 a_0 \bar{p} a_0$, она останавливается в том и только том случае, если $f(n)$ определено и при этом заключительное состояние имеет вид $q_0 a_0 \overline{f(n)} a_0$. Числовая функция называется *вычислимой* по Тьюрингу, если существует машина Тьюринга, вычисляющая эту функцию. Следующее утверждение равносильно тезису Черча.

ТЕЗИС ЧЕРЧА В ФОРМЕ ТЬЮРИНГА. *Если некоторая функция вычислима с помощью алгоритма в интуитивном смысле, то она вычислима по Тьюрингу.*

Простейшим примером алгоритмически неразрешимой проблемы для машин Тьюринга является проблема распознавания самоприменимости, которая представляет собой частный случай проблемы остановки.

ПРОБЛЕМА ОСТАНОВКИ. *Найти алгоритм, позволяющий по произвольной машине Тьюринга T и произвольной ее начальной конфигурации $E_1 q_1 E_2$ определить, придет ли машина T в заключительное состояние q_0 , если начнет работу в этой конфигурации.*

ПРОБЛЕМА РАСПОЗНАВАНИЯ САМОПРИМЕНИМОСТИ. *Найти алгоритм, который позволяет определить по произвольной машине Тьюринга T , применима ли она к коду своего номера, т.е. к слову $n(T)$.*

Для доказательства неразрешимости этих проблем мы используем нумерацию машин Тьюринга, вычисляющих функции натурального аргумента.

Предполагая, что символ a_1 обозначает 1, мы можем считать, что при вычислении функций натурального аргумента все ленточные символы машин Тьюринга берутся из счетного алфавита

$$(1) \quad \{a_0, a_1, \dots, a_k, \dots\},$$

а внутренние состояния — из счетного алфавита

$$(2) \quad \{q_0, q_1, \dots, q_l, \dots\}.$$

Пусть T — произвольная машина Тьюринга с программой P_T , в которой используются ленточные символы $a_0, a_1, \dots, a_k$ и внутренние состояния $q_0, q_1, \dots, q_l$. Для упрощения записи программы машины Тьюринга договоримся обозначать символ L через a_{-1} , а символ R — через a_{-2} . Можно считать, что каждая команда машины Тьюринга T имеет вид

$$q_i a_j \mid q_r a_t,$$

где $t = -2, -1, 0, 1, \dots, k$.

Пусть $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ — нумерация всех простых чисел в порядке возрастания. Занумеруем произвольным образом все команды программы данной машины Тьюринга T :

$$\begin{aligned} q_{i_1} a_{j_1} &\mid q_{r_1} a_{t_1}, \\ q_{i_2} a_{j_2} &\mid q_{r_2} a_{t_2}, \\ &\dots, \\ q_{i_m} a_{j_m} &\mid q_{r_m} a_{t_m}. \end{aligned}$$

Программу машины Тьюринга T закодируем натуральным числом

$$n(T) = p_1^{i_1} p_2^{j_1} p_3^{r_1} p_4^{t_1+2} p_5^{i_2} p_6^{j_2} p_7^{r_2} p_8^{t_2+2} \dots p_{4m-3}^{i_m} p_{4m-2}^{j_m} p_{4m-1}^{r_m} p_{4m}^{t_m+2},$$

которое будем называть *номером* машины Тьюринга T .

Очевидно, данная машина Тьюринга может иметь несколько номеров, но не каждое натуральное число является номером какой-то машины Тьюринга. Легко построить алгоритм, который по произвольному натуральному числу n определяет, является ли оно номером некоторой машины Тьюринга, и в случае положительного ответа выдает программу этой машины.

ТЕОРЕМА 1.1. *Невозможен алгоритм, распознающий по любому натуральному числу n , является ли оно номером самоприменимой машины Тьюринга.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что существует алгоритм распознавания самоприменимости. Обозначим через M_0 множество всех номеров самоприменимых машин Тьюринга. Тогда в силу тезиса Черча существует машина Тьюринга T_0 , вычисляющая характеристическую функцию множества M_0 , т.е. функцию, равную 1 на элементах из M_0 и 0 — на элементах дополнения. Напомним, что машина T_0 при любой начальной конфигурации вида $q_1 a_0 \bar{n}$ останавливается в заключительном состоянии вида $q_0 a_0 a_1 a_0$, если $n \in M_0$, и — $q_0 a_0 a_0$ в противном случае.

В программе P_{T_0} заменим все вхождения символа q_0 новым символом q_r , который не входит в команды машины T_0 , и добавим следующие новые команды:

$$q_r a_0 \mid q_{r+1} R, \quad q_{r+1} a_0 \mid q_0 a_0, \quad q_{r+1} a_1 \mid q_{r+1} a_1,$$

учитывая, что q_{r+1} также не входит в команды машины T_0 . Очевидно, построенная таким образом машина T_1 применима к слову $\bar{n}$ в том и только том случае, если $n \in CM_0$. Пусть n_1 есть номер машины T_1 . Если $n_1 \in CM_0$, то по определению множества M_0 машина T_1 не применима к слову $\bar{n}_1$, что противоречит определению машины T_1 . Если же $n_1 \in M_0$, то по определению M_0 машина T_1 применима к слову $\bar{n}_1$, что невозможно, так как по построению машина T_1 не применима к словам $\bar{n}$ при $n \in M_0$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Из доказанной теоремы сразу следует алгоритмическая неразрешимость проблемы останова для машин Тьюринга.

ТЕОРЕМА 1.2. *Можно построить машину Тьюринга T_0 , для которой невозможен алгоритм, решающий для нее проблему останова.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В качестве искомой машины Тьюринга T_0 можно взять машину, перечисляющую множество натуральных чисел M_0 , т.е. такую машину T_0 , которая применима к слову $\bar{n}$ тогда и только тогда, когда натуральное число n является номером некоторой самоприменимой машины Тьюринга. Явное построение такой машины сопряжено с технически сложными конструкциями. Мы же здесь ограничимся обоснованием того, как ее существование следует из тезиса Черча в форме Тьюринга. В самом деле, в силу этого тезиса нам достаточно убедиться в существовании алгоритма $\mathcal{A}$, который применим к словам $\bar{n}$ тогда и только тогда, когда натуральное число n является номером некоторой самоприменимой машины Тьюринга. Укажем, как строится такой алгоритм $\mathcal{A}$. По произвольному натуральному числу n , разложив его

в произведение простых множителей и проанализировав это разложение, определяем, является ли n номером некоторой машины Тьюринга. Если число n является номером некоторой машины Тьюринга, то мы найдем программу этой машины T_n и передадим ей управление в начальной конфигурации $q_1 a_0 \bar{p} a_0$. В этом случае наш алгоритм завершает работу тогда и только тогда, когда остановится машина Тьюринга T_n , а это случится в точности тогда, когда n есть номер самоприменимой машины Тьюринга. Если же число n не является номером никакой машины Тьюринга, то наш алгоритм $\mathfrak{A}$ не останавливается. Теорема 1.2 доказана.

2. Неразрешимость проблемы равенства для полугрупп

Универсальный способ задания полугрупп с помощью порождающих элементов и определяющих соотношений был предложен в 1914 году А. Туэ в работе [101]. Там же он впервые сформулировал алгоритмическую проблему распознавания равенства слов для конечно определенных полугрупп, т.е. таких заданий, где число порождающих и число определяющих соотношений конечно.

Очевидно, множество $\mathcal{A}^*$ всех слов в алфавите $\mathcal{A}$ образует свободную полугруппу относительно бинарной операции приписывания одного слова к другому. При этом пустое слово играет роль единицы и обозначается через 1.

Пусть задан произвольный алфавит $\mathcal{A}$ и некоторое множество $\mathcal{D}$ упорядоченных пар слов в алфавите $\mathcal{A}$. По сложившейся традиции упорядоченную пару слов $\langle A, B \rangle$ при задании полугруппы будем записывать в виде равенства $A = B$. Эти равенства, называемые *определяющими соотношениями*, определяют на множестве всех слов некоторое *отношение эквивалентности*, факторизация по которому переводит свободную полугруппу $\mathcal{A}^*$ в полугруппу, заданную определяющими соотношениями множества $\mathcal{D}$ и обозначаемую через

$$\Pi = \langle \mathcal{A} \mid \mathcal{D} \rangle.$$

Отношение равенства слов в таком образом заданной полугруппе Π определяется следующим образом.

Левым элементарным преобразованием, отвечающим определяющему соотношению $A = B$, называется любой переход вида

$$UAV \rightarrow UB V,$$

где U и V — произвольные слова.

Правыми элементарными преобразованиями называются переходы вида

$$UBV \rightarrow UAV.$$

В дальнейшем запись $P \rightarrow Q$ будет обозначать, что слово Q получается из слова P с помощью одного элементарного преобразования рассматриваемой полугруппы.

Два слова P и Q в алфавите $\mathcal{A}$ называются *эквивалентными в полугруппе Π* , если либо $P = Q$, либо существует цепочка элементарных преобразований вида

$$P = P_0 \rightarrow P_1 \rightarrow \dots \rightarrow P_k = Q$$

(записывается $P = Q$ в Π).

Очевидно, определенное таким образом отношение эквивалентности согласовано с операцией умножения слов, т.е. если $P_1 = Q_1$ и $P_2 = Q_2$, то $P_1 P_2 = Q_1 Q_2$.

Элементами полугруппы Π являются классы эквивалентности $[X]$, состоящие из всех слов, эквивалентных слову X . Полугруппа Π представляет собой множество всех классов эквивалентности с ассоциативной операцией $[X] \cdot [Y] = [XY]$, результат которой не зависит от выбора представителей X, Y классов эквивалентности.

Очевидно, если добавить к множеству $\mathcal{A}$ новую букву b и к соотношениям – некоторое равенство $b = W$, где W есть слово в алфавите $\mathcal{A}$, то получим новое задание той же полугруппы. Также очевидно, что два задания полугрупп $\Pi_1 = \langle \mathcal{A} \mid \mathcal{D}_1 \rangle$ и $\Pi_2 = \langle \mathcal{A} \mid \mathcal{D}_2 \rangle$, определяют одну и ту же полугруппу, если они удовлетворяют условию:

любое равенство из $\mathcal{D}_2$ выполнено в Π_1 и

любое равенство из $\mathcal{D}_1$ выполнено в Π_2 .

Если множества $\mathcal{A}$ и $\mathcal{D}$ конечны, то задание полугруппы $\Pi(\mathcal{A}, \mathcal{D})$ может быть записано в виде

$$\langle a_1, \dots, a_n \mid A_1 = B_1, \dots, A_m = B_m \rangle.$$

Для того чтобы полугруппа с единицей была группой достаточно, чтобы в ней имелись обратные элементы для всех порождающих. Задание групп с помощью образующих и определяющих соотношений осуществляется следующим образом.

К данному исходному алфавиту

$$(1) \quad \mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_i, \dots\}$$

добавляется алфавит “двойников”, называемых обратными степенями образующих,

$$\mathcal{A}^{-1} = \{a_1^{-1}, a_2^{-1}, \dots, a_i^{-1}, \dots\}.$$

Полученное объединение называется групповым алфавитом. При задании любой группы с порождающими (1) для обеспечения того, чтобы буквы a_i^{-1} были обратными для букв a_i , служат так называемые *тривиальные определяющие соотношения*, имеющие вид

$$(2) \quad a_i^{-1} a_i = 1, \quad a_i a_i^{-1} = 1.$$

Для задания группы к тривиальным соотношениям (2) добавляются определяющие соотношения в групповом алфавите, которые в данном случае всегда можно записывать в виде равенств

$$(3) \quad A_i = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Так как добавление обратных степеней образующих (1) и тривиальных соотношений (2) однозначно определяется заданием множества порождающих (1), то обычно говорят о группе G , заданной порождающими (1) и определяющими соотношениями (3), и записывают это задание в виде

$$\langle \langle a_1, a_2, \dots, a_n \mid A_1 = 1, A_2 = 1, \dots, A_m = 1 \rangle \rangle.$$

Соответствующие тривиальным соотношениям (2) элементарные преобразования

$$(4) \quad Ua_i^{-1}a_iV \rightarrow UV \quad \text{и} \quad Ua_ia_i^{-1}V \rightarrow UV$$

называются *сокращениями* букв a_i и a_i^{-1} , а обратные им преобразования называются *вставками* этих букв.

Слово X называется *несократимым*, если оно не содержит вхождений подслов вида $a_ia_i^{-1}$ или вида $a_i^{-1}a_i$. Очевидно, в любой группе произвольное слово можно преобразовать в равное ему несократимое слово, используя только преобразования (4).

Напомним, что элементами группы G являются классы эквивалентных слов в групповом алфавите, которые однозначно определяются любым своим представителем.

Если

$$X = a_{i_1}^{\sigma_1} a_{i_2}^{\sigma_2} \dots a_{i_{k-1}}^{\sigma_{k-1}} a_{i_k}^{\sigma_k},$$

где $\sigma_j = \pm 1$ ($j = 1, 2, \dots, k$), то слово

$$a_{i_k}^{-\sigma_k} a_{i_{k-1}}^{-\sigma_{k-1}} \dots a_{i_2}^{-\sigma_2} a_{i_1}^{-\sigma_1}$$

называется обратным к слову X и обозначается через X^{-1} . Очевидно, слова X и X^{-1} определяют взаимно обратные элементы группы.

Если множество определяющих соотношений пусто, то мы получаем *свободную группу* с n порождающими. Она обозначается через F_n . Число n называется ее *рангом*.

Проблема распознавания равенства слов для полугрупп, сформулированная А. Туэ в 1914 году [101], состоит в следующем.

Построить алгоритм, позволяющий для произвольной полугруппы Π и любых двух слов U и V в ее алфавите определить, представляют ли они один и тот же элемент этой полугруппы, т.е. эквивалентны ли они в Π .

Для конечно определенных групп аналогичная проблема равенства была сформулирована М. Дэном двумя годами раньше в работе [31]. Ее иногда еще называют проблемой тождества.

Проблему равенства можно ставить и для каждой полугруппы или группы в отдельности. При этом мы получим частную проблему равенства для фиксированной полугруппы (группы).

Конечно, Дэн и Туэ не предполагали, что искомый алгоритм может не существовать. Они просто ставили задачу построения алгоритма для решения важной проблемы, связанной с универсальным способом задания полугрупп и групп. Более того, появившиеся только в середине XX века доказательства неразрешимости этих проблем оказались неожиданными для широкого круга математиков. Ниже мы приведем полные доказательства этих фундаментальных результатов А. А. Маркова, Э. Поста, П. С. Новикова, В. В. Буна и других авторов в современном упрощенном изложении.

В 1947 году А. А. Марков [57] и Э. Пост [84] независимо доказали существование конечно определенных полугрупп с неразрешимой проблемой равенства слов. Это был первый в истории математики пример неразрешимой проблемы, которая была сформулирована задолго до появления в науке точного определения понятия алгоритма. Мы приведем здесь доказательство этого результата, существенно более простое, чем

оригинальные доказательства самих авторов. Оно основано на доказанной выше неразрешимости проблемы останковки для машины Тьюринга T_0 .

Пусть дана произвольная машина Тьюринга T с внешним алфавитом $A_T = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$, алфавитом внутренних состояний $Q_T = \{q_0, q_1, \dots, q_m\}$ и программой P_T . По этой программе P_T мы естественным образом построим конечно определенную полугруппу $S(T)$, заданную множеством образующих элементов

$$\{a_0, a_1, \dots, a_n, q_0, q_1, \dots, q_m, h\}$$

и некоторым множеством определяющих соотношений $\mathcal{R}(S(T))$, которая строится по программе P_T .

Для каждой команды $P_T(i, j)$ из P_T мы включаем в $\mathcal{R}(S(T))$ соотношения определенного ниже вида.

I. Если $P_T(i, j)$ имеет вид $q_i a_j \mid q_r a_t$, то включаем в $\mathcal{R}(S(T))$ одно соотношение $q_i a_j = q_r a_t$.

II. Если команда $P_T(i, j)$ имеет вид $q_i a_j \mid q_r L$, то включаем все соотношения вида $a_t q_i a_j = q_r a_t a_j$ при $t = 0, \dots, n$ и еще одно соотношение $h q_i a_j = h q_r a_0 a_j$.

III. Если команда $P_T(i, j)$ имеет вид $q_i a_j \mid q_r R$, то включаем все соотношения вида $q_i a_t a_j = a_t q_r a_j$ при $t = 0, \dots, n$ и еще одно соотношение $q_i a_j h = a_j q_r a_0 h$.

IV. Кроме того, добавим в $\mathcal{R}(S(T))$ еще $h q_0 h = q_0$ и все соотношения видов $q_0 a_t = q_0$ и $a_t q_0 = q_0$.

Каждой конфигурации $X = E_1 q_i E_2$ машины T ставим в соответствие слово $h E_1 q_i E_2 h$, которое будем называть *словом Поста*.

Заметим, что элементарные преобразования типов I, II, III любое слово Поста переводят в слово Поста. Следующая лемма очевидна.

ЛЕММА 2.1. *Машина Тьюринга T переводит за один такт работы конфигурацию X в конфигурацию Y в том и только том случае, если слово Поста hXh переводится в слово Поста hYh одним левым элементарным преобразованием, соответствующим команде, применяемой машиной T .*

ЛЕММА 2.2. *Машина Тьюринга T , начав работать в конфигурации X , через конечное число тактов работы остановится тогда и только тогда, когда в полугруппе $S(T)$ выполняется равенство $hXh = q_0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть машина Тьюринга T , начав работать в конфигурации X , через конечное число тактов работы остановится, т.е. имеется конечная цепочка конфигураций $X, X_1, X_2, \dots, X_{k-1}, X_k$, оканчивающаяся заключительной конфигурацией X_k . Тогда по лемме 2.1 имеем последовательность элементарных преобразований полугруппы $S(T)$

$$hXh \rightarrow hX_1h \rightarrow hX_2h \rightarrow \dots \rightarrow hX_{k-1}h \rightarrow hX_kh,$$

где hX_kh имеет вид $hZ_1q_0Z_2h$. Используя определяющие соотношения из IV-й группы, получаем, что в полугруппе $S(T)$ выполняется равенство $hXh = q_0$.

Предположим, теперь, что в полугруппе $S(T)$ выполняется равенство $hXh = q_0$. Это значит, что существует цепочка элементарных преобразований

$$(5) \quad hXh = Y_0 \rightarrow Y_1 \rightarrow Y_2 \rightarrow \dots \rightarrow Y_{k-1} \rightarrow Y_k = q_0.$$

Очевидно, в каждое слово Y_j из последовательности (5) входит только одна q -буква. Рассмотрим кратчайшую цепочку элементарных преобразований вида (5), заканчивающуюся словом, содержащим q_0 :

$$(6) \quad hXh = Y_0 \rightarrow Y_1 \rightarrow Y_2 \rightarrow \dots \rightarrow Y_{r-1} \rightarrow Y_r = Z_1 q_0 Z_2.$$

В преобразованиях (6) определяющие соотношения полугруппы $S(T)$ из IV-й группы не используются. Поэтому в (6) все слова являются словами Поста.

Покажем, что в цепочке (6) все преобразования левые. Допустим, что это не так. Пусть

$$(7) \quad Y_t \rightarrow Y_{t+1}$$

есть самое последнее правое элементарное преобразование в (6). Тогда $t + 1 < r$ и за преобразованием (7) должно следовать левое преобразование

$$(8) \quad Y_{t+1} \rightarrow Y_{t+2}.$$

Так как среди левых частей определяющих соотношений типов I, II, III есть только одно слово E , содержащее данное двубуквенное подслово $q_i a_j$, то в (8) может использоваться лишь то же самое соотношение, что и в (7). Более того, однозначно определено также и вхождение всего определяющего слова E в слово Y_{t+1} . Поэтому получаем $Y_{t+2} = Y_t$, что противоречит условию минимальности последовательности (6). Следовательно, (6) состоит только из левых элементарных преобразований. Тогда по лемме 2.1 машина T из конфигурации X через конечное число шагов перейдет в заключительное состояние q_0 и остановится. Лемма 2.2 доказана.

Пусть T_0 – машина Тьюринга с неразрешимой проблемой остановки. Тогда из теоремы 1.2 и леммы 2.2 следует

ТЕОРЕМА 2.1 (А. А. Марков, Э. Пост). *Невозможен алгоритм, определяющий для произвольного слова X в алфавите образующих полугруппы $S(T_0)$, равно ли оно q_0 в полугруппе $S(T_0)$.*

Заметим, что любая конечно определенная полугруппа вкладывается в полугруппу, заданную 2 порождающими и конечным числом определяющих соотношений. Для этого можно воспользоваться следующей подстановкой двубуквенных слов вместо всех исходных порождающих:

$$a_i \rightarrow aba^{i+1}b^{i+1}.$$

Поэтому существует полугруппа с неразрешимой проблемой равенства, заданная двумя порождающими и конечным числом определяющих соотношений.

Наиболее простые (по общей длине задания) примеры полугрупп с неразрешимой проблемой распознавания равенства слов были построены в 1956 году независимо Г. С. Цейтиным [104] и Д. Скоттом [94]. Оба эти задания содержали 7 определяющих соотношений. Ниже мы приводим пример Цейтина с доказательством.

ТЕОРЕМА 2.2 (Г. С. Цейтин [104]). *Полугруппа Π , заданная образующими a, b, c, d, e и определяющими соотношениями*

$$ac = ca, \quad ad = da, \quad bc = cb, \quad bd = db, \quad ce = eca, \quad de = edb, \quad csa = csaе,$$

имеет неразрешимую проблему равенства слов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На самом деле будет доказана неразрешимость проблемы распознавания равенства в Π произвольного слова X некоторому фиксированному слову.

Следующая ниже основная лемма утверждает, что полугруппа Π в некотором смысле универсальна для всех полугрупп G , имеющих задание специального вида.

Рассмотрим произвольную конечно определенную полугруппу G , имеющую задание специального вида с пустыми правыми частями соотношений:

$$\langle b_1, \dots, b_k \mid K_j = 1 \ (j = 1, \dots, m) \rangle.$$

Очевидно, это задание эквивалентно следующему:

$$\langle b_1, \dots, b_k, \alpha \mid \alpha = 1, \{K_j \alpha = 1 \mid j = 1, \dots, m\} \rangle.$$

Индукцией по длине слова X на словах в алфавите полугруппы G определим отображение $\tau(X)$:

$$\tau(\Lambda) = a, \quad \tau(X\alpha) = \tau(X)a, \quad \tau(Xb_j) = \tau(X)b^j a \quad (j = 1, 2, \dots, k).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Для произвольного непустого слова X через $[X]$ (через (X)) будем обозначать слово, полученное в результате удаления из слова X последней (соответственно, первой) буквы.

Очевидно, для любых двух слов X и Y в алфавите образующих полугруппы G выполняются равенства

$$\begin{aligned} \tau(XY) &= \tau(X)(\tau(Y)) = [\tau(X)]\tau(Y), \\ \tau(X) &= a(\tau(X)) = [\tau(X)]a. \end{aligned}$$

ЛЕММА 2.3. Если P, Q – слова в алфавите полугруппы G , то

$$P = Q \text{ в } G \iff \tau(P) = \tau(Q) \text{ в полугруппе} \\ \mathfrak{B} = \langle a, b \mid \{\tau(K_j \alpha) = a \mid j = 0, 1, 2, \dots, m\} \rangle,$$

где K_0 – пустое слово.

Доказательство очевидно.

Обозначим

$$\mathcal{A}_0 = \{a, b\}, \quad \overline{\mathcal{A}_0} = \{c, d\}, \quad \mathcal{A}' = \{a, b, c, d, e\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Буквы c и d будем называть *двойниками* букв a и b , и обратно. Мы используем обозначения:

$$\overline{a} = c, \quad \overline{b} = d, \quad \overline{c} = a, \quad \overline{d} = b.$$

Для произвольного слова X в алфавите $\mathcal{A}_0 \cup \overline{\mathcal{A}_0}$ через $\overline{X}$ будем обозначать результат замены в слове X каждой буквы η ее двойником $\overline{\eta}$.

Заметим, что если X – слово в алфавите $\mathcal{A}_0$, а Y – слово в алфавите $\overline{\mathcal{A}_0}$, то $XY = YX$ в полугруппе Π .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если алфавит $\mathcal{A}$ содержится в $\mathcal{B}$, а X – слово в алфавите $\mathcal{B}$, то через $[X^{\mathcal{A}}$ будем обозначать проекцию слова X на алфавит $\mathcal{A}$.

Обозначим

$$(9) \quad S \rightleftharpoons \overline{\tau(\alpha K_0 \alpha K_1 \alpha \dots K_m \alpha)}.$$

ОСНОВНАЯ ЛЕММА. Если P, Q – слова в алфавите $\mathcal{A}_0$, то

$$P = Q \text{ в полугруппе } \mathfrak{B} \iff SP = SQ \text{ в полугруппе } \Pi.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликацию $\implies$ достаточно доказать для случая одного элементарного преобразования $P \rightarrow Q$, причем можно ограничиться случаем:

$$P = UaV, \quad Q = U\tau(K_t\alpha)V.$$

Легко проверяются следующие равенства в полугруппе Π :

$$\begin{aligned} SP &= S_1 \overline{\tau(\alpha K_t \alpha)} S_2 UaV = S_1 U \overline{\tau(\alpha K_t \alpha)} a S_2 V \\ &= S_1 U [\overline{\tau(\alpha K_t)}] \overline{\tau(\alpha)} a S_2 V = S_1 U [\overline{\tau(\alpha K_t)}] cca e S_2 V \\ &= S_1 U \overline{\tau(\alpha K_t \alpha)} a e S_2 V = S_1 U \overline{\tau(\alpha)} a [\overline{\tau(K_t \alpha)}] e S_2 V \\ &= S_1 U cca e [\overline{\tau(K_t \alpha)}] (\tau(K_t \alpha)) S_2 V = S_1 U cca [\overline{\tau(K_t \alpha)}] (\tau(K_t \alpha)) S_2 V \\ &= S_1 cc [\overline{\tau(K_t \alpha)}] S_2 Ua (\tau(K_t \alpha)) V = S_1 [\overline{\tau(\alpha K_t \alpha)}] S_2 U \tau(K_t \alpha) V = SQ. \end{aligned}$$

Тем самым импликация $\implies$ доказана.

Для доказательства импликации $\impliedby$ нам понадобятся следующие ниже леммы 2.4–2.6. Сначала индукцией по длине слова X в алфавите $\mathcal{A}'$ определим функцию $[X^\sim$:

$$[\Lambda^\sim \rightleftharpoons \Lambda, \quad [P\gamma^\sim \rightleftharpoons [P^\sim [\gamma^{\mathcal{A}_0}$$

при $\gamma \in \mathcal{A}_0 \cup \overline{\mathcal{A}_0}$ и

$$[Pe^\sim \rightleftharpoons [P^\sim [\overline{P^{\mathcal{A}_0}}].$$

Очевидно, значениями функции $[X^\sim$ являются слова в алфавите $\mathcal{A}_0$. Если P – слово в алфавите $\mathcal{A}_0 \cup \overline{\mathcal{A}_0}$, то $[P^\sim = [P^{\mathcal{A}_0}$.

Следующая лемма доказывается правой индукцией по длине слова Q .

ЛЕММА 2.4. Для любых слов P и Q в алфавите $\mathcal{A}'$ выполняется равенство

$$[PQ^\sim = [P^\sim [[P^{\mathcal{A}_0} Q^\sim.$$

ЛЕММА 2.5. Если слово Pcc является началом слова S , то в полугруппе $\mathfrak{B}$ выполнено равенство $a\overline{Pcc} = a$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть слово Pcc есть начало S . Тогда слово $\overline{Pcc}$ есть начало $\overline{S}$, т.е. начало слова $\tau(\alpha K_0 \alpha K_1 \alpha \dots \alpha K_m \alpha)$. Так как слово $\overline{Pcc}$ кончается словом $aa = \tau(\alpha)$ и буква α не входит в слова K_j , то при некотором $j \leq m$ имеем

$$\overline{Pcc} = \tau(\alpha K_0 \alpha K_1 \alpha \dots \alpha K_j \alpha).$$

Используя соотношения полугруппы $\mathfrak{B}$, получим $\overline{Pcc} = a$, и, следовательно, $a\overline{Pcc} = aa = a$.

ЛЕММА 2.6. Если P – слово в алфавите $\mathcal{A}_0$ и $SP = Q$ в полугруппе Π , то $[Q]^\sim = P$ в полугруппе $\mathfrak{B}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть P – слово в алфавите $\mathcal{A}_0$ и дана последовательность элементарных преобразований полугруппы $\mathfrak{B}$

$$(10) \quad SP = Q_0 \rightarrow Q_1 \rightarrow \dots \rightarrow Q_k \rightarrow Q_{k+1} = Q.$$

Имеем $[SP]^\sim = P$ и $[SP\overline{\mathcal{A}_0}] = S$. Легко видеть, что для любого слова Q_j из последовательности (10) также выполняется равенство $[Q_j\overline{\mathcal{A}_0}] = S$.

Допустим, что искомое утверждение доказано для Q_k . Нам достаточно доказать, что при любом k $[Q_k]^\sim = [Q_{k+1}]^\sim$ в полугруппе $\mathfrak{B}$.

Рассмотрим следующие три случая.

I. $Q_k = U\gamma\delta V$, $Q_{k+1} = U\delta\gamma V$ ($\gamma \in \overline{\mathcal{A}_0}$, $\delta \in \mathcal{A}_0$).

II. $Q_k = U\gamma e V$, $Q_{k+1} = Ue\gamma\bar{\gamma} V$ ($\gamma \in \overline{\mathcal{A}_0}$).

III. $Q_k = Ucca V$, $Q_{k+1} = Uccae V$.

Случай I. $Q_k = U\gamma\delta V$, $Q_{k+1} = U\delta\gamma V$ ($\gamma \in \overline{\mathcal{A}_0}$, $\delta \in \mathcal{A}_0$).

По лемме 2.4 получаем

$$\begin{aligned} [Q_k]^\sim &= [U\gamma\delta V]^\sim = [U\gamma\delta]^\sim [[U\gamma\delta\overline{\mathcal{A}_0} V]^\sim = [U]^\sim \delta [[U\overline{\mathcal{A}_0} \gamma V]^\sim, \\ [Q_{k+1}]^\sim &= [U\delta\gamma V]^\sim = [U\delta\gamma]^\sim [[U\delta\gamma\overline{\mathcal{A}_0} V]^\sim = [U]^\sim \delta [[U\overline{\mathcal{A}_0} \gamma V]^\sim = [Q_k]^\sim. \end{aligned}$$

Случай II. В этом случае вновь воспользуемся леммой 2.4 и определением функции $[X]^\sim$:

$$\begin{aligned} [Q_k]^\sim &= [U\gamma e V]^\sim = [U\gamma e]^\sim [[U\gamma\overline{\mathcal{A}_0} V]^\sim = [U]^\sim \overline{[U\gamma\overline{\mathcal{A}_0}]} [[U\gamma\overline{\mathcal{A}_0} V]^\sim, \\ [Q_{k+1}]^\sim &= [Ue\gamma\bar{\gamma} V]^\sim = [Ue\gamma\bar{\gamma}]^\sim [[U\gamma\overline{\mathcal{A}_0} V]^\sim \\ &= [Ue]^\sim \bar{\gamma} [[U\gamma\overline{\mathcal{A}_0} V]^\sim = [U]^\sim \overline{[U\gamma\overline{\mathcal{A}_0} \bar{\gamma}]} [[U\gamma\overline{\mathcal{A}_0} V]^\sim = [Q_k]^\sim. \end{aligned}$$

Случай III. Имеем

$$\begin{aligned} [Q_k]^\sim &= [Ucca V]^\sim = [Ucca]^\sim [[U\overline{\mathcal{A}_0} cc V]^\sim = [U]^\sim a [[U\overline{\mathcal{A}_0} cc V]^\sim, \\ [Q_{k+1}]^\sim &= [Uccae V]^\sim = [Uccae]^\sim [[U\overline{\mathcal{A}_0} cc V]^\sim \\ &= [Ucca]^\sim \overline{[Ucc\overline{\mathcal{A}_0}]} [[U\overline{\mathcal{A}_0} cc V]^\sim = [U]^\sim a \overline{[U\overline{\mathcal{A}_0} cc]} [[U\overline{\mathcal{A}_0} cc V]^\sim. \end{aligned}$$

Нам остается доказать, что в полугруппе $\mathfrak{B}$ выполняется равенство

$$a = a[\overline{U^{\mathcal{A}_0}cc}.$$

Оно выполнено в силу леммы 2.5, так как слово $[U^{\mathcal{A}_0}cc$ является началом слова $[Q_k^{\mathcal{A}_0}$, а значит, и началом S . Лемма 2.6 доказана.

Теперь для доказательства импликации $\Leftarrow$ в утверждении основной леммы нам достаточно воспользоваться леммой 2.6, согласно которой мы получим

$$P = [SQ^{\sim} = Q.$$

Возьмем в качестве полугруппы G конечно определенную группу, имеющую неразрешимую проблему равенства (см. теорему 6.5). Разумеется, при этом в множестве определяющих соотношений $\{K_j = 1 \mid j = 1, \dots, m\}$ должны быть указаны и все тривиальные соотношения $b_s b_s^{-1} = 1, b_s^{-1} b_s = 1$ группы G , которые обычно опускаются при задании группы. Используя лемму 2.3 и основную лемму, получим, что для произвольного слова P в алфавите образующих полугруппы G имеет место эквивалентность

$$P = 1 \text{ в } G \iff \tau(P) = a \text{ в } \mathfrak{B} \iff S\tau(P) = Sa \text{ в } \Pi.$$

Следовательно, в полугруппе Π неразрешима проблема распознавания равенства произвольного слова X фиксированному слову Sa . Теорема 2.2 Г. С. Пейтина доказана.

Заметим, что определяющие соотношения полугруппы Π не связаны с полугруппой G , а основная лемма означает, что равенство слов $P = Q$ в любой полугруппе G можно имитировать в Π посредством указанного выше кодирования τ и умножения слева на фиксированное слово S , в котором закодирована система определяющих соотношений полугруппы G .

Полугруппа Г. С. Пейтина неоднократно использовалась при построении других простых примеров алгебраических систем с неразрешимой проблемой равенства.

В 1966 году Г. С. Маканин в работе [52] указал вложение полугруппы Г. С. Пейтина в полугруппу, заданную следующими 5 определяющими соотношениями:

$$\begin{aligned} gggf &= ffgg, & fgggff &= gffffg, & ffggffffgg &= ffggffffgge, \\ eggff &= ffe, & efgggff &= gffe, \end{aligned}$$

которая, очевидно, также имеет неразрешимую проблему равенства слов.

В том же году Ю. В. Матиясевич построил общую конструкцию вложения произвольной конечно определенной полугруппы в полугруппу с 5 определяющими соотношениями. Вскоре он усилил этот результат [61], построив примеры полугрупп с 3 определяющими соотношениями и неразрешимой проблемой равенства. Доказательство этого результата приводится ниже.

Отправляясь от построенной при доказательстве теоремы 2.1 полугруппы $S(T_0)$, имеющей неразрешимую проблему равенства слов, в задании которой ни одно определяющее слово не является пустым, легко построить полугруппу Π_1 с неразрешимой проблемой равенства слов, имеющую задание, в котором все соотношения имеют вид $c = ab$. Для этого достаточно последовательно добавлять к заданиям, содержащим

какое-то “длинное” соотношение вида $cdE = H$ (или $H = cdE$), новую букву b и новое соотношение вида $b = cd$, а это “длинное” соотношение заменить на $bE = H$ ($H = bE$).

Пусть полугруппа

$$\Pi_1 = \langle a_1, \dots, a_n \mid A_1 = B_1, \dots, A_m = B_m \rangle,$$

где $|A_j| = 1$, $|B_j| = 2$, имеет неразрешимую проблему распознавания равенства некоторому фиксированному слову Q_0 .

При этом можно считать, что число m определяющих соотношений полугруппы Π_1 имеет вид $m = 2^k$ и $m > n + 3$.

По полугруппе Π_1 сначала построим некоторую полугруппу Π_2 с тремя образующими элементами и пятью определяющими соотношениями, имеющую неразрешимую проблему равенства слов. Для этого определим преобразование ψ , полагая

$$\psi(a_i) = b^2 c^i b c^{m-i-3} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad \psi(XY) = \psi(X)\psi(Y).$$

Заметим, что в слово $\psi(X)$ не входит b^3 , так как $m > n + 3$.

Пусть

$$\begin{aligned} \psi(A_j) &= p_{j1} p_{j2} \dots p_{jm}, \\ \psi(B_j) &= q_{j1} q_{j2} \dots q_{j2m}. \end{aligned}$$

Положим

$$\begin{aligned} M &= p_{11} p_{12} \dots p_{1m} p_{12} p_{22} \dots p_{2m} \dots p_{1m} p_{2m} \dots p_{2m}, \\ N &= q_{11} q_{12} \dots q_{1m} q_{12} q_{22} \dots q_{2m} \dots q_{12m} q_{22m} \dots q_{22m}. \end{aligned}$$

Пусть

$$\Pi_2 = \langle b, c, d \mid bd = dbb, bd = dcb, cd = dbc, cd = dcc, M = N \rangle.$$

Следующие две леммы очевидны.

ЛЕММА 2.7. Если X — произвольное слово в алфавите $\{b, c\}$ и $|X| = 2^r - 1$, где $r > 0$, то $bd^r = d^r Xb$ и $cd^r = d^r Xc$ в полугруппе Π_2 .

ЛЕММА 2.8. Если U — слово в алфавите $\{b, c\}$ длины $|U| = m - j$, то $d^k UM = \psi(A_j) d^k V$ и $d^k UN = \psi(B_j) d^k V$, где $V = c^{|U|}$.

Если E — любое слово из букв c и b , то

$$\psi(A_j) E c d^k = d^k U M D \quad \text{и} \quad \psi(B_j) E c d^k = d^k U N D,$$

где U — слово длины $m - j$ и $d^k c^{m-j} D = E c d^k$.

ЛЕММА 2.9. Если $X = Y$ в полугруппе Π_1 , то $\psi(X) c d^k = \psi(Y) c d^k$ в Π_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть случай, когда переход $X \rightarrow Y$ есть элементарное преобразование в Π_1 .

Пусть, например, $X = RA_jQ$, $Y = RB_jQ$. Тогда, используя леммы 2.7 и 2.8, получаем в полугруппе Π_2 равенства

$$\begin{aligned}\psi(X)cd^k &= \psi(R)\psi(A_j)\psi(Q)cd^k = \psi(R)d^kUMD \\ &= \psi(R)d^kUND = \psi(R)\psi(B_j)\psi(Q)cd^k = \psi(Y)cd^k.\end{aligned}$$

Лемма 2.9 доказана.

ЛЕММА 2.10. Если $\psi(X)cd^k = \psi(Y)cd^k$ в полугруппе Π_2 , где X, Y — слова в алфавите полугруппы Π_1 , то $X = Y$ в полугруппе Π_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\psi(X)cd^k = \psi(Y)cd^k$ в полугруппе Π_2 . Рассмотрим последовательность элементарных преобразований

$$\psi(X)cd^k = Z_1 \rightarrow Z_2 \rightarrow \dots \rightarrow Z_t = \psi(Y)cd^k.$$

В каждое слово Z_i буква d входит k раз.

Обозначим через $\overline{Z_i}$ слово, полученное из слова Z_i сдвигом всех вхождений буквы d до предела вправо на основе первых четырех определяющих соотношений полугруппы Π_2 . Индукцией по i докажем, что для каждого i существует такое слово X_i , равное X в полугруппе Π_1 , что $\overline{Z_i} = \psi(X_i)cd^k$.

В качестве X_1 возьмем X . Допустим, что уже установлено $\overline{Z_i} = \psi(X_i)cd^k$, где $X = X_i$ в полугруппе Π_1 , и сделаем то же самое для слова $\overline{Z_{i+1}}$.

Если в переходе $Z_i \rightarrow Z_{i+1}$ не использовалось определяющее соотношение $M = N$, то $\overline{Z_{i+1}} = \overline{Z_i}$ и в качестве искомого слова X_{i+1} можно взять X_i .

Пусть переход $Z_i \rightarrow Z_{i+1}$ совершен с использованием соотношения $M = N$. Можно считать, что это левое преобразование, т.е. при некоторых u и v

$$Z_i = uMv, \quad Z_{i+1} = uNv.$$

Так как $2m = 2^{k+1}$ и в слове $\psi(X_i)$ нет вхождений b^3 , то справедливо следующее утверждение.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если слово Z получено из слова вида $\psi(X)cd^k$ с помощью только первых четырех соотношений полугруппы Π_2 , то в слове Z все k вхождений буквы d расположены левее любого подслова вида b^{2m} .

Поэтому в слове Z_i все k букв d должны быть левее подслова M . Максимально приблизив все эти буквы d слева к подслову M , мы можем считать, что $u = u_1d^ku_2$, где $|u_2| < m$, так как по индуктивному предположению Z_i получается из $\overline{Z_i}$ одними сдвигами букв d . При этом u_1 есть начало слова $\psi(X_i)$, так как слово $\overline{Z_i} = \psi(X_i)cd^k$ можно считать результатом сдвига вправо всех букв d в слове $u_1d^ku_2Mv$.

Пусть $|u_2| = m - j$. Очевидно, при некоторых M_1 и N_1 имеем $M = M_1c^{|u_2|}$ и $N = N_1c^{|u_2|}$. Тогда $d^ku_2M_1 = \psi(A_j)d^k$ и $d^ku_2N_1 = \psi(B_j)d^k$. Так как $\overline{Z_i} = \psi(X_i)cd^k$, то $\overline{Z_i}$ есть результат сдвига вправо всех букв d в слове $Z_i = u_1\psi(A_j)d^kc^{|u_2|}v$, т.е. имеем $d^kc^{|u_2|}v = Zd^k$ при некотором Z . Следовательно, имеем $\psi(X_i)cd^k = u_1\psi(A_j)Zd^k$, т.е. $\psi(X_i)c = u_1\psi(A_j)Z$. Учитывая, что никакие два образа $\psi(a_i)$ не пересекаются,

отсюда получаем, что $u_1 = \psi(P)$ и $Z = \psi(Q)$ при некоторых P и Q . Следовательно, $X_i = PA_jQ$.

Таким образом, в Π_2 получаем равенства

$$\begin{aligned} Z_{i+1} &= uNv = \psi(P)d^k u_2 N_1 c^{|u_2|} v = \psi(P)\psi(B_j)d^k c^{|u_2|} v \\ &= \psi(P)\psi(B_j)Zd^k = \psi(P)\psi(B_j)\psi(Q)cd^k = \psi(PB_jQ)cd^k. \end{aligned}$$

Это значит, что мы можем взять в качестве искомого X_{i+1} слово PB_jQ , которое равно X в Π_1 . Лемма 2.10 доказана.

Из лемм 2.9 и 2.10 следует, что в полугруппе Π_2 неразрешима проблема распознавания равенства слов вида $\psi(X)cd^k$ фиксированному слову $\psi(Q_0)cd^k$.

Рассмотрим следующее отображение τ :

$$\begin{aligned} \tau(b) &\Rightarrow \beta, \quad \tau(c) \Rightarrow \beta\alpha, \quad \tau(d) \Rightarrow \alpha\alpha, \\ \tau(1) &\Rightarrow 1, \quad \tau(XY) \Rightarrow \tau(X)\tau(Y). \end{aligned}$$

Обозначим через Π_3 полугруппу, заданную образующими α, β и следующими определяющими соотношениями:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad &\alpha\alpha\beta\alpha\beta = \beta\alpha\alpha, & \text{(ii)} \quad &\alpha\alpha\beta\beta = \beta\alpha\alpha, \\ \text{(iii)} \quad &\alpha\alpha\beta\alpha\beta\alpha = \beta\alpha\alpha\alpha, & \text{(iv)} \quad &\alpha\alpha\beta\beta\alpha = \beta\alpha\alpha\alpha, \\ \text{(v)} \quad &\tau(M) = \tau(N). \end{aligned}$$

Следующие две леммы тривиальны.

ЛЕММА 2.11. Если $X = Y$ в полугруппе Π_2 , то $\tau(X) = \tau(Y)$ в полугруппе Π_3 .

ЛЕММА 2.12. Если $\tau(X) = P\beta E$, то при некоторых X_1 и X_2 выполняются равенства

$$X = X_1X_2, \quad P = \tau(X_1), \quad \beta E = \tau(X_2).$$

ЛЕММА 2.13. Если $\tau(X) = \tau(Y)$, то $X = Y$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если слово $\tau(X)$ не имеет вхождений буквы β или $\tau(X) = \beta Z$, где β не входит в Z , то равенство $X = Y$ очевидно.

Если же $\tau(X) = P\beta E$, где слово P непусто и может содержать β только в начале, то по предыдущей лемме имеем $X = X_1X_2$ и при этом $P = \tau(X_1)$ и $\beta E = \tau(X_2)$. Далее, однозначность X_1 мы имеем по доказанному, а однозначность X_2 получаем по индуктивному предположению.

ЛЕММА 2.14. Если $\psi(X)cd^k = Z$ в полугруппе Π_2 и переход $\tau(Z) \rightarrow Y$ является элементарным преобразованием в Π_3 , то $Y = \tau(Z_1)$ для некоторого слова Z_1 , причем $Z \rightarrow Z_1$ является элементарным преобразованием в Π_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tau(X) = PEQ$ и $Y = PDQ$ для некоторого определяющего соотношения $E = D$ полугруппы Π_3 . Так как слово E начинается либо с β , либо с $\alpha\alpha\beta$, то по предыдущей лемме найдем такие слова X_1 и X_2 , что

$$X = X_1X_2, \quad P = \tau(X_1), \quad EQ = \tau(X_2).$$

Пусть S есть максимальное начало слова X_2 такое, что $\tau(S)$ является началом слова E , т.е. $E = \tau(S)E_1$ при некотором E_1 . Тогда $X_2 = SX_3$ и $E_1Q = \tau(X_3)$ при некотором X_3 .

Если слово E_1 пусто, то $E = \tau(S)$, $Q = \tau(X_3)$ и для некоторого определяющего соотношения $S = L$ полугруппы Π_2 имеем $D = \tau(L)$ и $Y = \tau(X_1LX_3)$. Тогда слово X_1LX_3 можно взять в качестве искомого слова Z .

Пусть E_1 непусто. Тогда слово X_3 начинается с буквы s или d , образ которой разделился между E и Q . При этом $|E_1| = 1$ и слово Q начинается с буквы α , т.е. $Q = \alpha Q_1$ при некотором Q_1 . Докажем, что $E\alpha = D\alpha$ также является определяющим соотношением полугруппы Π_3 .

1. Если $E_1 = \beta$, то равенство $E = D$ является определяющим соотношением (i) или (ii), так как слово E кончается на β , а слова $\tau(M)$ и $\tau(N)$ кончаются на $\beta\alpha$. В этом случае мы можем воспользоваться вместо определяющего соотношения $E = D$ определяющим соотношением $E\alpha = D\alpha$ и найдем искомого слово Z , как в случае пустого E_1 .

2. Пусть $E_1 = \alpha$. Тогда $E = \tau(S)\alpha$ и

$$X_3 = dX_4, \quad Q_1 = \tau(X_4)$$

при некотором X_4 . Значит, буква d входит в слово X правее слова S . Если бы при этом слово E совпадало с одним из слов $\tau(M)$ или $\tau(N)$, то в слово S входило бы слово b^{2m} . Но, как мы убедились при доказательстве леммы 2.10, в слове X , равному в полугруппе Π_2 слову $\psi(Z_1)cd^k$, левее буквы d не может входить слово b^{2m} . Следовательно, определяющее соотношение $E = D$ есть одно из определяющих соотношений (i), (ii), (iii) или (iv).

2.1. Если при этом $D = D_1\alpha$, то $E = D$ есть одно из соотношений (iii) или (iv). Тогда $D_1 = \tau(S)$ есть одно из соотношений (i) или (ii). Легко видеть, что тогда $D_1 = \tau(L_1)$ для некоторого L_1 и равенство $S = L_1$ также есть определяющее соотношение полугруппы Π_2 . В этом случае полагаем $Z = X_1L_1X_3$.

2.2. Если слово D кончается на β , то равенство $E = D$ есть одно из определяющих соотношений (i) или (ii). Тогда вместо него мы можем использовать определяющее соотношение $E\alpha = D\alpha$, где $D\alpha = \tau(L)$ для некоторого L . В этом случае можно полагать $Z = X_1LX_4$, как в случае пустого E_1 .

Это завершает доказательство леммы 2.14.

Из лемм 2.9, 2.10, 2.11 и 2.14 непосредственно следует

ЛЕММА 2.15. *Для любых двух слов X и Y в алфавите полугруппы Π_1 имеет место эквивалентность*

$$X = Y \text{ в полугруппе } \Pi_2 \iff \tau(\psi(X)cd^k) = \tau(\psi(Y)cd^k) \text{ в полугруппе } \Pi_3.$$

Из лемм 2.7 и 2.15 следует, что проблема распознавания равенства слов в полугруппе Π_3 неразрешима.

Так как определяющие соотношения (iii) и (iv) вытекают из соотношений (i) и (ii), то мы доказали следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2.3. *В полугруппе Π_3 , заданной порождающими α, β и определяющими соотношениями*

$$\tau(M) = \tau(N), \quad \alpha\alpha\beta\beta = \beta\alpha\alpha, \quad \beta\alpha\alpha = \alpha\alpha\beta\alpha\beta,$$

неразрешима проблема распознавания равенства фиксированному слову $\tau(\psi(Q_0)cd^k)$ для слов вида $\tau(\psi(X)cd^k)$, где X – произвольное слово в алфавите образующих полугруппы Π_1 .

3. Некоторые классы полугрупп с разрешимой проблемой равенства

Укажем некоторые классы полугрупп, для которых существуют простые алгоритмы распознавания равенства слов.

Сначала заметим, что для любой конечно определенной полугруппы Π множество всех слов, равных данному слову Q , алгоритмически перечислимо. В самом деле, определив $W_k(Q)$ как множество всех слов, которые могут быть получены из Q посредством не более чем k последовательных элементарных преобразований (полагая при этом $W_0(Q) = \{Q\}$), мы можем вычислять $W_{k+1}(Q)$ из множества $W_k(Q)$, добавив к нему все слова, полученные из слов этого множества одним элементарным преобразованием.

Легко видеть, что проблема равенства решается очень просто для всех полугрупп, удовлетворяющих условию однородности определяющих соотношений, т.е. при $|A_i| = |B_i|$ для всех соотношений $A_i = B_i$. Пусть нам нужно проверить равенство в такой полугруппе $X = Q$. Так как в любой такой полугруппе все слова, равные данному слову Q , имеют ту же длину, то все указанные выше множества $W_k(Q)$ будут содержать не более чем $n^{|Q|}$ слов, где n – число порождающих. Поэтому нам остается найти такое k , при котором $W_{k+1}(Q) = W_k(Q)$, и проверить, есть ли в $W_k(Q)$ слово X .

Проблема равенства имеет весьма простое решение также и для свободных групп F_n , так как каждое слово с помощью сокращений легко приводится к несократимому виду, а два несократимых слова равны в F_n тогда и только тогда, когда они совпадают графически.

Легко также указать алгоритм для решения проблемы равенства в полугруппах, заданных конечным числом определяющих соотношений, при условии что нам известна конечность рассматриваемой полугруппы. Пусть конечная полугруппа Π задана определяющими соотношениями и в ней нужно проверить равенство $X = Q$. Для этого мы будем применять параллельно два алгоритма $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$. Алгоритм $\mathfrak{A}$ перечисляет все слова U , равные слову Q в полугруппе Π , как указано выше, и устанавливает равенство $X = Q$ в случае, если оно имеет место в Π .

Алгоритм $\mathfrak{B}$ перебирает всевозможные гомоморфизмы $\varphi: \Pi \rightarrow S$ полугруппы Π в конечные полугруппы S , задаваемые таблицей Кэли, т.е. такие отображения φ , при которых образы $\varphi(A)$ и $\varphi(B)$ совпадают для каждого определяющего соотношения $A = B$ полугруппы Π . Для каждого такого гомоморфизма наш алгоритм проверяет, совпадают ли образы данных слов $\varphi(X)$ и $\varphi(Q)$ в полугруппе S , и останавливается, найдя такой гомоморфизм, при котором эти образы не совпадают.

Очевидно, если слова X и Q не равны в конечной полугруппе Π , то алгоритм $\mathfrak{B}$ через конечное число шагов установит это.

По существу алгоритмы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ дают решение проблемы равенства слов для всех *финитно аппроксимируемых* конечно определенных полугрупп (и в том числе для финитно аппроксимируемых групп). Полугруппа (группа) Π называется *финитно аппроксимируемой*, если для любых двух ее неравных слов A и B существует такой ее гомоморфизм $\varphi: \Pi \rightarrow S$ в конечную полугруппу (соответственно, в конечную группу) S , что $\varphi(A)$ не совпадает с $\varphi(B)$.

Отметим также результат Ф. Холла [38] о финитной аппроксимируемости конечно порожденных разрешимых групп степени 2.

Вопрос о разрешимости проблемы равенства слов в полугруппах с условием малого налегания определяющих слов рассматривался В. А. Осиповой в работе [80]. В этой работе доказана разрешимость проблемы равенства слов для полугрупп, заданных определяющими соотношениями вида

$$A_i = B_i \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

где все слова A_i и B_i не пусты и имеют меру налегания строго меньше $1/2$. Там же был построен пример полугруппы с неразрешимой проблемой равенства слов и мерой налегания, равной $1/2$.

Пусть полугруппа Π задана образующими

$$(1) \quad a_1, \dots, a_n$$

и определяющими соотношениями

$$(2) \quad A_i = B_i \quad (i = 1, 2, \dots, k),$$

причем все слова A_i и B_i непустые.

Через M обозначим множество всех определяющих слов A_i и B_i полугруппы Π .

Начало (конец) P слова X будем называть *правильным началом* (*правильным концом*) слова X , если $|P| \geq |X|/2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что полугруппа Π , заданная образующими (1) и определяющими соотношениями (2), принадлежит классу $K_{1/2}$, если для любого представления слов A из M в виде $A = RPQ$ выполняются условия:

- а) если P – правильное начало некоторого слова из M , то слово R пусто,
- б) если P – правильный конец некоторого слова из M , то слово Q пусто.

Определение класса полугрупп $\overline{K_{1/2}}$ получается из определения класса полугрупп $K_{1/2}$ заменой в определении правильных начал и правильных концов нестрогих неравенств $|P| \geq |X|/2$ на строгие $|P| > |X|/2$. Ясно, что $K_{1/2} \subseteq \overline{K_{1/2}}$.

ТЕОРЕМА 3.1. Если $\Pi \in K_{1/2}$, то каждое слово X в алфавите полугруппы Π имеет лишь конечное число равных ему в Π слов. Точнее, если X и Y – слова в алфавите Π и $X = Y$ в полугруппе Π , то выполняется неравенство

$$|Y| \leq |X| m^{|X|}, \quad \text{где} \quad m = \max_{1 \leq i \leq k} \{|A_i|, |B_i|\}.$$

СЛЕДСТВИЕ 3.1.1. *Существует алгоритм, решающий проблему равенства слов для всех полугрупп из класса $K_{1/2}$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\Pi \in K_{1/2}$. Разложение

$$E = S_1 S_2 \dots S_t$$

слова E в алфавите (1) назовем *нормальным*, если слова $S_1, S_2, \dots, S_t$ удовлетворяют условиям:

- 1) Каждое S_i входит в некоторое $C_i \in M$.
- 2) S_1 – правильное начало C_1 , а S_t – правильный конец C_t .
- 3) Для каждого $i < t$ либо S_i – правильный конец C_i , либо S_{i+1} – правильное начало C_{i+1} .

ЛЕММА 3.1. *Если слово PAQ , где $A \in M$, имеет нормальное разложение, состоящее из t множителей, то можно указать такое нормальное разложение слова PAQ из t множителей, в котором выделенное подслово A является одним из сомножителей S_i .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $PAQ = R_1 R_2 \dots R_t$ – нормальное разложение, где $C_k = u_k R_k v_k$, $C_k \in M$ ($k = 1, \dots, t$).

Рассмотрим первое R_i , которое пересекается с A , т.е. найдем такое $i \leq t$, что $P = R_1 R_2 \dots R'_i$, $R_i = R'_i A'$, $A = A' A''$, где A' непусто и одно из слов A'' и R_{i+1} есть начало другого.

Рассмотрим два случая:

- 1) $|A'| \geq |A|/2$, 2) $|A'| < |A|/2$.

Случай 1). A' есть правильное начало слова A и может входить в C_i только как его начало. Следовательно, $R_i = A'$. Если A'' пусто, то имеем $R_i = A$ и в качестве искомого разложения можно взять исходное.

Если слово R_i является правильным концом, то оно есть конец слова A , т.е. мы опять имеем случай, когда A'' пусто. Следовательно, можно считать, что R_{i+1} – правильное начало.

Так как A' непусто, то R_{i+1} не может быть началом A'' . Следовательно, A'' есть начало R_{i+1} , т.е. $R_{i+1} = A'' R''_{i+1}$ при некотором непустом R''_{i+1} .

Наконец заметим, что если R_{i+1} – правильный конец, то $R_{i+1} = C_{i+1}$ и слово R''_{i+1} – также будет правильным концом слова C_{i+1} , так как в силу непустоты A' слово A'' не может быть правильным началом слова C_{i+1} .

Теперь мы можем построить искомое нормальное разложение $S_1 S_2 \dots S_t$ слова PAQ , полагая

$$S_1 = R_1, \dots, S_{i-1} = R_{i-1}, S_i = A, S_{i+1} = R''_{i+1}, S_{i+2} = R_{i+2}, \dots, S_t = R_t.$$

Случай 2). $|A'| < |A|/2$, т.е. A'' – правильный конец слова A . Напомним, что одно из слов A'' и R_{i+1} есть начало другого. Если бы A'' было началом R_{i+1} , то оно должно было бы быть концом соответствующего слова C_{i+1} и мы имели бы $R_{i+1} = A''$. Следовательно, можно ограничиться случаем, когда R_{i+1} есть начало A'' , т.е. для некоторого слова Z выполняется равенство

$$(3) \quad A'' = R_{i+1} Z.$$

Так как по условию A' непусто, то R_{i+1} не является правильным началом. Тогда R_i – правильный конец. Если бы при этом слово R'_i было пусто, то мы имели бы равенство $R_i = A'$. Тогда условие б) из определения класса $K_{1/2}$ вместе с равенством $A = A'A''$ влекло бы пустоту слова A'' , что в рассматриваемом случае неверно. Поэтому слово R'_i непусто.

Заметим, что если при этом слово R_i есть правильное начало, то мы имеем равенство $C_i = R_i = R'_i A'$. Отсюда следует, что слово R'_i есть правильное начало слова C_i , так как в силу непустоты A'' слово A' не может быть правильным концом C_i .

В случае, если слово R_{i+1} – правильный конец, то слово Z пусто. Тогда искомое разложение получаем в виде

$$S_1 \Rightarrow R_1, \dots, S_{i-1} \Rightarrow R_{i-1}, S_i \Rightarrow R'_i, S_{i+1} \Rightarrow A, S_{i+2} \Rightarrow R_{i+2}, \dots, S_t \Rightarrow R_t.$$

Остается рассмотреть случай, когда слово R_{i+1} не является правильным концом. Тогда R_{i+2} – правильное начало. В силу (3) слово $R_{i+2}Y$ не есть начало Z , так как по условию A' непусто.

Значит, $R_{i+2} = ZR''_{i+2}$ при некотором непустом R''_{i+2} . При этом имеем также равенство $A = A'R_{i+1}Z$. Кроме того, заметим, что если R_{i+2} является правильным концом, то $R_{i+2} = C_{i+2}$, и тогда R''_{i+2} также будет правильным концом слова C_{i+2} , так как $|Z| < |C_{i+2}/2|$. Для завершения доказательства леммы 3.1 достаточно положить

$$S_1 \Rightarrow R_1, \dots, S_{i-1} \Rightarrow R_{i-1}, S_i \Rightarrow R'_i, \\ S_{i+1} \Rightarrow A, S_{i+2} \Rightarrow R''_{i+2}, S_{i+3} \Rightarrow R_{i+3}, \dots, S_t \Rightarrow R_t.$$

Из доказанной леммы 3.1 сразу следует

ЛЕММА 3.2. *Если слово PAQ имеет нормальное разложение из t множителей, а переход $PAQ \rightarrow PBQ$ является элементарным преобразованием полугруппы Π , то слово PBQ также имеет нормальное разложение из t множителей.*

Из леммы 3.2 следует

ЛЕММА 3.3. *Если V есть максимальное нормальное начало слова VQ , а переход $V \rightarrow V_1$ является элементарным преобразованием полугруппы Π , то слово V_1 есть максимальное нормальное начало слова V_1Q .*

ЛЕММА 3.4. *Если V – максимальное нормальное начало слова VY и $VY = PAQ$, где $A \in M_\Pi$, то либо $|V| < |P|$, либо $|V| \geq |PA|$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, слова V и P не совпадают. Предположим, что $|P| < |V| < |PA|$. Тогда $V = PA'$, $A = A'A''$, $Y = A''Q$, причем слова A' и A'' непусты. Пусть $R_1, \dots, R_t$ – нормальное разложение слова V . Достаточно доказать, что A'' – правильный конец. Если это не так, то слово A' – правильное начало. Из слов R_t и A' одно является концом другого. Так как A'' непусто, то правильный конец R_t не может быть концом A' . Следовательно, A' есть конец R_t . Тогда $R_t = A' = A$, так как A' – правильное начало. Но это противоречит условию непустоты слова A'' . Это завершает доказательство леммы 3.4.

ЛЕММА 3.5. Если $X = Y$ в Π , то

$$|Y| \leq |X|m^{|X|}, \quad \text{где } m = \max_{1 \leq i \leq k} \{|A_i|, |B_i|\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция по длине слова X . Так как по условию все определяющие слова полугруппы Π непустые, то можно считать, что $|X| > 0$. Пусть $X = aW$, где a – буква. Полагаем $l = |X|$. В силу индуктивного предположения любое слово W_j , равное слову W в полугруппе Π , имеет длину, не превосходящую $(l-1)m^{l-1}$.

Из всех последовательностей элементарных преобразований вида

$$aW_j = F_0 \rightarrow F_1 \rightarrow \dots \rightarrow F_p = Y$$

для слов W_j , равных слову W в полугруппе Π , выберем последовательность наименьшей длины

$$(4) \quad aW_k = E_0 \rightarrow E_1 \rightarrow \dots \rightarrow E_i \rightarrow E_{i+1} \rightarrow \dots \rightarrow E_r = Y.$$

Пусть $aW_k = VZ$, где V – максимальное нормальное начало слова aW_k . Очевидно, первое элементарное преобразование кратчайшей последовательности (4) должно затронуть начальную букву a , т.е. оно имеет вид

$$aW_k = AQ \rightarrow BQ = E_1.$$

Следовательно, нормальное слово V непусто.

Индукцией по i докажем, что $E_i = V_iZ$, где V_i – максимальное нормальное начало слова E_i , и существует последовательность

$$(5) \quad aV' = V_0 \rightarrow V_1 \rightarrow \dots \rightarrow V_r,$$

содержащая ровно r элементарных преобразований.

Индуктивный шаг от i к $i+1$ осуществляется следующим образом. Пусть элементарное преобразование $E_i \rightarrow E_{i+1}$ имеет вид $PAQ \rightarrow PBQ$, где $A, B \in M$. По лемме 3.4 либо $|V_i| < |P|$, либо $|V_i| \geq |PA|$.

Если при некотором i имеет место $|V_i| < |P|$ (мы рассматриваем первое такое преобразование), то при некотором P' выполнены равенства:

$$P = V_iP', \quad Z = P'AQ,$$

а преобразование $E_i \rightarrow E_{i+1}$ по существу происходит в Z . В таком случае имеем равенства $W_k = V'Z = V'P'AQ = V'P'BQ$ в полугруппе Π , и, следовательно, $W = V'P'BQ$ в полугруппе Π . Поэтому, взяв вместо W_k равное ему слово $V'P'BQ$, мы построили бы более короткую, чем (4), последовательность элементарных преобразований

$$aV'P'BQ = V_0P'BQ \rightarrow V_1P'BQ \rightarrow \dots \rightarrow V_tP'BQ = E_{i+1} \rightarrow E_{i+2} \rightarrow \dots \rightarrow E_r = Y.$$

Следовательно, во всех преобразованиях кратчайшей последовательности (4) должен иметь место случай $|V_i| \geq |PA|$. Тогда при каждом i имеем $V_i = PAV'_i$, $Q = V'_i Z$, т.е. $E_{i+1} = PBV'_i Z$ и переход $PAV'_i \rightarrow PBV'_i$ является элементарным преобразованием полугруппы Π , причем по лемме 3.3 слово PBV'_i есть максимальное нормальное начало слова $PBV'_i Z = E_{i+1}$, т.е. $V_{i+1} = PBV'_i Z$.

Значит, $Y = V_r Z$ и $V = V_r$ в полугруппе Π . По лемме 3.2 число множителей в нормальном разложении слова V_r равно числу множителей в нормальном разложении слова V , а значит, не превосходит $|V|$. Это дает неравенства $|V_r| \leq m|V|$ и

$$\begin{aligned} |Y| &= |V_r| + |Z| \leq m[1 + (l-1)m^{l-1} - |Z|] + |Z| \\ &= |Z|(1-m) + lm^l + m(1-m^{l-1}) \leq lm^l. \end{aligned}$$

Доказательство леммы 3.5 завершено.

Из доказанной леммы сразу следует теорема 3.1.

В. А. Осипова также построила конечно определенную полугруппу из класса $\overline{K_{1/2}}$, которая имеет неразрешимую проблему равенства слов. В своей диссертации [81] она доказала, что приведенная выше полугруппа Г. С. Цейтина Π с неразрешимой проблемой равенства слов вкладывается в полугруппу, заданную следующими определяющими соотношениями:

$$\begin{aligned} ac &= ca, \quad ad = da, \quad bc = cb, \quad bd = db, \\ e &= mn, \quad nc = fp, \quad mf = cq, \quad qpa = e, \\ e &= m'n', \quad n'd = f'p', \quad m'f' = dq', \quad q'p'b = e, \\ cc &= \varepsilon\delta, \quad e = \eta\gamma, \quad \delta a\eta = \varphi\psi, \quad \psi\gamma = \chi c, \quad \varepsilon\varphi\chi = ca. \end{aligned}$$

При этом использовалась техника, изложенная в работе [10].

4. Полугруппы с одним определяющим соотношением

Хотя проблема равенства для групп с одним определяющим соотношением была решена В. Магнусом еще в 1932 году (см. теорему 7.6 ниже), в вопросе о разрешимости проблемы равенства для полугрупп с одним определяющим соотношением долгое время не было сдвигов. Некоторые результаты по этой проблеме были получены С. И. Адяном в 60-х годах. Они изложены в монографии [10]. Впоследствии эта работа была продолжена как самим автором, так и его учениками. Однако проблему равенства в общем случае для полугрупп с одним определяющим соотношением решить пока не удалось. Приведем обзор результатов, полученных в этом направлении.

Формулируя проблему равенства для полугрупп (ассоциативных систем), А. Туэ в работе [101] особо выделил случай, когда полугруппа задается одним определяющим соотношением вида $A = 1$, где справа стоит пустое слово. Положительное решение проблемы Туэ для соотношений вида $A = 1$ впервые было дано в [10]. При этом была доказана некоторая общая теорема, позволяющая проблему равенства слов в полугруппе Π , заданной системой определяющих соотношений специального вида

$$(1) \quad A_i = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, k),$$

где длины $|A_i|$ слов A_i все равны l , свести к проблеме равенства слов в группах, задаваемых тем же числом k определяющих соотношений $B_i = 1$, где $|B_i| \leq l$. Было доказано, что именно такое задание имеет максимальная подгруппа полугруппы Π , порожденная всеми двусторонне обратимыми элементами этой полугруппы. Был указан алгоритм, выдающий по заданию полугруппы Π задание соответствующей максимальной подгруппы G_Π , при условии что имеется алгоритм, решающий проблему равенства слов для групп, заданных k нетривиальными определяющими соотношениями вида $B_i = 1$, где $|B_i| \leq l$. Отсюда в силу теоремы В. Магнуса о группах с одним определяющим соотношением вытекает следующий результат.

ТЕОРЕМА 4.1. *Проблемы равенства (левой и правой) делимости слов разрешимы для любой полугруппы Π_1 с одним определяющим соотношением вида $A = 1$.*

Суть доказательства этой теоремы в [10] сводится к эффективному сведению рассматриваемых проблем в специальной полугруппе Π с заданием (1) к проблеме равенства в максимальной подгруппе G_Π полугруппы Π . При этом для систем соотношений вида (1) используются две операции расширения. Первая операция расширения заключается в добавлении к определяющим словам A_i всех слов, которые получены из них циклическим сдвигом на так называемые *двусторонние начала*. Двусторонним началом относительно данной системы соотношений (1) называется слово, которое можно графически представить в виде произведения некоторых начал слов A_i и в виде произведения некоторых концов этих слов. Очевидно, любое двустороннее начало E относительно системы (1) двусторонне обратимо в полугруппе Π . Поэтому вместе с соотношением $A_i = EB_i = 1$ в полугруппе Π будет выполнено и соотношение $B_iE = 1$, т.е. добавление указанных циклических сдвигов приводит к заданию той же группы. Так как все добавляемые соотношения имеют ту же длину l , то эта операция расширения через конечное число шагов завершится.

В результате применения первой операции расширения к полугруппе Π_1 , заданной одним исходным соотношением $A = 1$, мы получим некоторое множество соотношений вида (1), где все левые части суть циклические сдвиги данного слова A на некоторые его подслова B_j , которые двусторонне обратимы в Π_1 . Пусть $B_1, B_2, \dots, B_r$ – все полученные таким образом минимальные двусторонне обратимые отрезки слова A . Они порождают в Π_1 некоторую подгруппу G_1 . Представив слово A в виде $A = \varphi(B_1, B_2, \dots, B_r)$, рассмотрим задание группы G_1 в новых образующих

$$G_1 = \langle \langle b_1, b_2, \dots, b_r \mid \varphi(b_1, b_2, \dots, b_r) = 1 \rangle \rangle.$$

Использованная в [10] для общего случая вторая операция расширения по идее должна учитывать всевозможные равенства между элементарными словами, полученными в результате применения первой операции расширения. В случае одного исходного определяющего соотношения вида $A = 1$ вторая операция расширения ничего нового не даст, так как в преобразованиях, производимых внутри данного элементарного слова B_j участвуют не все порождающие рассматриваемой группы G_1 , а только те b_i , для которых соответствующее слово B_i входит в преобразуемое элементарное слово B_j . Поэтому порождающая b_j в этих преобразованиях не участвует. Следовательно, по теореме о свободе 7.4 все возникающие при этом равенства будут равенствами в свободной группе, так что результат применения первой операции расширения уже будет замкнут и относительно второй операции расширения. Это означает, что G_1 уже

будет максимальной подгруппой полугруппы Π_1 . Это обстоятельство было недавно замечено в работе [110]. Поэтому для решения проблемы равенства в полугруппе Π с соотношением $A = 1$ после применения первой операции расширения в силу теоремы Магнуса о разрешимости проблемы равенства для групп с одним соотношением достаточно, следуя работе [10], воспользоваться следующей леммой.

ЛЕММА 4.1. Пусть в Π_1 даны два слова $X = X_1 E_1 X_2 E_2 \dots X_r E_r X_{r+1}$ и $Y = Y_1 D_1 Y_2 D_2 \dots Y_s D_s Y_{s+1}$, в которых выделены все максимальные двусторонне обратимые подслова X_i и Y_j .

Тогда $X = Y$ в полугруппе Π_1 в том и только том случае, если $r = s$ и при всех i выполняются равенства $X_i = Y_i$ и $E_i = D_i$ в максимальной подгруппе G .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Слово A мы называем *гиперпростым*, если никакое собственное начало слова A не является его концом. Гиперпростое слово A характерно тем, что в любом слове никакие два вхождения слова A не пересекаются.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Соотношение $A = B$ при непустых A и B назовем *симметричным*, если слова A и B имеют общее начало T , являющееся также их общим концом, т.е. соотношение $A = B$ имеет один из двух видов:

$$(2) \quad TET = TDT,$$

$$(3) \quad TET = T,$$

где слово T гиперпросто.

Следующая теорема была доказана в [17].

ТЕОРЕМА 4.2. Для всякой полугруппы Π , заданной одним симметричным определяющим соотношением $A = B$, можно указать определяющее соотношение $E = D$ такое, что $|ED| < |AB|$ и проблема равенства в Π сводится к проблеме равенства для полугруппы Π_1 , задаваемой одним соотношением $E = D$. При этом проблема левой (правой) делимости в Π сводится к проблемам равенства и левой (соответственно, правой) делимости в Π_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Искомое определяющее соотношение $C = D$ по данному симметричному соотношению вида (2) или (3) с гиперпростым T строится с помощью следующей кодировки.

Перенумеруем все слова в алфавите полугруппы Π , не содержащие вхождений гиперпростого слова T :

$$(4) \quad R_1, R_2, \dots, R_i, R_{i+1}, \dots$$

Слово X назовем *правильным*, если оно начинается и кончается словом T . Множество всех правильных слов полугруппы Π взаимно однозначно отобразим на множество всех слов в алфавите

$$(5) \quad b_1, b_2, \dots, b_i, b_{i+1}, \dots$$

с помощью следующей функции $\varphi(X)$, определяемой индуктивно:

- 1) $\varphi(T) = \Lambda$;
- 2) если $X = X_1 R_i T$, где X_1 есть правильное слово, то положим $\varphi(X) = \varphi(X_1 b_i)$.

Через Π' обозначим полугруппу, заданную образующими (5) и определяющим соотношением

$$\varphi(A) = \varphi(B).$$

Очевидно, для любых двух правильных слов P и Q переход $P \rightarrow Q$ есть элементарное преобразование полугруппы Π в том и только том случае, если $\varphi(P) \rightarrow \varphi(Q)$ есть элементарное преобразование в Π' . Отсюда следует, что два правильных слова U и V равны в Π в том и только том случае, если $\varphi(U) = \varphi(V)$ в Π' . Далее нетрудно проверить все утверждения доказываемой теоремы.

Применяя многократно преобразование φ к исходному симметричному соотношению $A = B$, мы приходим к некоторому несимметричному соотношению. В частности, соотношение вида (3) приводится к соотношению вида $D = 1$. Таким образом, из теорем 4.2 и 4.1 получается

СЛЕДСТВИЕ 4.2.1. *Проблемы равенства (левой и правой делимости) разрешимы для любой полугруппы Π_1 с одним определяющим соотношением вида $TET = T$.*

В работе [9] исследовался вопрос о тождественных соотношениях в полугруппах, задаваемых любым числом определяющих соотношений вида $A_i = 1$. Было доказано, что если полугруппа, имеющая такое задание, удовлетворяет некоторому нетривиальному тождеству, то она является группой, за исключением двух простых случаев, когда она изоморфна свободной моногенной полугруппе $\Pi_0 = \langle a \mid \emptyset \rangle$ или полугруппе $\Pi_1 = \langle a, b \mid ab = 1 \rangle$. Полугруппа Π_0 коммутативна, а полугруппа Π_1 удовлетворяет тождественному соотношению

$$xy^2xux^2y^2x = xy^2x^2yux^2x,$$

причем это тождество является кратчайшим в полугруппе Π_1 по длине левых и правых частей [10].

ЛЕММА 4.2. *Проблема равенства слов разрешима в любой полугруппе Π , заданной соотношением $A = B$ при $|A| > |B|$, если слово A гиперпросто.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В такой полугруппе Π каждое слово X можно в результате конечного числа подстановок слова B вместо вхождений A преобразовать в равное ему слово X^* , не содержащее вхождений A . Такое слово X^* назовем *приведенным*. Достаточно проверять равенство в Π для приведенных слов. Легко убедиться, что два приведенных слова равны в Π только в том случае, если они совпадают графически. Допустим, что два разных приведенных слова C и D равны в Π . Рассмотрим кратчайшую последовательность элементарных преобразований, переводящую C в D . В ней первое преобразование будет заменой B на A , причем возникшее последним вхождением слова A в преобразуемое слово не будет затронуто в силу своей гиперпростоты до тех пор, пока оно не заменится обратно на B ; причем такая замена A на B обязательно произойдет, так как по условию A не входит в D . Но это противоречит условию минимальности рассматриваемой последовательности.

Очевидно, указанный алгоритм имеет линейную сложность.

На пути решения проблемы равенства слов для полугрупп с одним определяющим соотношением вида $A = B$ с непустыми A и B в работе [7] было найдено достаточное

условие вложимости в группу для полугрупп, задаваемых при помощи определяющих соотношений. Эти полугруппы выделяются с помощью так называемых *систем соотношений без левых и правых циклов*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть дана некоторая система образующих и определяющих соотношений

$$(6) \quad \langle a_1, \dots, a_m \mid \{A_i = B_i \mid i = 1, \dots, m\} \rangle,$$

где A_i, B_i – непустые слова. *Левым графом* этой системы соотношений называется граф, вершинами которого являются все буквы алфавита, а ребрами – все неупорядоченные пары букв $\{a_{j_i}, a_{r_i}\}$, где a_{j_i} и a_{r_i} суть начальные буквы левой и правой частей определяющего соотношения $A_i = B_i$. Если вместо начальных букв слов A_i и B_i брать их конечные буквы, то получим определение *правого графа* данной системы определяющих соотношений.

Мы говорим, что данная система определяющих соотношений *не имеет левых (правых) циклов*, если нет циклов в соответствующем левом (правом) графе.

Для случая одного определяющего соотношения $A = B$ это условие сводится к требованию, чтобы слова A и B были непустыми и чтобы они начинались (соответственно, оканчивались) разными буквами, т.е. чтобы определяющее соотношение было несократимо слева (соответственно, справа).

В работе [10] доказана следующая теорема о вложении.

ТЕОРЕМА 4.3. *Если система определяющих соотношений (6) данной полугруппы Π не имеет левых и правых циклов, то в полугруппе Π выполнены оба правила сокращения и она естественным образом вложена в группу, заданную теми же определяющими соотношениями.*

Отсюда в силу указанного выше результата В. Магнуса получается

СЛЕДСТВИЕ 4.3.1. *Существует алгоритм, решающий проблему равенства слов для полугрупп, заданных одним несократимым слева и справа соотношением вида $A = B$ при непустых A и B .*

Другим следствием теоремы 4.3 является вложимость в группу любой полугруппы, заданной одним определяющим соотношением с использованием двустороннего правила сокращения. Легко проверить, что полугруппа с двумя определяющими соотношениями

$$\Pi_2 = \langle a, b, c, d, e \mid ab = cd, aeb = ced \rangle$$

не вкладывается в группу, хотя в ней выполнено правило двустороннего сокращения. Действительно, в группе с такими же соотношениями выполнено равенство $ae^2b = ce^2d$, в то время как в полугруппе Π_2 оно не выполнено.

Необходимым условием вложимости данной полугруппы в группу является требование, чтобы в ней выполнялись следующие правила сокращения:

1. $AX = AY \implies X = Y$,
2. $XA = YA \implies X = Y$.

Полугруппа, в которой оба эти правила выполнены, называется *полугруппой с двусторонним сокращением*.

В работе [4] исследовалась роль правила сокращения при задании полугрупп с помощью определяющих соотношений. Для полугрупп с правилом сокращения возможны два способа задания с помощью определяющих соотношений. Можно требовать, чтобы полугруппа задавалась системой определяющих соотношений, из которых уже вытекает справедливость соответствующего правила сокращения. А можно добавить это правило сокращения в качестве дополнительного правила вывода истинных равенств. Если не ограничивать числа определяющих соотношений, то разница здесь не является существенной. Но для конечно определенных полугрупп это оказывается существенным. В работе [10] было установлено, что при задании конечно определенных полугрупп с использованием правила правостороннего (левостороннего) сокращения это правило, вообще говоря, нельзя заменить конечным числом дополнительных определяющих соотношений. Доказано, что в полугруппе Π , заданной образующими элементами

$$a, b, t_1, t_2, p_1, p_2$$

и определяющими соотношениями

$$at_1 = t_1b, \quad bt_2 = t_2b, \quad p_1t_1 = t_2p_1t_2, \quad p_2t_1 = t_1p_2, \quad t_2p_2 = p_2t_2t_1,$$

для любого целого положительного числа k выполняется равенство

$$p_1a^kp_2 = t_2p_1b^kp_2t_2;$$

причем каждое из этих равенств в соответствующих обозначениях должно входить в систему определяющих соотношений любого задания полугруппы Π с помощью определяющих соотношений без использования правила правостороннего сокращения.

Для конечно определенных полугрупп, удовлетворяющих правилу левостороннего (правостороннего) сокращения, при условии, что все определяющие слова непусты, проблема равенства слов тесно связана с так называемой *проблемой распознавания левой (правой) делимости*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Говорят, что в полугруппе Π слово A *делится на слово B слева (справа)*, если существует такое слово X , что в Π выполнено равенство $A = BX$ (соответственно, $A = XB$).

ПРОБЛЕМА ЛЕВОЙ (ПРАВОЙ) ДЕЛИМОСТИ для данной полугруппы заключается в отыскании алгоритма, с помощью которого можно было бы для любых двух слов A и B узнавать, делится ли слово A на слово B слева (справа), и в случае положительного ответа указать искомое частное X .

Очевидно, для разрешимости проблемы левой (правой) делимости для данной полугруппы достаточно иметь алгоритм для распознавания делимости на одну букву с нужной стороны.

ЛЕММА 4.4. Пусть в полугруппе Π с системой определяющих соотношений (6), где все A_i, B_i — непустые слова, выполнено правило левостороннего (правостороннего) сокращения. Тогда из разрешимости в ней проблемы распознавания левой (соответственно, правой) делимости следует разрешимость в ней и проблемы равенства.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу симметрии ограничимся случаем, когда в Π выполнено правило левостороннего сокращения. Сначала заметим, что никакое непустое слово не равно 1 в Π . Для проверки равенства двух данных слов A и B мы сначала проверим делимость A на B . Если не делится, то данные слова не равны. В случае делимости найдем такое слово X , что в Π выполнено равенство $A = BX$. Если при этом $A = B$, то из $B = BX$ по правилу левостороннего сокращения получим $1 = X$ в Π , т.е. слово X должно быть пусто. Лемма 4.4 доказана.

В работе [14] исследовалась проблема распознавания делимости произвольного слова X слева (справа) на данную букву в полугруппах, заданных определяющими соотношениями без левых (правых) циклов. Был предложен простой алгоритм $\mathfrak{A}$, который для любой полугруппы Π , заданной системой определяющих соотношений без левых (правых) циклов, выдает кратчайшую последовательность элементарных преобразований полугруппы Π , переводящую данное слово X в некоторое слово, начинающееся (кончающееся) данной буквой b , при условии, что X делится в полугруппе Π на b слева (справа). Там же было доказано, что если полугруппа Π задана системой определяющих соотношений без левых (правых) циклов, то для любых двух равных в Π слов X и Y существует единственная, с точностью до перестановки независимых преобразований, последовательность элементарных преобразований без поворотов, переводящая слово X в слово Y .

Напомним определение *левого разложения* $R_l(aX, b)$ слова aX относительно буквы b и *левого разложения* $R_l(bX, a)$ слова bX относительно буквы a [14; с. 615]. Для простоты рассмотрим случай, когда рассматриваемая полугруппа задана одним соотношением. Такое разложение существует всегда, если полугруппа Π имеет только две порождающие a и b . В случае большего числа порождающих разложение $R_l(cX, d)$ имеет смысл рассматривать, только когда одна из двух букв c и d совпадает с a , а другая — с b .

Разложения $R_l(aX, b)$ и $R_l(bX, a)$, которые мы определяем последовательно шаг за шагом, имеют вид

$$(7) \quad *H_1 * H_2 * \dots * H_k * E * Z,$$

где $H_1 H_2 \dots H_k E Z$ графически совпадает со словом aX (соответственно, со словом bX), слово E называется *головкой*, а слова H_i называются *компонентами* разложения (7). Слово Z может быть пусто. Компоненты H_i являются непустыми собственными началами левой части aA или правой части bB определяющего соотношения полугруппы Π . Компоненту H_i разложения (7) мы называем A -компонентой (B -компонентой), если она есть начало aA (соответственно, bB). Головка E совпадает с aA или с bB . Разложение (7) может не иметь головки.

Определения разложений $R_l(aX, b)$ и $R_l(bX, a)$ аналогичны. Поэтому ограничимся рассмотрением $R_l(aX, b)$.

Пусть E есть максимальное общее начало слов aX и aA , т.е. $aX = EZ$ и $aA = ED$ при некоторых Z и D . Если слово D пусто, то мы полагаем по определению

$$R_l(aX, b) = *E * Z$$

и называем подслово E головкой этого разложения.

Пусть D непусто. В таком случае мы обозначим слово E через H_1 и назовем его первым крылом искомого разложения. Если при этом Z пусто, то положим

$$R_l(aX, b) = * H_1 *.$$

Пусть Z непусто. Тогда Z и D начинаются с разных букв. Если хотя бы одна из этих букв отлична от a и b , то разложение $R_l(aX, b)$ не существует по определению. Пусть либо $Z = aY$ при некотором Y и слово D начинается с b , либо $Z = bY$ при некотором Y и слово D начинается с a . Пусть для определенности, $Z = bY$ при некотором Y и слово D начинается с a . В таком случае аналогично предыдущему находим максимальное общее начало E_1 слов bY и bB , т.е. $bY = E_1 Z_1$ и $bB = E_1 D_1$ при некоторых Z_1 и D_1 .

Если слово D_1 пусто, то мы полагаем по определению

$$R_l(aX, b) = * H_1 * E_1 * Z_1$$

и называем слово $E_1 = bB$ головкой этого разложения.

Пусть D_1 непусто. Тогда обозначим E_1 через H_2 и назовем его вторым крылом искомого разложения. Если при этом Z_1 пусто, то положим

$$R_l(aX, b) = * H_1 * H_2 *.$$

Если Z_1 непусто, то Z_1 и D_1 начинаются с разных букв. Если хотя бы одна из этих букв отлична от a и b , то опять разложение $R_l(aX, b)$ не существует по определению. В противном случае мы продолжим процесс нахождения левого разложения слова aX , рассматривая максимальное общее начало E_2 слова Z_1 и того определяющего слова, которое начинается с первой буквы слова D_1 .

Так как $|aX| > |Z| > |Z_1|$, то через конечное число шагов мы либо придем к случаю, когда разложение $R_l(aX, b)$ не существует по определению, либо получим головку E_k разложения и при этом искомое разложение будет иметь вид

$$R_l(aX, b) = * H_1 * H_2 * \dots * H_k * E_k * Z_k,$$

либо придем к случаю пустого слова Z_k и разложению без головки

$$R_l(aX, b) = * H_1 * H_2 * \dots * H_k *.$$

Этим завершается индуктивное определение разложений $R_l(aX, b)$ и $R_l(bX, a)$ для случая одного соотношения. В общем случае системы соотношений без левых циклов при построении разложения $R_l(aX, b)$ на каждом шаге надо сначала проверить, связаны ли путем в левом графе данные две буквы a и b . Если такого пути нет, то разложение $R_l(aX, b)$ не существует по определению. Если же буквы a и b связаны некоторым путем, то надо рассмотреть разложение $R_l(aX, c)$ для той буквы c , которая связана с a некоторым ребром на этом пути. Это означает, что среди определяющих соотношений есть соотношение вида $aA = cC$, причем оно будет единственным в силу отсутствия циклов в левом графе рассматриваемой системы соотношений.

Легко доказать, что правило левостороннего сокращения выполняется для систем соотношений (6) без левых циклов, в том числе для случая одного несократимого слева соотношения.

ЛЕММА 4.3. Пусть полугруппа Π задана одним несократимым слева соотношением $aE = bD$ в некотором алфавите. Если последовательность элементарных преобразований полугруппы Π

$$eX = X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow \dots \rightarrow X_k = eY$$

является кратчайшей для данных слов eX и eY , то в этих преобразованиях первая буква e преобразуемого слова не затрагивается, т.е. в ней фактически слово X преобразуется в Y .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство проведем индукцией по числу k элементарных преобразований в данной кратчайшей последовательности. Можно считать, что буква e совпадает с одной из букв a или b . Пусть для определенности данная кратчайшая последовательность имеет вид

$$(8) \quad aX = X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow \dots \rightarrow X_k = aY.$$

Допустим, что в (8) первая буква затрагивается. Выделив в (8) первое и последнее вхождения слов, начинающихся с отличной от a буквы b , получим, что последовательность (8) состоит из трех частей

$$(9) \quad aX = X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow \dots \rightarrow X_{r-1} = aEU \rightarrow bDU,$$

$$(10) \quad bDU \rightarrow X_{r+1} \rightarrow \dots \rightarrow X_t = bDV$$

и

$$(11) \quad bDV \rightarrow aEV = X_{t+1} \rightarrow \dots \rightarrow X_k = aY,$$

причем в (9) и (11) буква a затрагивается только в одном выделенном преобразовании. По индуктивному предположению в последовательности (10) буква b и все входящие в подслово D буквы не затрагиваются. Это означает, что в (10) по существу мы имеем последовательность элементарных преобразований

$$(12) \quad U \rightarrow \dots \rightarrow V.$$

Используя последовательности (9), (12) и (11), мы можем построить более короткую, чем (8), последовательность элементарных преобразований, переводящую слово aX в aY , исключив последнее преобразование в (9) и первое преобразование в (11). Но это противоречит предположению, что последовательность (8) была кратчайшей.

В общем случае системы соотношений (6) без левых циклов доказательство проводится аналогично. При этом перед разделением кратчайшей последовательности (8) на три части (9), (10) и (11) нужно убедиться, что в первом и последнем из преобразований последовательности (8), затрагивающих начальную букву, используется одно и то же соотношение из (6), что следует из отсутствия циклов в левом графе системы соотношений (6).

АЛГОРИТМ $\mathfrak{A}$ [14; с. 620]. Пусть полугруппа Π задана системой определяющих соотношений без левых циклов и дана пара (aX, b) , где буквы a и b различны. Из определения левого разложения $R_l(aX, b)$ непосредственно вытекает простой алгоритм для распознавания по данной паре (aX, b) , существует или нет разложение $R_l(aX, b)$, и построения этого разложения в случае, когда оно существует.

Алгоритм $\mathfrak{A}$ в применении к данной паре (aX, b) предписывает сначала найти левое разложение $R_l(aX, b)$. Однозначность разложения $R_l(aX, b)$ следует непосредственно из его определения.

I. Если слово aX делится на b в полугруппе Π , то из анализа кратчайшей последовательности, реализующей эту делимость, в силу леммы 4.3 и определения левого разложения следует существование разложения $R_l(aX, b)$ с некоторой головкой. Поэтому если такое разложение не существует или оно не имеет головки, то слово aX не делится на b слева в Π .

II. Если же $R_l(aX, b)$ имеет головку, скажем, оно имеет вид

$$R_l(aX, b) = * H_1 * H_2 * \dots * H_k * E * Z,$$

где $E = D$ есть определяющее соотношение Π , то алгоритм предписывает заменить в слове aX головку E словом D , преобразуя тем самым слово $aX = H_1 H_2 \dots H_k E Z$ в слово $Y = H_1 H_2 \dots H_k D Z$.

III. Если при этом Y не начинается с буквы b , скажем $Y = cY_1$, то предписывается повторить описанную процедуру с парой (cY_1, b) и т. д.

Следующая гипотеза была выдвинута первым автором данной статьи еще в 1976 году.

ГИПОТЕЗА. Проблема левой (правой) делимости, а следовательно, и проблема равенства слов, разрешима в любой полугруппе без левых (правых) циклов, причем, мы полагаем, что положительное решение этой проблемы может быть получено в результате применения описанного алгоритма $\mathfrak{A}$. Требуется найти подходящие критерии “защелкивания” работы алгоритма $\mathfrak{A}$, т.е. описания тех случаев, когда алгоритм будет работать бесконечно.

Следует отметить, что многие из полученных в последние годы результатов по проблемам равенства и делимости для полугрупп с одним определяющим соотношением основывались на алгоритме $\mathfrak{A}$. Приведем некоторые из таких результатов.

ТЕОРЕМА 4.4. *Если полугруппа Π задана n определяющими соотношениями без левых (правых) циклов*

$$(13) \quad A_i = B_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

то можно указать такую систему соотношений

$$(14) \quad \overline{A_i} = \overline{B_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

в алфавите из $n + 1$ буквы, что каждая из проблем равенства и левой (соответственно, правой) делимости для Π сводится к той же проблеме для полугруппы $\overline{\Pi}$, заданной соотношениями (14), причем $|A_i| = |\overline{A_i}|$, $|B_i| = |\overline{B_i}|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть система (13) не имеет левых циклов, а M есть алфавит полугруппы Π . Рассмотрим левый граф Γ системы (13). Буквы, являющиеся начальными слов A_i или B_i , назовем *левыми*. Если буква из M не левая, то она является изолированной вершиной в Γ . В каждой связной компоненте Γ_j ($j = 1, 2, \dots, k$) графа Γ отметим по одной букве c_j . Для любого слова X в алфавите M через $\overline{X}$ обозначим результат замены в X всех вхождений отмеченных букв c_j буквой s_1 из первой компоненты. Так как Γ не содержит циклов, то полученная таким образом система соотношений (14) будет иметь левый граф $\overline{\Gamma}$ без циклов. Граф $\overline{\Gamma}$ состоит из одной компоненты и потому имеет $n + 1$ вершину.

Докажем, что проблема левой делимости в Π сводится к той же проблеме для $\overline{\Pi}$. Как было отмечено выше, достаточно указать алгоритм, распознающий делимость слева в Π данного слова X на любую букву $b \in M$.

Если первая буква данного слова X и буква b лежат в различных компонентах графа Γ , то X не делится слева на b . Пусть эти буквы лежат в одной компоненте и не совпадают. Согласно пункту I описания алгоритма $\mathfrak{A}$ можем считать, что левое разложение слова X в полугруппе Π относительно буквы b имеет вид

$$R_l(X, b) = H_1 * H_2 * \dots * H_t * E * U,$$

где E — головка этого разложения. В этом случае первая буква слова $\overline{X}$ будет отлична от $\overline{b}$, так как буквы из одной компоненты не склеивались. Тогда левое разложение слова $\overline{X}$ в полугруппе $\overline{\Pi}$ будет иметь вид

$$R_l(\overline{X}, \overline{b}) = \overline{H_1} * \overline{H_2} * \dots * \overline{H_t} * \overline{E} * \overline{U}.$$

При этом один шаг применения алгоритма $\mathfrak{A}$ к паре (X, b) в Π дает

$$X \rightarrow H_1 H_2 \dots H_t S U = X_1,$$

где $E = S$ — соотношение системы (13), а один шаг применения $\mathfrak{A}$ к паре $(\overline{X}, \overline{b})$ в $\overline{\Pi}$ дает

$$\overline{X} \rightarrow \overline{H_1} \overline{H_2} \dots \overline{H_t} \overline{S} \overline{U}.$$

Таким образом, если алгоритм $\mathfrak{A}$ по паре (X, b) выдает в Π последовательность элементарных преобразований

$$X \rightarrow X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow \dots \rightarrow X_\lambda = bZ,$$

то в $\overline{\Pi}$ алгоритм $\mathfrak{A}$ выдает последовательность

$$\overline{X} \rightarrow \overline{X_1} \rightarrow \overline{X_2} \rightarrow \dots \rightarrow \overline{X_\lambda} = \overline{bZ}.$$

Поэтому если проблема распознавания делимости слева в $\overline{\Pi}$ разрешима, то мы имеем следующий алгоритм для распознавания делимости слева в Π слова X на букву b . Если $\overline{X}$ не делится слева на $\overline{b}$ в $\overline{\Pi}$, то тем более X не делится слева на b в Π . Если же $\overline{X}$ делится слева на $\overline{b}$ в $\overline{\Pi}$, то, применив алгоритм $\mathfrak{A}$ к паре $(\overline{X}, \overline{b})$, через некоторое число шагов λ получим слово, начинающееся с буквы $\overline{b}$. Тогда в силу сказанного выше

алгоритм $\mathfrak{A}$ для Π , начав работу с пары (X, b) , либо выдаст через λ шагов слово, начинающееся с b , либо остановится на слове, не начинающемся с b . В последнем случае слово X не делится слева на b в Π .

Допустим, что в $\bar{\Pi}$ разрешима проблема равенства. Пусть надо проверить, равны ли в Π два данных слова X и Y . Проведем индукцию по длине Y . Так как все определяющие слова полугруппы Π непусты, то можно считать, что $|Y| > 0$. Сначала проверим равенство $\bar{X} = \bar{Y}$ в $\bar{\Pi}$. Если $\bar{X} \neq \bar{Y}$ в $\bar{\Pi}$, то $X \neq Y$ в Π . Пусть $\bar{X} = \bar{Y}$ в $\bar{\Pi}$. В силу правила сокращения можно считать, что X и Y начинаются с разных левых букв a и b , принадлежащих одной компоненте Γ_i . Тогда начальные буквы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ слов $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ также различны. Применение алгоритма $\mathfrak{A}$ к паре $(\bar{X}, \bar{b})$ в $\bar{\Pi}$ приведет к ответу $\bar{b}\bar{Z}$ через некоторое число шагов λ . Тогда по доказанному выше, применяя алгоритм $\mathfrak{A}$ к паре (X, b) в Π , не позднее чем через λ шагов мы либо убедимся, что X не делится на b слева в Π , либо получим слово bZ . В последнем случае мы будем иметь в Π равенство $X = bZ$. Тогда, сократив на b слева, получим

$$X = Y \text{ в } \Pi \iff Z = Y_1 \text{ в } \Pi,$$

где $Y = bY_1$. Так как $|Y_1| < |Y|$, то по индуктивному предположению мы можем проверить равенство $Z = Y_1$ в Π . Теорема доказана.

В совместной работе [18] проблемы равенства и левой (правой) делимости в полугруппах с одним определяющим соотношением были сведены к аналогичной проблеме для случая, когда это определяющее соотношение несократимо хотя бы с одной стороны.

Пусть полугруппа Π задана одним соотношением $A = B$ в алфавите M из m букв. Пусть $E_1, E_2, \dots, E_n$ суть все слова длины k в алфавите M и $n = m^k$.

Рассмотрим новый алфавит $e_1, e_2, \dots, e_n$. Положим $\tau_k(E_i) \Rightarrow e_i$, где e_i — буква нового алфавита; $\tau_k(X) \Rightarrow e_i \tau_k(Y)$, если $X = aY$, где $a \in M$ и E_i — начало X длины k . Кроме того, для любого слова X длины $< k$ положим $\tau_k(X) \Rightarrow \Lambda$, где Λ — пустое слово.

Отметим следующее очевидное свойство кодировки τ_k . Пусть P, Q — произвольные слова в алфавите M . Если $|Q| \geq k - 1$, то $\tau_k(PQ) = \tau_k(PQ_1)\tau_k(Q)$, где Q_1 — начало слова Q длины $k - 1$. Аналогично, если $|P| \geq k - 1$, то $\tau_k(PQ) = \tau_k(P)\tau_k(P_1Q)$, где P_1 — конец длины $k - 1$ слова P .

ЛЕММА 4.5. Пусть полугруппа Π задана сократимым с обеих сторон соотношением $A = B$, C есть максимальное общее начало, а D — максимальный общий конец слов A и B . Тогда каждая из проблем равенства, левой и правой делимости для Π сводится к той же проблеме для полугруппы

$$\Pi_1 \Rightarrow \langle e_1, e_2, \dots, e_n \mid \tau_k(A) = \tau_k(B) \rangle,$$

где

$$k \Rightarrow 1 + \min(|C|, |D|).$$

Если $|C| = |D|$, то проблемы равенства, левой и правой делимости для Π разрешимы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, соотношение $\tau_k(A) = \tau_k(B)$ несократимо слева, если $|C| \leq |D|$, и оно несократимо справа, если $|C| \geq |D|$. Не ограничивая общности, можем считать, что $|B| \leq |A|$ и $|C| \leq |D|$. Если B является двусторонним началом A , то можно применить следствие 4.2.1.

Пусть B не является двусторонним началом A . Тогда $|C| < |D|$, $k = 1 + |C| \leq |D|$, поэтому слова $\tau_k(A)$ и $\tau_k(B)$ непусты. Из $k > |C|$ следует, что соотношение $\tau_k(A) = \tau_k(B)$ несократимо слева.

Для любых слов P, Q полугруппы Π имеем:

$$\begin{aligned}\tau_k(PAQ) &= \tau_k(PC)\tau_k(A)\tau_k(D_1Q), \\ \tau_k(PBQ) &= \tau_k(PC)\tau_k(B)\tau_k(D_1Q),\end{aligned}$$

где D_1 — конец слова D и $|D_1| = |C| = k - 1$. Отсюда легко следует, что для любых слов X и Y длины $\geq k$ выполнены эквивалентности

$$\begin{aligned}X = Y \text{ в } \Pi &\iff \tau_k(X) = \tau_k(Y) \text{ в } \Pi_1, \\ (X \text{ делится на } Y \text{ слева (справа) в } \Pi) &\iff (\tau_k(X) \text{ делится на } \tau_k(Y) \text{ слева (справа) в } \Pi_1).\end{aligned}$$

Если же длина одного из слов X и Y меньше k , то имеем

$$\begin{aligned}X = Y \text{ в } \Pi &\iff X = Y, \\ (X \text{ делится на } Y \text{ слева (справа) в } \Pi) &\iff (Y \text{ есть начало (конец) } X).\end{aligned}$$

Если $|C| = |D|$, то, очевидно, соотношение $\tau_k(A) = \tau_k(B)$ будет несократимо и справа. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 4.5. *Проблема равенства (левой или правой делимости) в произвольной полугруппе с одним определяющим соотношением сводится к той же проблеме для некоторой полугруппы, имеющей задание одного из следующих двух видов*

$$(15) \quad \langle a, b \mid aAa = bBa \rangle$$

или

$$(16) \quad \langle a, b \mid a = bBa \rangle,$$

где a, b — порождающие, а A и B — произвольные слова.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть полугруппа Π задана одним определяющим соотношением. В силу леммы 4.5 проблемы равенства (левой и правой делимости) в Π сводятся к тем же проблемам в некоторой полугруппе Π_1 с одним определяющим соотношением. Случай несократимого справа соотношения легко сводится к случаю соотношения, несократимого слева, так как мы можем переписать данное соотношение справа налево и в полученной полугруппе исследовать равенство или делимость слева для слов, симметричных данным. Кроме того, в силу теоремы 4.4 можно считать, что Π_1 имеет

только две образующие. Тогда, с точностью до переименования букв, полугруппа Π_1 имеет задание одного из двух видов (15) или (16).

Заметим, что теорема 4.5 впервые была доказана в 1978 году в работе [17]. Позже аналогичное утверждение было опубликовано без доказательства в работе [41].

В [77] было получено решение проблем равенства и делимости для полугрупп, заданных одним соотношением вида $a = A$, где A – слово в двубуквенном алфавите. Это решение основывалось на результате О. А. Саркисян [92] о разрешимости проблемы левой (правой) делимости для любой полугруппы, заданной системой определяющих соотношений без левых и правых циклов. Однако, как недавно было обнаружено, приведенное в [92] доказательство этого впечатляющего утверждения содержит существенный пробел и О. А. Саркисян в настоящее время не знает как восполнить этот пробел. Хотя у нас нет серьезных сомнений в истинности указанных утверждений Г. У. Оганесяна и О. А. Саркисян, их пока следует считать недоказанными.

По той же причине теорему 3 из работы [18] следует считать доказанной в следующей ослабленной редакции.

ТЕОРЕМА 4.6. *Пусть полугруппа Π задана определяющим соотношением $A = B$, где слово B гиперпросто и оно входит в слово A , но не является его концом. Тогда для Π разрешима проблема равенства.*

Здесь дополнительное условие, что B не является концом A , позволяет сохранить приведенное в [18] доказательство, убрав только ссылку на не доказанный еще результат об уравнениях вида $bAa = a$. В доказательстве этой теоремы существенно используется описанный в работе [14] алгоритм $\mathfrak{A}$ и следующая лемма, которая интересна сама по себе.

ЛЕММА 4.6. *Пусть полугруппа Π задана определяющим соотношением $aA_1 = bB_1$, где a и b – буквы и слово $B = bB_1$ гиперпросто. Если слово bF есть собственный конец слова B , то при любом V слово bFV не делится в Π на a слева.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим кратчайшую последовательность элементарных преобразований полугруппы Π вида

$$(17) \quad aZ \rightarrow \dots \rightarrow bFV,$$

где bF – собственный конец слова B . В этой последовательности выделим первое появление буквы b в начале преобразуемого слова:

$$(18) \quad aZ \rightarrow \dots \rightarrow aA_1Z_1 \rightarrow bB_1Z_1 \rightarrow \dots \rightarrow bFV.$$

В силу гиперпростоты B максимальное общее начало слов B и bF короче bF , т.е. $F = F_1F_2$, $B_1 = F_1B_2$, где F_2 – непустой конец bB_1 , причем слова B_2 и F_2 начинаются с разных букв, т.е. одно из них начинается с b , а другое с a . Сократив конец последовательности (17) слева на слово bF_1 , получим

$$B_2Z_2 \rightarrow \dots \rightarrow F_2V.$$

Но это противоречит условию минимальности последовательности (17).

Приведем еще два результата о разрешимости проблемы равенства для полугрупп, заданных одним определяющим соотношением $A = B$, где слово B гиперпросто и не входит в A . Они также доказаны с использованием алгоритма $\mathfrak{A}$.

Следующая теорема доказана в работе [15].

ТЕОРЕМА 4.7. *Проблемы равенства и левой делимости разрешимы для полугрупп, заданных одним определяющим соотношением вида $aA = bB$, где bB гиперпросто, не входит в aA и удовлетворяет одному из условий*

- 1) *никакое собственное начало слова bB не является концом aA ,*
- 2) *никакой собственный конец слова bB не является началом aA .*

ТЕОРЕМА 4.8 [109]. *Пусть полугруппа Π задана одним определяющим соотношением $A = B$, где слово B гиперпросто и не входит в A . Если при этом выполнено неравенство $|A| \geq |B|^2$, то в Π разрешима проблема равенства.*

Следующая теорема является усилением теоремы 4.7 и может быть доказана аналогично с использованием леммы 4.6.

ТЕОРЕМА 4.9. *Используя алгоритм $\mathfrak{A}$, можно решить проблему левой делимости (а значит, и проблему равенства) для полугруппы*

$$\Pi = \langle a, b, \dots \mid aA = bB \rangle,$$

где bB гиперпросто и не входит ни в какое произведение вида $A_1 A_2 \dots A_k$, где все A_i суть концы слова aA .

5. Группы с условием малого сокращения

В работе [31] М. Дэн предложил простой алгоритм решения проблемы равенства слов для фундаментальных групп замкнутых ориентируемых двумерных многообразий. Метод М. Дэна позже был распространен на широкие классы групп, удовлетворяющие условию *малого сокращения* определяющих слов. Пусть конечно определенная группа G задана образующими и определяющими соотношениями:

$$(1) \quad \langle \langle a_1, \dots, a_n \mid R_i = 1, \dots, R_m = 1 \rangle \rangle.$$

Очевидно, мы можем считать, что все определяющие слова R_i циклически несократимы. Через $\mathfrak{R}_G$ обозначим множество всех определяющих слов в (1). Представление (1) называется *симметризованным*, если множество $\mathfrak{R}_G$ замкнуто относительно циклических сдвигов и перехода к обратному слову.

Пусть задание (1) симметризованное. Слово K называется *куском относительно множества $\mathfrak{R}_G$* , если в $\mathfrak{R}_G$ найдутся такие различные определяющие слова R_i и R_j , что K есть их максимальное общее начало. Заметим, что при этом в результате сокращения подслова K в слове $R_i^{-1} R_j$ получится непустое несократимое слово.

УСЛОВИЕ $C(\lambda)$. Говорят, что симметризованное множество определяющих слов $\mathfrak{R}_G$ удовлетворяет *условию малого сокращения $C(\lambda)$* (соответственно, $C'(\lambda)$), где λ – положительное действительное число, если для любого куска K относительно множества $\mathfrak{R}_G$ и для любого определяющего слова R_i из этого множества равенство $R_i = KA$ влечет неравенство $|K| < \lambda |R_i|$ (соответственно, $|K| \leq \lambda |R_i|$).

УСЛОВИЕ C_m . Мы говорим, что множество определяющих слов $\mathfrak{R}$ удовлетворяет *условию малого сокращения* C_m , если оно симметризовано и никакое слово из $\mathfrak{R}$ не является произведением менее чем m кусков относительно $\mathfrak{R}$.

Очевидно, условие $C(1/m)$ влечет условие C_{m+1} .

Существенный вклад в развитие алгебраической теории малых сокращений внес В. А. Тартаковский [98], [99]. Он решил проблему равенства слов для класса всех конечно определенных групп, удовлетворяющих условию $C(1/6)$. После него многие алгебраисты внесли свой вклад в развитие теории малых сокращений (Дж. Бриттон, М. Гриндлингер, Р. Линдон, Г. С. Маканин и др.). М. Д. Гриндлингер [35], [36] показал, что к группам из этого класса применим *алгоритм М. Дэна*. Это означает, что любое слово, равное единице в группе из класса $C(1/6)$, содержит более половины циклической перестановки некоторого определяющего слова или ему обратного. Заменяя в данном слове такое подслово E определяющего слова EQ равным ему дополнением Q^{-1} , мы получаем более короткое слово, равное исходному слову. В последовательном выполнении таких замен состоит алгоритм Дэна. М. Гриндлингер также доказал разрешимость проблемы сопряженности для того же класса групп. В работе [53] Г. С. Маканин решил проблему равенства для групп с мерой наложения $< 2/11$. Наконец, Р. Линдон [46], используя так называемые диаграммы ван Кампена, доказал разрешимость проблемы равенства для класса всех конечно определенных групп, удовлетворяющих условию $C(1/5)$. Впоследствии выяснилось, что этот результат Р. Линдона уже не улучшаем (см. [34]). Заметим, что для групп из классов $C(2/11)$ и $C(1/5)$ алгоритм М. Дэна уже не работает. Соответствующий контрпример с мерой наложения $1/6$ был построен М. Гриндлингером в работе [35]. Он заметил, что в группе, заданной одним определяющим соотношением $abca^{-1}b^{-1}c^{-1} = 1$, слово

$$(2) \quad W = b^{-1}c^{-1}ac^{-1}ababcbca^{-1}ca^{-1}b^{-1}a^{-1}b^{-1}c^{-1}$$

равно 1, хотя оно не содержит более половины ни одной циклической перестановки определяющего слова $abca^{-1}b^{-1}c^{-1}$ или ему обратного.

Следующая лемма хорошо известна и легко доказывается индукцией по числу элементарных преобразований, переводящих слово W в 1.

ЛЕММА 5.1. *Если W – слово в алфавите группы G с заданием (1), то $W = 1$ в G тогда и только тогда, когда в свободной группе при некоторых U_i выполняется равенство*

$$W \equiv \prod_{i=1}^k U_i R_{j_i}^{\varepsilon_i} U_i^{-1},$$

где $\varepsilon_i = \pm 1$.

С каждым равенством $W = 1$ в группе G связывается некоторая диаграмма ван Кампена, которая в определенном смысле заменяет последовательность элементарных преобразований $W \rightarrow \dots \rightarrow 1$ рассматриваемой группы. Эти диаграммы были впервые введены в работе [42]. В 1966 году Р. Линдон использовал их в своем доказательстве разрешимости проблемы равенства слов для класса всех конечно определенных групп, удовлетворяющих условию $C(1/5)$ или C_6 .

Картой M будем называть произвольный конечный набор попарно непересекающихся вершин, ребер и областей евклидовой плоскости, удовлетворяющий следующим условиям:

(i) Каждое ребро e из M гомеоморфно интервалу и имеет в M две *концевые вершины* a и b , которые могут совпадать. *Замыканием* $\bar{e}$ ребра e называется объединение $e \cup \{a, b\}$.

(ii) Каждая область D из M имеет связную топологическую границу $\partial(D)$, которая есть объединение замкнутых ребер

$$\partial(D) = \bar{e}_1 \cup \dots \cup \bar{e}_k.$$

Теоретико-множественное объединение вершин, ребер и областей данной карты M будем обозначать через $\overline{M}$. Границу $\partial(\overline{M})$ множества $\overline{M}$ на плоскости E^2 будем называть также *границей* карты M . Ориентация на карте задается путем фиксирования ориентации на каждом ее ребре; при этом если e — ориентированное ребро, идущее от его вершины a к вершине b , то вершина a называется *начальной вершиной* этого ребра, а вершина b — *конечной*. То же самое ребро e , ориентированное противоположным образом, называется *обратным* к ребру e и обозначается через e^{-1} . Оно идет от вершины b к вершине a .

Путем в карте M называется произвольная последовательность L ее ориентированных замкнутых ребер $e_1, \dots, e_n$ такая, что при любом $1 \leq i \leq n-1$ начальной вершиной ребра e_{i+1} является конечная вершина ребра e_i . *Началом* пути L называется начальная вершина ребра e_1 , а *концом* — конечная вершина ребра e_n . *Замкнутый путь*, или *цикл*, — это путь L , у которого начальная вершина ребра e_1 совпадает с конечной вершиной ребра e_n . Путь называется *приведенным*, если он не содержит пары рядом стоящих ребер вида e и e^{-1} . Приведенный путь $e_1, \dots, e_n$ называется *простым*, если он не имеет самопересечений, т.е. если при всех $i \neq j$ начальные точки ребер e_i и e_j различны.

Граничным циклом области D называется любой цикл минимальной длины, включающий в себя все ребра из границы $\partial(D)$ этой области, в котором все ребра ориентированы в соответствии с данной ориентацией области D . Если множество $\overline{M}$ связно и односвязно, то *граничным циклом* карты M называется цикл L минимальной длины, содержащий все ребра из границы $\partial(\overline{M})$ и удовлетворяющий условию: любые два последовательных ребра e_i и e_{i+1} цикла L с общей вершиной v являются соседними в циклическом упорядочении всех ребер карты M при вершине v .

Диаграммой над свободной группой F называется ориентированная карта M вместе с функцией φ , сопоставляющей каждому ориентированному ребру e из карты M метку в виде слова в алфавите группы F таким образом, что $\varphi(e^{-1}) = (\varphi(e))^{-1}$.

Если $L = e_1 \dots e_k$ — произвольный путь в карте M , то полагаем

$$\varphi(L) = \varphi(e_1) \dots \varphi(e_k).$$

Меткой области D из карты M называется метка $\varphi(L)$ любого ее граничного цикла L . Заметим, что метка области определена неоднозначно и зависит как от выбора ориентации области, так и от выбора начала ее граничного цикла.

ЛЕММА 5.2. Пусть группа G имеет представление (1). Для произвольной конечной последовательности $W_1, \dots, W_k$ непустых несократимых слов свободной группы F существует диаграмма $M(W_1, \dots, W_k)$, удовлетворяющая следующим условиям:

(i) Если e — ребро из M , то $\varphi(e)$ есть непустое слово в алфавит группы F .

(ii) Карта $\overline{M}$ связна и односвязна с некоторой выделенной вершиной O на границе $\partial(\overline{M})$. Существует граничный цикл $e_1 \dots e_k$ карты M , начинающийся в вершине O и такой, что произведение $\varphi(e_1) \dots \varphi(e_k)$ несократимо и

$$\varphi(e_1) \dots \varphi(e_k) = W_1 \dots W_k \text{ в свободной группе.}$$

(iii) Если $e_1 \dots e_p$ – граничный цикл произвольной области E карты M , то произведение $\varphi(e_1) \dots \varphi(e_p)$ графически совпадает с некоторой перестановкой результата циклического сокращения одного из слов W_i .

Такую диаграмму $M(W_1, \dots, W_k)$ будем называть *диаграммой последовательности* $W_1, \dots, W_k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство проведем индукцией по k . Каждое несократимое слово W_i однозначно представим в виде $U_i R_i U_i^{-1}$, где слово R_i циклически несократимо.

Пусть $k = 1$. Выберем некоторую вершину v и при ней простой цикл L длины $|R_1|$, ребра которого пометим последовательно буквами слова R_1 . Если слово U_1 пусто, то искомая карта M построена. В противном случае выберем некоторую вершину O вне петли e и простой путь из этой вершины в вершину v длины $|U_1|$, ребра которого пометим буквами слова U_1 .

При $k > 1$ строим диаграммы $M_1, \dots, M_k$ указанным образом для всех слов $W_1, \dots, W_k$ и расположим их циклически в указанном порядке вокруг базисной точки O . Полученная диаграмма удовлетворяет всем условиям (i)–(iii), не считая отмеченного в (ii) условия несократимости метки граничного цикла. Это условие также будет выполнено, если произведение $(U_1 R_1 U_1^{-1}) \dots (U_k R_k U_k^{-1})$ было несократимо. В противном случае проведем индукцию по числу ребер в граничном цикле рассматриваемой карты путем отождествления соседних ребер, имеющих взаимно обратные метки. Очевидно, при этом остальные свойства построенной карты не будут нарушены. Лемма 5.2 доказана.

ЛЕММА 5.3. Если $W = \varphi(L)$ есть метка граничного цикла L некоторой связной односвязной диаграммы M над свободной группой F , то можно указать такую нумерацию $D_1, \dots, D_m$ всех областей карты M и выбрать такие слова $U_1, \dots, U_m$, длины которых не больше суммы длин меток всех ориентированных ребер карты M , что в группе F выполняется равенство

$$W = (U_1 R_1 U_1^{-1}) \dots (U_m R_m U_m^{-1}),$$

где R_i суть некоторые метки областей D_i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция по числу m областей карты M . Если карта не содержит областей, то L дерево и $\varphi(L)$ равно 1 в F .

Предположив, что доказываемое утверждение справедливо для карт с m областями, докажем его для карты M с $m + 1$ областью.

Пусть D – некоторая область карты M , имеющая общее ребро e с ее границей. Обозначим через M' карту, полученную из M удалением ребра e . Ясно, что полученная карта M' связна и односвязна и все области карты M , кроме области D , остаются областями карты M' . Пусть $L = L_1 e L_2$ и $e L_3$ – граничный цикл области D . Тогда

$L' = L_1 L_3^{-1} L_2$ – соответствующий граничный цикл карты M' . Пусть U – метка ребра e и $\varphi(L_i) = X_i$ при $i = 1, 2, 3$. Тогда $W = \varphi(L) = X_1 U X_2$ и $\varphi(L') = X_1 X_3^{-1} X_2$.

По индуктивному предположению можно указать такую нумерацию $D_1, \dots, D_m$ областей карты M' и выбрать такие слова $U_1, \dots, U_m$, длины которых не больше суммы длин меток всех ориентированных ребер карты M' , что при этом в группе F выполняется равенство

$$X_1 X_3^{-1} X_2 = (U_1 R_1 U_1^{-1}) \dots (U_m R_m U_m^{-1}),$$

где R_i суть некоторые метки областей D_i .

Так как в свободной группе выполнено равенство

$$W = X_1 U X_2 = (X_1 X_3^{-1} X_2) (X_2^{-1} X_3 U X_2),$$

то для завершения доказательства достаточно положить $D_{m+1} \Leftarrow D$, $R_{m+1} \Leftarrow X_3 U$ и $U_{m+1} \Leftarrow X_2^{-1}$. Очевидно, длины всех U_i не превосходят суммы длин меток всех ребер карты M . Лемма 5.3 доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathfrak{R}$ – симметризованное множество слов свободной группы F . Диаграмма M называется $\mathfrak{R}$ -диаграммой, если для любого граничного цикла L любой области D диаграммы M $\varphi(L) \in \mathfrak{R}$.

Из лемм 5.2 и 5.3 непосредственно следует

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть N – нормальная подгруппа, порожденная симметризованным множеством слов $\mathfrak{R}$ свободной группы F , а W – произвольное несократимое непустое слово. Тогда $W \in N$ если и только если существует такая связная односвязная $\mathfrak{R}$ -диаграмма M , что W есть метка границы карты M .

Пусть $\mathfrak{R}$ – симметризованное множество слов свободной группы F . Последовательность слов $W_1, \dots, W_m$ называется $\mathfrak{R}$ -последовательностью, если все слова W_i сопряжены некоторым словам из $\mathfrak{R}$. $\mathfrak{R}$ -последовательность $W_1, \dots, W_m$ называется минимальной, если в свободной группе F слово $W_1 \dots W_m$ не может быть записано в виде произведения менее чем m слов, сопряженных словам из $\mathfrak{R}$.

Диаграмма M над свободной группой F называется приведенной, если для любых двух ее областей D_1 и D_2 , имеющих общее ребро e и граничные циклы eL_1 и L_2e^{-1} , метки $\varphi(L_1)$ и $\varphi(L_2)$ не являются взаимно обратными словами.

ЛЕММА 5.4. Диаграмма M любой минимальной $\mathfrak{R}$ -последовательности является приведенной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что некоторая минимальная $\mathfrak{R}$ -последовательность $W_1, \dots, W_m$ имеет неприведенную диаграмму M с граничной меткой $W = W_1 \dots W_m$. Пусть D_1 и D_2 – области с общим ребром e , метки которых взаимно обратны. Очевидно, эти области D_1 и D_2 не могут совпадать. Объединим области D_1 и D_2 в одну область D , вычеркнув ребро e и сохранив метки всех ребер. Тогда граничная метка объединенной области D будет равна 1 в свободной группе. Полученная в результате указанного преобразования диаграмма M' будет связной и односвязной, причем диаграмма M' имеет ту же самую граничную метку W . Так как диаграмма M' имеет $m - 1$ область, то по лемме 5.3 W равно в свободной группе

произведению $m - 1$ слов, каждое из которых сопряжено метке некоторой области из M' . Все области из M' , кроме области D , помечены элементами из $\mathfrak{A}$, а область D помечена словом, равным 1. В итоге получаем представление W в виде произведения $m - 2$ слов, каждое из которых сопряжено некоторому слову из $\mathfrak{A}$, что противоречит предположению о минимальности $\mathfrak{A}$ -последовательности $W_1, \dots, W_m$. Лемма 5.4 доказана.

Вершины и ребра карты M называются *граничными*, если они лежат в $\partial(M)$. Область D карты M называется *граничной областью*, если ее граница имеет непустое пересечение с $\partial(M)$. В частности, это пересечение может состоять из одних вершин. Вершина, ребро или область карты M , не являющиеся граничными, будем называть *внутренними*.

Для произвольной вершины v карты M через $d(v)$ обозначим ее *степень*, т.е. число ребер с вершиной v . При этом если обе концевые вершины ребра e совпадают с вершиной v , то при подсчете степени $d(v)$ ребро e считается дважды. Без ограничения общности можно считать, что рассматриваемые диаграммы не имеют внутренних вершин степени 1.

Для произвольной области D карты M через $d(D)$ обозначается ее *степень*, т.е. число ребер в граничном цикле области D , а через $i(D)$ — число тех ребер в граничном цикле области D , которые не лежат на границе карты M .

Можно предполагать, что в рассматриваемых диаграммах степень любой внутренней вершины ≥ 3 , так как метки двух внутренних ребер, имеющих общую вершину степени 2, можно объединить в одну, удалив общую вершину этих ребер.

ЛЕММА 5.5. Пусть M — приведенная $\mathfrak{A}$ -диаграмма для симметризованного множества $\mathfrak{A}$ слов свободной группы F . Если для множества слов $\mathfrak{A}$ выполняется условие малого сокращения C_6 , то каждая область D , граница которой не содержит граничных ребер карты M , имеет степень $d(D) \geq 6$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть e — внутреннее ребро карты M . Покажем, что его метка W является *куском*.

Внутреннее ребро e карты M есть часть общей границы двух областей D_1 и D_2 , которые имеют такие метки R_1 и R_2 из множества $\mathfrak{A}$, что $R_1 = WA$ и $R_2 = W^{-1}B$ при некоторых A и B . Так как множество $\mathfrak{A}$ симметризовано и диаграмма M является приведенной, то $A \neq B^{-1}$, т.е. W является *куском*. Поэтому условие C_6 дает искомое неравенство $d(D) \geq 6$. Лемма 5.5 доказана.

Пусть M — приведенная $\mathfrak{A}$ -диаграмма для симметризованного множества $\mathfrak{A}$ слов свободной группы F , удовлетворяющего условию малого сокращения C_6 . Тогда каждая ее *внутренняя* область D имеет степень $d(D) \geq 6$. По предположению в рассматриваемых картах степень любой внутренней вершины ≥ 3 , поэтому карта M называется $(3, 6)$ -картой.

Карта, все внутренние вершины которой имеют степень не менее p , а все внутренние области имеют степень не менее q , называется (p, q) -картой. Карта, все внутренние вершины которой имеют степень не менее p , а все области имеют степень не менее q , называется $[p, q]$ -картой.

Для каждой односвязной (p, q) -карты M естественным образом строится *двойственная* ей односвязная $[q, p]$ -карта M^* .

Областям D_j карты M взаимно однозначно соответствуют вершины v_j^* карты M^* , причем $d(v_j^*) = i(D_j)$. Граничным областям карты M соответствуют граничные вершины карты M^* . Внутренним ребрам карты M взаимно однозначно соответствуют ребра e^* карты M^* . Области D^* карты M^* взаимно однозначно соответствуют внутренним вершинам v карты M , причем $d(D^*) = d(v)$.

Для построения карты M^* в каждой области D_i карты M выбирается точка v_i^* , которая будет вершиной карты M^* . Если две различные области D_1 и D_2 имеют общее ребро e , то оно внутреннее. Тогда включаем в карту M^* ребро e^* , идущее из вершины v_1^* в вершину v_2^* и пересекающее ребро e , но не пересекающее другие ребра карты M и уже построенные ребра карты M^* . Если область D_i лежит по обе стороны от некоторого ребра e карты M , то в M^* строим петлю с вершиной v_i^* , пересекающую ребро e , но не пересекающую другие ребра. Построенные таким образом вершины и ребра образуют скелетный граф Γ^* искомой карты M^* . Области карты M^* определим как области, ограниченные ребрами графа Γ^* . Каждая область D^* содержит внутреннюю вершину карты M , из которой выходят все ребра карты M , пересекающие граничные ребра области D^* .

Если исходная карта M была односвязной (p, q) -картой, то построенная таким образом двойственная карта M^* будет односвязной $[q, p]$ -картой.

Знак Σ ($\Sigma^\cdot$, Σ°) будем использовать для обозначения суммирования *по всем* вершинам или областям (соответственно, *по всем граничным* вершинам или областям, *по всем внутренним* вершинам или областям).

Для произвольной карты M через V_M обозначим число ее вершин, через E_M — число ее *неориентированных* ребер, а через F_M — число ее областей. Через $V_M^\cdot$ будем обозначать число *граничных* вершин карты M , через $E_M^\cdot$ — число ее *граничных* ребер с учетом кратности, а через $F_M^\cdot$ — число ее *граничных* областей.

ТЕОРЕМА 5.2. *Для произвольной односвязной карты M выполняются равенства*

$$(3) \quad 6Q_M = \Sigma^\cdot [6 - d(v)] + \Sigma^\circ [6 - d(v)] + 2\Sigma [3 - d(D)] - 2E_M^\cdot$$

и

$$(4) \quad 6Q_M = \Sigma^\cdot [4 - d(v)] + \Sigma^\circ [6 - d(v)] + 2\Sigma [3 - d(D)] + 2(V_M^\cdot - E_M^\cdot),$$

где Q_M — число связных компонент карты M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через Γ граф, образованный вершинами и ребрами карты M . К каждой связной компоненте Γ_i графа Γ применим известную формулу Эйлера

$$(5) \quad V_i - E_i + F_i = 1,$$

где V_i — число вершин, E_i — число ребер этого графа, а F_i — число областей, на которые граф Γ_i разбивает плоскость; при этом неограниченная область не учитывается. Просуммировав равенства (5) по всем связным компонентам графа Γ , получим равенство

$$(6) \quad V_M - E_M + F_M = Q_M.$$

Очевидно, кроме того, выполнены равенства

$$(7) \quad \Sigma d(v) = 2E_M,$$

$$(8) \quad 2E_M = \Sigma d(D) + E_M^*.$$

Из предыдущих равенств получаем

$$(9) \quad 6V_M - 6E_M + 6F_M = 6Q_M,$$

$$(10) \quad 6E_M = \Sigma d(v) + 2\Sigma d(D) + 2E_M^*.$$

Последние равенства дают

$$(11) \quad 6Q_M = 6V_M + 6F_M - \Sigma d(v) - 2\Sigma d(D) - 2E_M^*,$$

откуда, объединив соответствующие слагаемые, получаем

$$(12) \quad 6Q_M = \Sigma[6 - d(v)] + 2\Sigma[3 - d(D)] - 2E_M^*.$$

Разбив суммирование по всем вершинам в (12) на два суммирования – по внутренним вершинам и по внешним, получим искомую формулу (3), а для получения формулы (4) остается расцепить первую сумму в формуле (3) на две суммы $\Sigma^*[4 - d(v)]$ и $\Sigma^*2 = 2V_M^*$. Теорема 5.2 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 5.1. *Если M – односвязная $(3, 6)$ -карта, содержащая не менее двух областей, то*

$$(13) \quad \Sigma_M^*[4 - i(D)] \geq 6.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим *действительную* карте M карту M^* , которая, как было указано выше, является односвязной $[6, 3]$ -картой, содержащей не менее двух вершин, причем для каждой вершины v^* карты M^* имеем $d(v^*) = i(D)$, где D – область, соответствующая этой вершине. Поэтому для доказательства неравенства (13) нам достаточно для односвязной $[6, 3]$ -карты M^* , содержащей не менее двух вершин, доказать неравенство

$$(14) \quad \Sigma_M^*[4 - d(v)] \geq 6.$$

Если все вершины карты M^* изолированы, то неравенство (14) следует из условия, что число вершин не меньше двух. В случае, когда карта M^* не имеет изолированных вершин, неравенство (14) следует из формулы (4), так как в ее правой части все слагаемые, кроме первого, неположительны. А общий случай легко сводится к двум указанным переходом к подкарте карты M^* , получающейся вычеркиванием всех изолированных вершин.

ЛЕММА 5.6. Если M – односвязная $[6, 3]$ -карта, то

$$\frac{1}{2} \Sigma_M[6 - d(v)] \geq E_M$$

и

$$(15) \quad \frac{1}{2} \Sigma_M[6 - d(v)] \geq V_M.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое неравенство следует из формулы (3).

Если в карте M нет изолированных вершин, то второе неравенство вытекает из первого, так как в таком случае имеем $V_M \leq E_M$. В противном случае обозначим через M_0 подкарту карты M , образованную изолированными вершинами. Для M_0 неравенство (15) очевидно. В общем случае (15) вытекает из соответствующих неравенств для карты M_0 и подкарты M_1 карты M , полученной удалением всех изолированных вершин, в силу равенства $V_M = V_{M_1} + V_{M_0}$.

ТЕОРЕМА 5.3. Для произвольной односвязной $(3, 6)$ -карты M выполняется неравенство

$$(16) \quad F_M \leq \frac{1}{12} (\Sigma_M[6 - i(D)])^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M – односвязная $(3, 6)$ -карта. Аналогично тому, как это мы делали выше, построим для M двойственную односвязную $[6, 3]$ -карту M^* и докажем для последней неравенство

$$(17) \quad V_{M^*} \leq \frac{1}{12} (\Sigma_{M^*}[6 - d(v)])^2,$$

из которого искомое неравенство (16) для M вытекает непосредственно.

Для краткости будем опускать верхний индекс $*$ у M^* и обозначать соответствующую сумму $\Sigma_M[6 - d(v)]$ через $\sigma(M)$. Тогда искомое неравенство (17) запишется в виде

$$(18) \quad V_M \leq \frac{1}{12} (\sigma(M))^2.$$

Формула (3) дает нам для любой $[6, 3]$ -карты неравенство

$$(19) \quad \sigma(M) = \Sigma_M[6 - d(v)] \geq 6.$$

Поэтому добавление изолированной вершины в карту усиливает неравенство (18). Следовательно, можем считать, что в M нет изолированных вершин.

Если все вершины $[6, 3]$ -карты M являются граничными, то в силу (15) имеем

$$V_M = V_M \leq \frac{1}{2} \Sigma_M[6 - d(v)],$$

откуда в силу неравенства (19) следует неравенство (18) в случае отсутствия внутренних вершин.

В случае наличия внутренних вершин сначала удалим из M все компоненты, являющиеся деревьями, и все деревья, прикрепленные к карте M . Для этого достаточно убедиться, что добавление в $[6, 3]$ -карту одной новой граничной вершины степени 1 также усиливает неравенство (18).

В самом деле, пусть карта M' получается из карты M удалением одной граничной вершины v степени 1 и ребра e , имеющего v своей вершиной. Вклад вершины v в сумму $\sigma(M)$ равен 5. В результате удаления вершины v степень $d(u)$ другой вершины u ребра e уменьшится на 1, но она остается граничной вершиной для M' . Так что M' есть односвязная $[6, 3]$ -карта. Следовательно, удаление одной граничной вершины v степени 1 приводит к новой односвязной $[6, 3]$ -карте, уменьшая значение $\sigma(M)$ на 4. Поэтому в силу (19) при переходе от M' к M неравенство (18) усилится. Нам остается повторить удаление вершин степени 1 до тех пор, пока не исчезнут все деревья в M .

Если исходная $[6, 3]$ -карта M имела внутренние вершины, то полученная карта M' без изолированных вершин и граничных вершин степени 1 будет непустой. Без ограничения общности можно считать, что такой уже была исходная $[6, 3]$ -карта M .

Доказательство неравенства (18) для таких $[6, 3]$ -карт проведем индукцией по числу вершин.

Обозначим через M_1 карту, получающуюся из карты M удалением всех ее граничных вершин, граничных ребер и граничных областей. Тогда $V_M = V_{M_1} + V_M^*$.

Если $v \in M_1$, то $d_M(v) \geq 6$, так как v — внутренняя вершина карты M . Степень $d_M(u)$ каждой граничной вершины u карты M_1 складывается из ребер, входящих в степень $d_{M_1}(u)$ в карте M_1 , плюс число выходящих из нее ребер, второй конец которых попал в $\partial(M)$. Так как в карте M нет изолированных вершин и граничных вершин степени 1, то число ребер, оба конца которых попали в $\partial(M)$, не меньше чем V_M^* . Следовательно, справедливо неравенство

$$(20) \quad \Sigma_M d_M(v) - \Sigma_{M_1} [d_M(v) - d_{M_1}(v)] \geq 2V_M^*,$$

из которого в силу (14) следует

$$\begin{aligned} \sigma(M) - \sigma(M_1) &= 6V_M^* - \Sigma_M d_M(v) - \Sigma_{M_1} [6 - d_{M_1}(v)] \\ &\geq 6V_M^* - \Sigma_M d_M(v) - \Sigma_{M_1} [d(v) - d_1(v)] \\ &\geq 2\Sigma_M [4 - d(v)] \geq 12, \end{aligned}$$

т.е. имеем неравенство

$$(21) \quad \sigma(M) - \sigma(M_1) \geq 12.$$

Так как $V_M = V_{M_1} + V_M^*$ и в рассматриваемом случае карта M содержит внутреннюю вершину, то, используя индуктивное предположение (18) для карты M_1 вместе с соотношением (15) для M и неравенством (21), получим неравенства

$$\begin{aligned} V_M &\leq \frac{1}{12} \sigma(M_1)^2 + \frac{1}{2} \sigma(M) \leq \frac{1}{12} (\sigma(M) - 12)^2 + \frac{1}{2} \sigma(M) \\ &= \frac{1}{12} [\sigma(M)^2 - 18\sigma(M) + 144]. \end{aligned}$$

Из (19) для M_1 и (21) следует $\sigma(M) \geq 12$. Поэтому имеем

$$V_M < \frac{1}{12} \sigma(M)^2,$$

т.е. искомое неравенство (18) доказано.

ТЕОРЕМА 5.4 (Р. Линдон). *Проблема равенства разрешима в классе всех конечно определенных групп, которые имеют задание, удовлетворяющее условию малого сокращения C_6 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть группа G задана симметризованным множеством определяющих слов $\mathfrak{R}$ в алфавите свободной группы F . Допустим, что слово W равно 1 в группе G . Тогда диаграмма M минимальной $\mathfrak{R}$ -последовательности для W будет $(3, 6)$ -картой. По теореме 5.3 выполняется неравенство

$$(22) \quad F_M \leq \frac{1}{12}(\Sigma_M[6 - i(D)])^2.$$

Каждая область D , все граничные ребра которой внутренние в M , по лемме 5.5 имеет степень $i(D) = d(D) \geq 6$. Так как при этом граничные ребра карты M могут содержать не более чем $|W|$ областей, то из неравенства (13) получаем

$$0 < \Sigma_M[6 - i(D)] \leq 6|W|,$$

откуда в силу (22) следует $F_M \leq 3|W|^2$.

Пусть

$$L \Leftarrow \max_{R_i \in \mathfrak{R}} |R_i|.$$

По лемме 5.3 найдутся такие слова R_i из множества $\mathfrak{R}$ ($i = 1, \dots, m$), где $m \leq 3|W|^2$, и такие слова U_i длины, не превосходящей числа $3|W|^2L + |W|$, что

$$(23) \quad W \equiv (U_1 R_1 U_1^{-1}) \dots (U_m R_m U_m^{-1}).$$

Таким образом, алгоритм распознавания равенства $W = 1$ в G сводится к проверке равенства $W = X$ в свободной группе для слов X указанного в (23) вида, длина которых ограничена сверху числом $6|W|^2(3|W|^2L + |W| + L)$.

Из доказанной теоремы непосредственно следует

СЛЕДСТВИЕ 5.4.1. *Проблема равенства разрешима в классе всех конечно определенных групп, которые имеют задание, удовлетворяющее условию малого сокращения $C(1/5)$.*

Примеры групп с неразрешимой проблемой равенства возникают уже в классе $C'(1/5)$, отличающемся от $C(1/5)$ заменой в определении строгого неравенства на нестрогое. Это следует из приводимого ниже любопытного утверждения А. И. Гольберга [34] и теоремы 6.5.

ЛЕММА 5.7. *Каждая конечно определенная группа может быть задана с помощью системы определяющих соотношений, удовлетворяющей условию $C'(1/5)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем, что тривиальная группа имеет следующее задание в 4-буквенном алфавите:

$$H = \langle \langle a, b, c, d \mid a^6 = 1, b^5 = 1, c^5 = 1, b^{-1}abcd = 1, d^{-1}bd^2c = 1, caca^{-1}b^{-1} = 1 \rangle \rangle.$$

В самом деле, из равенств $d^{-1}bd^2c = 1$ и $b^{-1}abcd = 1$ следует сопряженность элементов a и b , что в силу равенств $a^6 = 1, b^5 = 1$ дает $a = b = 1$. Далее, используя равенства $caca^{-1}b^{-1} = 1$ и $c^5 = 1$, получаем $c = 1$, а значит, и $d = 1$.

Пусть конечно определенная группа G имеет задание

$$\langle \langle a_1, \dots, a_n \mid R_1 = 1, \dots, R_m = 1 \rangle \rangle.$$

Добавим к алфавиту группы G новые буквы $x_1, \dots, x_{4m}$, где $4m \geq \sum_{i=1}^m |R_i|$. Множество определяющих соотношений искомого задания группы G состоит из m шестерок соотношений, копирующих задание группы H в 4-буквенном алфавите $x_{4i+1}, x_{4i+2}, x_{4i+3}, x_{4i+4}$, к которым добавляется по одному соотношению вида $\overline{R_i} = 1$ для каждого соотношения $R_i = 1$ группы G . Именно, если $R_j = a_{i_1}a_{i_2} \dots a_{i_{t_j}} = 1$, то в качестве искомого слова $\overline{R_j}$ берем слово

$$(24) \quad a_{i_1}y_1a_{i_2}y_2 \dots a_{i_{t_j}}y_{t_j},$$

где буквы y_s подбираются из нашего запаса x -букв так, чтобы каждая из них встречалась не более одного раза и только в одном из слов (24). Легко убедиться, что полученное задание группы G удовлетворяет условию $C'(1/5)$.

6. Неразрешимость проблемы равенства для групп

Сначала приведем предложенную П. С. Новиковым в работе [72] технику правильных систем проходных букв, на которой было основано его доказательство теоремы о неразрешимости проблемы равенства для конечно определенных групп. В случае, когда правильная система проходных букв состоит из одной буквы, получается понятие, которое за несколько лет до работы П. С. Новикова было введено в совместной работе трех авторов [40] и впоследствии получило название “HNN-расширение” (HNN-extension).

Пусть дана конечно определенная группа

$$G = \langle \langle a_1, \dots, a_n \mid R_1 = 1, \dots, R_m = 1 \rangle \rangle.$$

Добавим к алфавиту группы G новую букву t , а к ее определяющим соотношениям добавим конечное число соотношений вида

$$(1) \quad A_j t = t B_j \quad (j = 1, \dots, k),$$

где A_j, B_j – слова в алфавите группы G . Полученную группу обозначим через $G^{(t)}$.

Пусть коэффициенты $A_1, \dots, A_k$ и $B_1, \dots, B_k$ порождают в группе G подгруппы H_1 и H_2 . Буква t называется *правильной проходной буквой группы $G^{(t)}$ с базой G* (при этом группа $G^{(t)}$ называется HNN-расширением группы G), если отображение φ_t , заданное равенствами $\varphi_t(A_j) = B_j$ ($j = 1, \dots, k$), порождает изоморфное отображение

подгруппы H_1 на подгруппу H_2 . Очевидно, это отображение будет изоморфизмом в том и только том случае, если для любого слова $f(A_1, \dots, A_k)$, т.е. произведения, составленного из множителей вида $A_i^{\pm 1}$, имеем:

$$f(A_1, \dots, A_k) = 1 \text{ в группе } G \iff f(B_1, \dots, B_k) = 1 \text{ в группе } G.$$

Заметим, что если все соотношения (1) группы $G^{(t)}$ имеют вид $At = tA$, где t не входит в слова A , то буква t очевидным образом является правильной проходной буквой.

Произвольная *правильная система проходных букв* по П. С. Новикову получается простым объединением конечного числа правильных проходных букв с одной и той же базой G и объединением соответствующих определяющих соотношений вида (1).

Рассмотрим группу $G^{(t)}$, полученную из группы G добавлением правильной проходной буквы t . Буквы $t^{\pm 1}$ входят только в соотношения (1) и в тривиальные соотношения $tt^{-1} = 1$ и $t^{-1}t = 1$. Можно считать, что элементарные преобразования, выполняемые в группе $G^{(t)}$ на основе определяющих соотношений (1), имеют вид

$$(2) \quad P \underline{t} Q \rightarrow P A_j \underline{t} B_j^{-1} Q \quad \text{или} \quad P \underline{t} Q \rightarrow P A_j^{-1} \underline{t} B_j Q.$$

В преобразованиях вида (2) мы будем считать, что выделенная в левой части буква $\underline{t}$ не затрагивается и *переходит по индивидуальности* в букву $\underline{t}$, выделенную в правой части. Считая, что все вхождения букв t и t^{-1} в слова P и Q также сохраняют свою индивидуальность, мы распространим это отношение совпадения по индивидуальности вхождений проходной буквы t на любую последовательность элементарных преобразований. Заметим, что в произвольной последовательности элементарных преобразований каждое вхождение буквы $t^{\pm 1}$ в преобразуемое слово X_i совпадает по индивидуальности либо с некоторой буквой $t^{\pm 1}$, входящей в начальное слово рассматриваемой последовательности, либо с некоторой буквой $t^{\pm 1}$, вставленной в этой последовательности до момента появления слова X_i включительно.

Договоримся обозначать через u (или u с некоторым индексом) произвольное слово вида $f(A_1, \dots, A_k)$, а через v (или v с индексом) – соответствующее слово вида $v_j = f^{-1}(B_1, \dots, B_k)$, так что v_j^{-1} – это образ u_j при отображении φ_t . Очевидно, для любых слов u и v в алфавите группы G $\varphi_t(u) = v^{-1}$ тогда и только тогда, когда имеется последовательность элементарных преобразований

$$(3) \quad t \rightarrow \dots \rightarrow utv.$$

Последовательность элементарных преобразований (3) будем записывать в виде $t \rightarrow utv$ и называть *составным преобразованием для буквы t* . Аналогично имеем *составные преобразования для буквы t^{-1}* : $t^{-1} \rightarrow vt^{-1}u$.

Мы докажем, что если отображение φ_t является изоморфизмом, то группа $G^{(t)}$ есть расширение группы G . Именно поэтому используется термин HNN-расширение группы G .

Следующая лемма очевидна.

ЛЕММА 6.1. *Если в последовательности элементарных преобразований без вставок букв t*

$$(4) \quad X_1 t Y_1 \rightarrow X_2 t Y_2 \rightarrow \dots \rightarrow X_s t Y_s$$

все выделенные вхождения буквы t совпадают по индивидуальности, то можно указать такие слова u и v , что $\varphi_t(u) = v^{-1}$ (т.е. для них существует последовательность (3) из преобразований вида (2)), и последовательности без вставок буквы t :

$$X_1u \rightarrow \cdots \rightarrow X_s \quad \text{и} \quad vY_1 \rightarrow \cdots \rightarrow Y_s.$$

Аналогично для последовательности элементарных преобразований без вставок t

$$X_1t^{-1}Y_1 \rightarrow X_2t^{-1}Y_2 \rightarrow \cdots \rightarrow X_st^{-1}Y_s,$$

где все выделенные вхождения буквы t^{-1} совпадают по индивидуальности, можно указать такие слова u_1 и v_1 , что $\varphi_t(u_1) = v_1^{-1}$, и последовательности элементарных преобразований без вставок буквы t :

$$X_1v_1 \rightarrow \cdots \rightarrow X_s \quad \text{и} \quad u_1Y_1 \rightarrow \cdots \rightarrow Y_s.$$

ОСНОВНАЯ ЛЕММА. Пусть t – правильная проходная буква в группе $G^{(t)}$ и слово Y не входит буква $t^{\pm 1}$. Если $X = Y$ в группе $G^{(t)}$, то найдется последовательность элементарных преобразований

$$(5) \quad X = X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow \cdots \rightarrow X_s = Y,$$

не содержащая вставок буквы t .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства мы добавим к элементарным и составным преобразованиям (2) и (3) составные преобразования вида

$$Pt^{-1}Q \rightarrow Pvt^{-1}uQ,$$

где $\varphi_t(u) = v^{-1}$.

По условию имеем некоторую последовательность (5) элементарных преобразований. Наша задача исключить в ней вставки буквы t . Мы это сделаем индукцией по числу вставок буквы t в последовательности (5).

Выделим в последовательности (5) последнюю вставку буквы t . Без ограничения общности можно считать, что эта вставка левосторонняя, т.е. последовательность (5) имеет вид

$$(6) \quad X = X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow \cdots \rightarrow X_r = P_1Q_1 \rightarrow P_1\underline{t}\underline{t}^{-1}Q_1 = X_{r+1} \rightarrow \cdots \rightarrow X_s = Y.$$

Так как буквы $t^{\pm 1}$ в слово Y не входят, то вставленные буквы $\underline{t}$ и $\underline{t}^{-1}$ должны сократиться. Возможны три случая.

- 1) Вставленные буквы $\underline{t}$ и $\underline{t}^{-1}$ сокращаются одновременно.
- 2) Буква $\underline{t}$ сокращается раньше с некоторой буквой t^{-1} из слова P_1 .
- 3) Буква $\underline{t}^{-1}$ сокращается раньше с некоторой буквой t из слова Q_1 .

Рассмотрим случай 1). Выделим в последовательности (6) момент взаимного сокращения букв $\underline{t}$ и $\underline{t}^{-1}$:

$$(7) \quad X = X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow \cdots \rightarrow X_r = P_1Q_1 \rightarrow P_1\underline{t}\underline{t}^{-1}Q_1 = X_{r+1} \\ \rightarrow \cdots \rightarrow X_{r+h} = P_h\underline{t}\underline{t}^{-1}Q_h \rightarrow X_{r+h+1} = P_hQ_h \rightarrow \cdots \rightarrow X_s = Y.$$

В последовательности $X_{r+1} \rightarrow \dots \rightarrow X_{r+h}$ нет вставок буквы t и выделенная буква $\underline{t}$ сохраняет индивидуальность. В силу леммы 6.1 найдутся такие u_1 и v_1 , что $\varphi_t(u_1) = v_1^{-1}$ и имеются последовательности элементарных преобразований без вставок буквы t

$$(8) \quad P_1 u_1 \rightarrow \dots \rightarrow P_h$$

и

$$(9) \quad v_1 \underline{t}^{-1} Q_1 \rightarrow \dots \rightarrow \underline{t}^{-1} Q_h.$$

Так как выделенные в последовательности (9) буквы $\underline{t}^{-1}$ совпадают по индивидуальности, то по лемме 6.1 найдутся такие u_2 и v_2 , что $\varphi_t(u_2) = v_2^{-1}$ и имеются последовательности элементарных преобразований без вставок буквы t

$$(10) \quad v_1 v_2 \rightarrow \dots \rightarrow 1$$

и

$$(11) \quad u_2 Q_1 \rightarrow \dots \rightarrow Q_h.$$

Из (10), используя изоморфизм φ_t , получаем в группе G равенство $u_1 u_2 = 1$, значит, существует последовательность элементарных преобразований группы G

$$(12) \quad 1 \rightarrow \dots \rightarrow u_1 u_2.$$

Теперь, используя начало и конец последовательности (7) и последовательности (12), (8) и (11), в которых нет вставок буквы t , получим новую последовательность

$$\begin{aligned} X = X_1 &\rightarrow \stackrel{(7)}{\rightarrow} X_r = P_1 Q_1 \rightarrow \stackrel{(12)}{\rightarrow} P_1 u_1 u_2 Q_1 \\ &\rightarrow \stackrel{(8)}{\rightarrow} P_h u_2 Q_1 \rightarrow \stackrel{(11)}{\rightarrow} P_h Q_h = X_{r+h} \rightarrow \stackrel{(7)}{\rightarrow} X_s = Y, \end{aligned}$$

в которой исключена последняя вставка буквы t из (7).

Случай 2). Выделим в P_1 букву t^{-1} , которая должна сократиться с буквой $\underline{t}$, а в (6) – момент сокращения с ней нашей буквы $\underline{t}$:

$$(13) \quad \begin{aligned} X = X_1 &\rightarrow \dots X_r = P_1 Q_1 = T_1 t^{-1} K_1 Q_1 \rightarrow T_1 t^{-1} K_1 \underline{t} \underline{t}^{-1} Q_1 = X_{r+1} \\ &\rightarrow \dots \rightarrow X_{r+h} = T_h t^{-1} \underline{t} Q_h \rightarrow T_h Q_h \rightarrow \dots \rightarrow X_s = Y. \end{aligned}$$

Как и в предыдущем случае, в последовательности

$$X_{r+1} \rightarrow \dots \rightarrow X_{r+h}$$

нет вставок t и выделенные буквы t^{-1} и $\underline{t}$ во всех словах имеют одну и ту же индивидуальность. В силу леммы 6.1, примененной к левой букве t^{-1} , найдем при некоторых u_1, v_1 ($\varphi_t(u_1) = v_1^{-1}$) следующие последовательности без вставок t :

$$(14) \quad T_1 v_1 \rightarrow \dots \rightarrow T_h,$$

$$(15) \quad u_1 K_1 \underline{t} \underline{t}^{-1} Q_1 \rightarrow \dots \rightarrow \underline{t} Q_h.$$

Применив лемму 6.1 к букве $\underline{t}$ в последовательности (15), получим при некоторых u_2, v_2 ($\varphi_t(u_2) = v_2^{-1}$) последовательности без вставок t

$$(16) \quad u_1 K_1 u_2 \rightarrow \cdots \rightarrow 1,$$

$$(17) \quad v_2 t^{-1} Q_1 \rightarrow \cdots \rightarrow Q_h.$$

При этом мы имеем следующие составные преобразования:

$$(18) \quad t^{-1} \rightarrow v_1 t^{-1} u_1,$$

$$(19) \quad t \rightarrow u_2 t v_2.$$

Наряду с (19) мы имеем для t^{-1} составное преобразование

$$(20) \quad t^{-1} \rightarrow v_2 t^{-1} u_2.$$

Теперь, используя начало и конец последовательности (13), а также последовательности элементарных преобразований без вставок t , получим новую последовательность, которая содержит на одну вставку меньше, чем было в (13):

$$\begin{aligned} X = X_1 &\rightarrow (13) \rightarrow X_r = P_1 Q_1 = T_1 t^{-1} K_1 Q_1 \rightarrow (18)(20) \rightarrow T_1 v_1 v_2 t^{-1} u_2 u_1 K_1 Q_1 \\ &\rightarrow (16) \rightarrow T_1 v_1 v_2 t^{-1} Q_1 \rightarrow (14) \rightarrow T_h v_2 t^{-1} Q_1 \rightarrow (17) \rightarrow T_h Q_h \rightarrow (13) \rightarrow X_s = Y. \end{aligned}$$

Случай 3) симметричен случаю 2). Доказательство основной леммы завершено.

Из основной леммы непосредственно вытекает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 6.1. *Если t – правильная проходная буква группы $G^{(t)}$, то для любых слов X и Y в алфавите группы G имеем*

$$X = Y \text{ в группе } G \iff X = Y \text{ в группе } G^{(t)},$$

т.е. G есть подгруппа группы $G^{(t)}$.

Еще одно следствие из доказанной основной леммы носит в литературе название “*лемма Бриттона*”. Оно неоднократно доказывалось мимоходом в работе П. С. Новикова [72], но не было там явно выделено. Дж. Бриттон сформулировал ее явно в работе [27].

ЛЕММА БРИТТОНА. *Пусть $G^{(t)}$ есть HNN-расширение группы G . Если слово X содержит буквы t или t^{-1} и $X = 1$ в группе $G^{(t)}$, то X имеет вид $X = P t^\sigma E t^{-\sigma} Q$, где $\sigma = \pm 1$, $E \in H_1$ при $\sigma = -1$ и $E \in H_2$ при $\sigma = 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X = 1$ в группе $G^{(t)}$. По основной лемме найдется последовательность элементарных преобразований без вставок t :

$$(21) \quad X \rightarrow \dots \rightarrow 1.$$

Все входящие в X буквы $t^{\pm 1}$ должны сократиться между собой. Выделим в X те буквы t и t^{-1} , которые в последовательности (21) сокращаются первыми. Очевидно, слово X имеет вид $X = Pt^\sigma Et^{-\sigma}Q$, где $\sigma = \pm 1$, и E не содержит $t^{\pm 1}$. Тогда последовательность (21) имеет вид

$$X = Pt^\sigma Et^{-\sigma}Q \rightarrow \dots \rightarrow P_h t^\sigma t^{-\sigma} Q_h \rightarrow P_h Q_h \rightarrow \dots \rightarrow 1.$$

Пусть $\sigma = 1$. Применяя лемму 6.1, найдем такие u_1, v_1 и u_2, v_2 , что $\varphi_t(u_i) = v_i^{-1}$, причем имеем последовательности преобразований без вставок t

$$(22) \quad \begin{aligned} Pu_1 &\rightarrow \dots \rightarrow P_h, \\ v_1 E v_2 &\rightarrow \dots \rightarrow 1, \\ u_2 Q &\rightarrow \dots \rightarrow Q_h. \end{aligned}$$

Так как E не содержит букв $t^{\pm 1}$, то из (22) получаем $E = v_1^{-1} v_2^{-1}$ в G , т.е. $E \in H_2$. В случае $\sigma = -1$ аналогично получаем $E \in H_1$. Лемма доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть t – правильная проходная буква группы $G^{(t)}$ относительно группы G . Тогда разложение слова X :

$$X = E_0 t^{\sigma_1} E_1 t^{\sigma_2} \dots E_{n-1} t^{\sigma_n} E_n,$$

где выделены все вхождения букв $t^{\pm 1}$, называется *приведенной формой*, если в него не входят подслова вида $t^\sigma E_i t^{-\sigma}$, где $\sigma = 1$ и $E_i \in H_2$ или $\sigma = -1$ и $E_i \in H_1$.

Очевидно, что для любого слова X существует равное ему слово, которое записано в приведенной форме.

Следующие три теоремы легко вытекают из леммы Бриттона.

ТЕОРЕМА 6.2. Пусть t – правильная проходная буква в группе $G^{(t)}$ с основанием G и

$$X = E_0 t^{\sigma_1} E_1 t^{\sigma_2} \dots E_{n-1} t^{\sigma_n} E_n$$

– приведенная форма слова X .

Если $n \geq 1$, то слово X не равно единице в группе $G^{(t)}$.

При $n = 0$ слово X равно единице в группе $G^{(t)}$ тогда и только тогда, когда X равно единице в исходной группе G .

ТЕОРЕМА 6.3. Пусть группа

$$G^{(t)} = \langle \langle a_1, \dots, a_n, t \mid R_1 = 1, \dots, R_m = 1, A_1 t = t B_1, \dots, A_k t = t B_k \rangle \rangle$$

является HNN-расширением конечно определенной группы G . Если G имеет разрешимую проблему равенства и разрешимые проблемы вхождения в подгруппы H_1 и H_2 , порожденные, соответственно, словами $A_1, \dots, A_k$ и $B_1, \dots, B_k$, то в группе $G^{(t)}$ также разрешима проблема равенства.

ТЕОРЕМА 6.4. Пусть группа $G^{(t)}$ является HNN-расширением группы G . Тогда каждый элемент конечного порядка в $G^{(t)}$ сопряжен с некоторым элементом конечного порядка группы G . Группа $G^{(t)}$ не имеет кручения тогда и только тогда, когда не имеет кручения исходная группа G .

ТЕОРЕМА 6.5 (П. С. Новиков [72]). Существует конечно определенная группа с неразрешимой проблемой равенства слов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вскоре после опубликования работы П. С. Новикова [72] появились более простые конструкции групп с неразрешимой проблемой равенства слов. Мы приведем здесь упрощенное доказательство теоремы П. С. Новикова, отражающее вклад В. В. Буна [21], [22], Дж. Бриттона [26] и В. В. Борисова [25].

Пусть

$$\Pi = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \mid E_1 = F_1, \dots, E_m = F_m \rangle$$

есть задание полугруппы с неразрешимой проблемой равенства $X = q$ для фиксированного слова q , причем, все слова E_i и F_i ($i = 1, \dots, m$) непустые.

Рассмотрим группу G , которая задается образующими

$$a_1, a_2, \dots, a_n, l, r, c, t, k$$

и следующими определяющими соотношениями:

- (i) $a_j l = l^{m+1} a_j$ ($1 \leq j \leq n$), $ra_j = a_j r^{m+1}$ ($1 \leq j \leq n$),
- (ii) $ca_j = a_j c$ ($1 \leq j \leq n$), $(l^i E_i r^i) c = c (l^i F_i r^i)$ ($1 \leq i \leq m$),
- (iii) $ct = tc$, $lt = tl$,
- (iv) $ck = kc$, $rk = kr$, $(q^{-1} tq)k = k(q^{-1} tq)$.

Буква k в группе G образует правильную систему проходных букв, так как она участвует только в определяющих соотношениях (iv), и группа G_1 , заданная образующими $a_1, a_2, \dots, a_n, l, r, c, t$ и определяющими соотношениями (i)–(iii), есть базис группы G по этой системе.

В группе G_1 буква t , участвующая только в определяющих соотношениях (iii) группы G_1 , образует правильную систему проходных букв, а базисом группы G_1 по этой системе является группа G_2 , заданная образующими $a_1, a_2, \dots, a_n, l, r, c$ и определяющими соотношениями (i) и (ii).

Ниже мы докажем, что в группе G_2 буква c является правильной проходной буквой, а базисом при этом будет группа G_3 , заданная образующими $a_1, a_2, \dots, a_n, l, r$ и определяющими соотношениями (i). Наконец, базисом группы G_3 по системе проходных букв $a_1, \dots, a_n$ является свободная группа G_0 с образующими l и r . Так как слова l и r^{m+1} (так же как и слова l^{m+1} и r) являются свободными образующими порождаемой ими подгруппы в свободной группе, то буквы $a_1, \dots, a_n$ образуют в группе G_3 правильную систему проходных букв.

Слово $W(a_1, \dots, a_n, lE_1r, l^2E_2r^2, \dots, l^mE_mr^m)$ назовем *несократимым нацело*, если в нем нет двух стоящих рядом взаимно обратных компонент. Мы докажем, что для любых непустых слов $E_1, \dots, E_m$ непустое несократимое нацело слово вида $W(a_1, \dots, a_n, lE_1r, l^2E_2r^2, \dots, l^mE_mr^m)$ не может быть равно 1 в группе G_3 .

Допустим, что непустое несократимое нацело слово

$$W(a_1, \dots, a_n, lE_1r, l^2E_2r^2, \dots, l^mE_mr^m)$$

равно 1 в группе G_3 . Тогда в слово W входит некоторая буква a_i . Так как буквы $a_1, \dots, a_n$ образуют в группе G_3 правильную систему проходных букв с базой G_0 , то по лемме Бриттона слово W имеет вид $W = W_1 a_i^\delta T a_i^{-\delta} W_2$, где буквы a_j не входят в T и $T = \varphi(l, r^{m+1})$ при $\delta = 1$ и $T = \varphi(l^{m+1}, r)$ при $\delta = -1$. Очевидно, буквы a_i^δ и $a_i^{-\delta}$ берутся из соседних вхождений компонент $a_1, \dots, a_n, l^1 E_1 r^1, \dots, l^m E_m r^m$. Невозможность этого вытекает из следующего утверждения, которое нам понадобится и позже.

ЛЕММА 6.2. Пусть $E_1, \dots, E_m$ – непустые слова в алфавите полугруппы Π , $W = \varphi(a_1, \dots, a_n, l E_1 r, l^2 E_2 r^2, \dots, l^m E_m r^m)$ – несократимое нацело слово. Если при некоторых P и Q выполняется равенство

$$PWQ = X_1 a_i^\delta T a_i^{-\delta} X_2,$$

где $\delta = \pm 1$ и $T = \psi(l, r^{m+1})$ при $\delta = 1$ и $T = \psi(l^{m+1}, r)$ при $\delta = -1$, то оба выделенные вхождения букв a_i^δ и $a_i^{-\delta}$ не могут содержаться одновременно в отрезке W .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т.е. обе эти буквы входят в W . Достаточно рассмотреть случай $\delta = 1$. Тогда слово W имеет вид $W = W_1 a_i T a_i^{-1} W_2$. В силу несократимости нацело слова W хотя бы одна из этих компонент имеет вид $l^j E_j r^j$. Здесь надо рассмотреть следующие ниже 3 случая.

1. a_i есть целая компонента, а a_i^{-1} является первой a -буквой соседней справа компоненты вида $(l^j E_j r^j)^{-1}$. В таком случае имеем $T = r^{-j}$, где $1 \leq j \leq m$ и r^{-j} равно слову $\varphi(l, r^{m+1})$ в свободной группе G_0 с порождающими l и r , что невозможно.

2. a_i^{-1} есть целая компонента, а a_i является последней a -буквой соседней слева компоненты вида $l^j E_j r^j$. В таком случае имеем $T = r^j$ и слово r^j равно слову $\varphi(l, r^{m+1})$ в свободной группе G_0 , что невозможно.

3. a_i является последней a -буквой некоторой компоненты вида $l^j E_j r^j$, а a_i^{-1} является первой a -буквой соседней справа компоненты вида $(l^s E_s r^s)^{-1}$. Тогда слово T имеет вид r^{j-s} , где $0 < |j-s| < m$, и равно $\varphi(l, r^{m+1})$ в группе G_0 , что также невозможно.

Полученное нами противоречие завершает доказательство леммы 6.2.

В силу леммы Бриттона непустое несократимое нацело слово вида $W(a_1, \dots, a_n, l E_1 r, l^2 E_2 r^2, \dots, l^m E_m r^m)$ не может быть равно 1 в группе G_3 . Отсюда следует, что слова $a_1, \dots, a_n, l E_1 r, l^2 E_2 r^2, \dots, l^m E_m r^m$, так же как и слова $a_1, \dots, a_n, l F_1 r, l^2 F_2 r^2, \dots, l^m F_m r^m$, являются свободными образующими порождаемой ими подгруппы в группе G_3 . Следовательно, буква c есть правильная проходная буква в группе G_2 .

Через L и R (с индексами или без них) будем обозначать слова вида $\varphi(l, c)$ и $\varphi(r, c)$, соответственно.

ЛЕММА 6.3. Если X и Y – слова в алфавите полугруппы Π и $X = Y$ в Π , то можно указать такие слова L и R , что $X = LYR$ в группе G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если переход $X \rightarrow Y$ является элементарным преобразованием в полугруппе Π , то для некоторых слов U, V и некоторого числа i выполнены равенства $X = U E_i V$ и $Y = U F_i V$, или наоборот. Тогда в группе G получаем равенства

$$X = U E_i V = U(l^{-i} c l^i) F_i(r^i c^{-1} r^{-i}) V = L_1 U F_i V R_1 = L_1 Y R_1.$$

Доказательство леммы 6.3 завершается индукцией по числу элементарных преобразований, необходимых для преобразования слова X в слово Y в полугруппе Π .

ЛЕММА 6.4. Пусть X – слово в алфавите полугруппы Π . Если $X = q$ в Π , то $(X^{-1}tX)k(X^{-1}t^{-1}X) = k$ в группе G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X = q$ в полугруппе Π . Тогда по лемме 6.3 найдутся такие слова L и R , что $X = LqR$ в группе G . Используя это равенство, получаем в группе G

$$\begin{aligned}(X^{-1}tX)k(Xt^{-1}X) &= (R^{-1}q^{-1}L^{-1}tLqR)k(R^{-1}q^{-1}L^{-1}t^{-1}LqR) \\ &= R^{-1}q^{-1}tqkq^{-1}t^{-1}qR = R^{-1}kR = k.\end{aligned}$$

ЛЕММА 6.5. Если X – непустое несократимое слово в алфавите группы G , не содержащее букв s, r, l, t, k , и $(X^{-1}tX)k = k(X^{-1}tX)$ в группе G , то X – слово в положительном алфавите и $X = q$ в полугруппе Π .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $k^{-1}(X^{-1}tX)k(X^{-1}t^{-1}X) = 1$ в группе G . Тогда по лемме Бриттона слово $X^{-1}tX$ равно в группе G_1 некоторому слову $\varphi(c, r, q^{-1}tq)$. Можно считать, что число множителей в слове $\varphi(c, r, q^{-1}tq)$ минимально возможное. Обозначим $D = \varphi^{-1}(c, r, q^{-1}tq)$. По лемме Бриттона из равенства $X^{-1}tXD = 1$ в группе G_1 следует, что $X^{-1}tXD = X_1t^\delta Tt^{-\delta}Z$, где $T = \psi(c, l)$ в G_2 при некотором ψ .

Допустим, что обе буквы t^δ и $t^{-\delta}$ входят в D . Тогда $T = qRq^{-1}$ при некотором R . Используя также равенство $T = \psi(c, l)$ в G_2 , получаем

$$\begin{aligned}D &= D_1(q^{-1}tq)^\delta R(q^{-1}tq)^{-\delta} D_2 = D_1q^{-1}t^\delta Tt^{-\delta}qD_2 \\ &= D_1q^{-1}t^\delta \psi(c, l)t^{-\delta}qD_2 = D_1q^{-1}\psi(c, l)qD_2 = D_1q^{-1}TqD_2 = D_1RD_2,\end{aligned}$$

а это противоречит предположению о минимальности числа сомножителей в слове $\varphi(c, r, q^{-1}tq)$.

Значит, буква t^δ есть первая буква t в слове $X^{-1}tXD$, т.е. $\delta = 1$, $D = R^{-1}q^{-1}t^{-1}qD_1$ и $T = XR^{-1}q^{-1}$ при некотором $R = \varphi(c, r)$. Тогда по лемме Бриттона имеем в группе G_2 равенство $XR^{-1}q^{-1} = \psi(c, l)$ при некотором $\psi(c, l)$. Это означает, что при некоторых R и L в группе G_2 имеет место равенство $X^{-1}LqR = 1$.

Индукцией по числу α вхождений букв $s^{\pm 1}$ в слово LR докажем, что для произвольного непустого несократимого слова X в алфавите $\{a_j, a_j^{-1}\}$ и произвольного непустого слова Q в алфавите полугруппы Π равенство

$$(23) \quad X^{-1}LQR = 1$$

в группе G влечет, что X не содержит отрицательных степеней и в полугруппе Π выполнено равенство $X = Q$.

Будем считать, что слова L и R несократимы.

Если число α равно нулю, то $L = l^\beta$ и $R = r^\gamma$. Тогда из равенства $X^{-1}LQR = 1$ в группе G_2 следует, что $X^{-1}Q$ равно 1 в свободной группе, т.е. $X = Q$, так как X и Q – несократимые слова.

Пусть буква c входит в слово $X^{-1}LQR$. Тогда по лемме Бриттона имеем $X^{-1}LQR = Y_1 c^\delta T c^{-\delta} Y_2$, где в группе G_3 выполнено равенство

$$(24) \quad T\varphi(a_1, \dots, a_n, lE_1r, l^2E_2r^2, \dots, l^mE_mr^m) = 1$$

при $\delta = -1$ или равенство

$$T\varphi(a_1, \dots, a_n, lF_1r, l^2F_2r^2, \dots, l^mF_mr^m) = 1$$

при $\delta = 1$. Эти два случая аналогичны.

Рассмотрим случай $\delta = -1$. Будем считать, что число сомножителей в слове $\varphi(a_1, \dots, a_n, lE_1r, l^2E_2r^2, \dots, l^mE_mr^m)$ минимально. Пусть

$$\varphi(a_1, \dots, a_n, lE_1r, l^2E_2r^2, \dots, l^mE_mr^m) = W_1D,$$

где W_1 есть максимальное начало, состоящее из a -букв. Тогда равенство (24) группы G_3 запишется в виде

$$(25) \quad TW_1D = 1.$$

Допустим, что слово T содержится в L . Тогда в L содержится и слово $c^{-1}Tc$, $T = l^\beta$ и по лемме 6.2 из равенства

$$l^{-\beta}\varphi(a_1, \dots, a_n, lE_1r, l^2E_2r^2, \dots, l^mE_mr^m) = 1$$

в группе G_3 следует, что слово $\varphi(a_1, \dots, a_n, lE_1r, l^2E_2r^2, \dots, l^mE_mr^m)$ пусто, т.е. $l^{-\beta} = 1$ в группе G_3 . Значит, $\beta = 0$ и слово L сократимо.

Аналогично приводится к противоречию предположение, что слово T содержится в R . Остается рассмотреть случай, когда подслово $c^{-1}Tc$ начинается в L и заканчивается в R . Тогда имеем

$$(26) \quad T = l^\beta Qr^\gamma, \quad L = L_1c^{-1}l^\beta, \quad R = r^\gamma cR_1$$

и соотношение (25) группы G_3 запишется в виде

$$l^\beta Qr^\gamma W_1D = 1,$$

где слово D или пусто, или начинается с некоторого множителя $(l^i E_i r^i)^\delta$. По лемме Бриттона имеем

$$l^\beta Qr^\gamma W_1D = Z_1 a_j^\delta T a_j^{-\delta} Z_2,$$

где $\delta = \pm 1$ и в группе G_0 выполнено равенство $T = \psi(l, r^{m+1})$ при $\delta = 1$ или равенство $T = \psi(l^{m+1}, r)$ при $\delta = -1$. Так как число множителей в слове W_1D минимально, то в силу леммы 6.2 W_1D не может содержать обе буквы a_j^δ и $a_j^{-\delta}$. Так как слово Q также не может содержать одновременно обе эти буквы, то a_j^δ есть последняя буква в слове Q , т.е. $\delta = 1$.

Если слово W_1 непусто, то имеем $Q = Q'a_j$, $W_1 = a_j^{-1}W'_1$ и $T = r^\gamma$, причем, $T \equiv \varphi(l, r^{m+1})$. Отсюда следует, что $\gamma = \gamma'(m+1)$ и $l^\beta Qr^\gamma W_1D = l^\beta Q'r^\gamma W'_1D$ в G_3 .

Если W_1' также непусто, то мы опять можем повторить наши рассуждения. Проведя это рассуждение столько раз, какова длина слова W_1 , получим в результате

$$(27) \quad \gamma = \gamma_1(m+1)^{|W_1|},$$

$Q = Q_1 W_1^{-1}$ и $l^\beta Q r^\gamma W_1 D = l^\beta Q_1 r^{\gamma_1} D$ в группе G_3 .

Если при этом слово D пусто, то Q_1 — пустое слово и $l^\beta r^{\gamma_1} = 1$ в группе G_3 . Но тогда $\beta = \gamma_1 = 0$, а значит, и $\gamma = 0$. В таком случае в силу (26) вместо равенства (23) в группе G_2 получаем равенство

$$1 = X^{-1} L_1 c^{-1} Q c R_1 = X^{-1} L_1 Q R_1,$$

где слово $L_1 R_1$ имеет меньше вхождений букв $c^{\pm 1}$, чем слово LR . По индуктивному предположению получаем, что X есть слово в положительном алфавите и в полугруппе Π выполнено равенство $X = Q$.

Пусть слово D непусто. Тогда $D = (l^i E_i r^i)^\delta W_2 D_1$, где W_2 есть максимальный отрезок, состоящий из компонент $a_j^{\pm 1}$. Так как Q_1 — слово в положительном алфавите и слово E_i непусто, то, используя лемму 6.2, получаем:

$$\delta = -1, \quad Q_1 = Q'_1 a_j, \quad E_i = E'_i a_j \quad \text{и} \quad r^{\gamma_1 - i} = \varphi(l, r^{m+1}) \quad \text{в группе } G_0.$$

Тогда $\gamma_1 - i$ должно делиться на $(m+1)$, и далее аналогично предыдущему получим, что $Q_1 = Q_2 E_i$, $\gamma_1 - i = (m+1)^{|E_i|} \gamma_2$ и $l^\beta Q r^\gamma W_1 D = l^\beta Q_2 r^{\gamma_2} l^{-i} W_2 D_1$ в группе G_3 , где по условию W_2 есть максимальный отрезок, состоящий из компонент $a_j^{\pm 1}$. Если W_2 непусто, то, повторив приведенные выше рассуждения по отношению к равенству $l^\beta Q_2 r^{\gamma_2} l^{-i} W_2 D_1 = 1$, получим $Q_2 = Q_3 W_2^{-1}$ и при этом выведем в группе G_3 равенство

$$(28) \quad l^\beta Q r^\gamma W_1 D = l^\beta Q_3 r^{\gamma_3} l^{-i(m+1)^{|W_2|}} D_1 = 1,$$

где $\gamma_2 = \gamma_3(m+1)^{|W_2|}$.

Сначала докажем, что слово D_1 пусто. Допустим, что оно непусто. Тогда D_1 имеет вид $(l^{i_1} E_{i_1} r^{i_1})^\eta Z$, где $\eta = \pm 1$.

В силу равенства (28) и леммы Бриттона в слово $l^\beta Q_3 r^{\gamma_3} l^{-i(m+1)^{|W_2|}} D_1$ должно входить подслово вида $a_j^\delta T a_j^{-\delta}$, где $\delta = \pm 1$ и в свободной группе G_0 выполнено равенство $T = \psi(l, r^{m+1})$ при $\delta = 1$ или равенство $T = \psi(l^{m+1}, r)$ при $\delta = -1$. По лемме 6.2 подслово такого вида не может содержаться в D_1 . Поэтому последняя буква слова Q_3 есть a_j^δ . Значит, $\delta = 1$, $\eta = -1$ и слово

$$T = r^{\gamma_3} l^{-i(m+1)^{|W_2|}} r^{-i_1}$$

равно в свободной группе G_0 некоторому слову $\psi(l, r^{m+1})$. Но это невозможно, так как $0 < i_1 < m+1$.

Итак, D_1 пусто. Тогда пусто и слово Q_3 , т.е. $Q_2 = W_2^{-1}$. Кроме того, имеем равенства $\gamma_3 = 0$ и $\beta = i(m+1)^{|W_2|}$. Равенство $\gamma_3 = 0$ влечет $\gamma_2 = 0$. Следовательно, $i = \gamma_1$, откуда в силу (27) получаем

$$(29) \quad \gamma = i(m+1)^{|W_1|}.$$

Вернемся к слову $X^{-1}LQR$. Имеем $Q = Q_1W_1^{-1} = Q_2E_iW_1^{-1} = W_2^{-1}E_iW_1^{-1}$ и следующие равенства в группе G_2 :

$$\begin{aligned} X^{-1}LQR &= X^{-1}L_1c^{-1}l^\beta W_2^{-1}E_iW_1^{-1}r^\gamma cR_1 \\ &= X^{-1}L_1c^{-1}W_2^{-1}l^i E_i r^i W_1^{-1}cR_1 = X^{-1}L_1W_2^{-1}c^{-1}l^i E_i r^i cW_1^{-1}R_1 \\ &= X^{-1}L_1W_2^{-1}l^i F_i r^i W_1^{-1}R_1 = X^{-1}L_1l^\beta W_2^{-1}F_i W_1^{-1}r^\gamma R_1. \end{aligned}$$

Положим

$$Q' = W_2^{-1}F_i W_1^{-1}, \quad L' = L_1l^\beta, \quad R' = r^\gamma R_1.$$

И силу (23) имеем $X^{-1}L'Q'R' = 1$ в группе G_2 , откуда по индуктивному предположению следует равенство $Q' = X$ в полугруппе Π . Так как $Q = Q'$ в полугруппе Π , то $X = Q$ в полугруппе Π .

Тем самым доказано, что для произвольного непустого несократимого слова X в алфавите группы G , не содержащего букв s, r, l, t, k , и произвольного непустого слова Q в алфавите полугруппы Π равенство $X^{-1}LQR = 1$ в группе G влечет равенство $X = Q$ в полугруппе Π .

Поэтому из доказанного выше равенства $X^{-1}LqR = 1$ в группе G_2 следует равенство $X = q$ в полугруппе Π . Это завершает доказательство леммы 6.5.

Из лемм 6.4 и 6.5 сразу получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 6.6. Пусть X – слово в алфавите полугруппы Π . Тогда имеет место эквивалентность:

$$X = q \text{ в } \Pi \iff (X^{-1}tX)k(X^{-1}t^{-1}X)k^{-1} = 1 \text{ в группе } G.$$

Так как по условию конечно определенная полугруппа Π имеет неразрешимую проблему равенства $X = q$ фиксированному слову q , то получаем, что в группе G неразрешима проблема распознавания равенства уже для слов вида $X^{-1}tXkX^{-1}t^{-1}Xk^{-1}$, где X – произвольное непустое слово в алфавите полугруппы Π . Это завершает доказательство теоремы 6.5.

В дальнейшем нам понадобится следующее свойство слов указанного вида.

ЛЕММА 6.6. Пусть X – слово в алфавите полугруппы Π и $X \neq q$ в Π . Тогда слово $X^{-1}tXkX^{-1}t^{-1}Xk^{-1}$ имеет в группе G бесконечный порядок.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что для некоторого натурального числа $n > 0$ выполняется равенство $(X^{-1}tXkX^{-1}t^{-1}Xk^{-1})^n = 1$. Тогда по лемме Бриттона найдется такое слово $\varphi(c, r, q^{-1}tq)$, что $X^{-1}tX = \varphi(c, r, q^{-1}tq)$ в группе G_1 , т.е. $X^{-1}tX$ коммутирует с k . Тогда по лемме 6.5 получим, что $X = q$ в Π . Это завершает доказательство леммы 6.6.

Если в качестве полугруппы Π взять указанную в теореме 2.3 полугруппу с 2 образующими и 3 определяющими соотношениями, имеющую неразрешимую проблему равенства некоторому фиксированному слову q , то приведенная нами конструкция дает группу G с 14 определяющими соотношениями, имеющую неразрешимую проблему равенства слов.

В работе [25] было показано, что можно так закодировать буквы a_1, a_2, t, k в двухбуквенном алфавите $\{a, b\}$, что заменив эти буквы их кодами в определяющих соотношениях группы, можно четыре коммутации этих букв с буквой c заменить двумя $ac = ca, bc = cb$. При этом новая группа будет содержать группу G в качестве подгруппы и, следовательно, в ней будет неразрешима проблема равенства слов. Полученная группа будет задаваться 12 определяющими соотношениями. Разрешимость проблемы равенства для групп с одним определяющим соотношением была установлена В. Магнусом еще в 1932 году в работе [50]. Доказательство этого результата изложено ниже в разделе 7. Вопрос о существовании групп с неразрешимой проблемой равенства слов, заданных k определяющими соотношениями, при $2 \leq k \leq 11$ пока остается открытым.

Из неразрешимости проблемы равенства для данной группы непосредственно следует неразрешимость для нее и *проблемы сопряженности*, которая состоит в отыскании алгоритма для распознавания по произвольной паре слов, сопряжены они в этой группе или нет. В работе [71] П. С. Новиков построил довольно простой пример конечно определенной группы с неразрешимой проблемой сопряженности, причем, как было показано в работе [33], в этой группе проблема равенства слов разрешима.

Следует также отметить результат Е. Скотт [95], построившей пример конечно определенной простой группы с неразрешимой проблемой сопряженности. Этот результат интересен в связи с отмеченным ниже алгоритмом, решающим проблему равенства слов для простых групп.

Результат П. С. Новикова о неразрешимости проблемы равенства слов теории групп и другие результаты, полученные затем в этом направлении (о них будет сказано ниже) позволили математикам уже в 50-х годах осознать, что неразрешимые алгоритмические проблемы достаточно широко распространены в математике и встречаются среди весьма актуальных алгоритмических проблем, относящихся к фундаментальным понятиям математики.

В середине 50-х годов естественно возник вопрос о том, может ли конечно определенная группа с неразрешимой проблемой равенства слов удовлетворять нетривиальному тождеству. Дело в том, что как примеры П. С. Новикова, так и примеры, построенные вскоре после него другими авторами, содержали системы проходных букв и поэтому не могли удовлетворять никакому нетривиальному тождеству.

Среди групп, удовлетворяющих нетривиальному тождеству, особое место занимают периодические группы. Проблема равенства в этих группах тесно связана с известной проблемой Бернсайда о том, являются ли конечными все конечно порожденные группы, удовлетворяющие тождеству вида $x^n = 1$. Бесконечность этих групп при достаточно больших периодах n удалось доказать только после того, как были найдены некоторые критерии неравенства единице для слов в этих группах. Такие условия впервые были получены для нечетных $n \geq 4381$ в 1968 году при доказательстве бесконечности этих групп в совместной работе П. С. Новикова и С. И. Адяна [74]. Совершенно естественно, что попутно для этих групп было получено положительное решение как проблемы равенства [75], так и проблемы сопряженности [76]. Более того, каждый раз, когда расширяется граница применения изложенного в [74] метода Новикова–Адяна, для нового более широкого класса групп попутно получается решение алгоритмических проблем равенства и сопряженности. Это было так в моногра-

фии С. И. Адяна [13], где метод был распространен на нечетные периоды $n \geq 665$, в работах А. Ю. Ольшанского и его учеников [78], где метод Новикова–Адяна был переведен на язык диаграмм ван Кампена, а также в работе И. Г. Лысенка [48], где он был распространен на четные периоды вида $2^4 n \geq 8000$.

Первые примеры конечно порожденных групп, имеющих неразрешимую проблему равенства и удовлетворяющих нетривиальным тождествам, были найдены в 1969 году [11], [12] с использованием указанного метода Новикова–Адяна. Эти группы определяются рекурсивным множеством тождественных соотношений в алфавите от двух переменных x, y и без дополнительных определяющих соотношений. На поставленный в этих работах вопрос о существовании конечно порожденной группы, заданной конечным числом тождеств (а значит, и одним тождеством) и имеющей неразрешимую проблему равенства слов, положительный ответ был получен Ю. Г. Клейманом в работе [44]. Там же был построен пример группы, заданной тремя образующими элементами и рекурсивным множеством определяющих соотношений, которая имеет разрешимую проблему равенства слов, в то время как невозможен алгоритм, который бы распознавал по данному тождественному соотношению, выполнено оно в этой группе или нет.

Примеры 2-порожденных групп с неразрешимой проблемой равенства, определенных тождеством вида $x^n = 1$ и рекурсивным множеством определяющих соотношений, были получены С. И. Адяном в работе [16]. Позже М. В. Сапир [90] построил конечно определенную группу с неразрешимой проблемой равенства слов в многообразии, заданном двумя тождествами $x^{np} = 1$ и $[x^n, y^n] = 1$ при нечетных $n \geq 665$ и любых $p > 1$, взаимно простых с n .

В. Н. Ремесленников в 1973 году [86] построил пример конечно определенной группы в многообразии разрешимых групп степени 5 с неразрешимой проблемой равенства слов. В этом примере к конечному числу определяющих соотношений добавляется соотношение разрешимости степени 5. Аналогичный результат для разрешимых групп степени 3 был получен В. И. Епанчинцевым и Г. П. Кукиным [32]. Наконец, О. Г. Харлампович [43] впервые построила пример конечно определенной группы с неразрешимой проблемой равенства, в которой выполняется тождественное соотношение разрешимости степени 3

$$[[[x, y], [u, v]], [[x_1, y_1], [u_1, v_1]]] = 1.$$

Как было отмечено в разделе 3, Ф. Холл [38] ранее доказал, что проблема равенства для конечно порожденных разрешимых групп степени 2 решается положительно, так как они финитно аппроксимируемы.

7. Группы с одним определяющим соотношением

Пусть группы G_1 и G_2 заданы образующими и определяющими соотношениями:

$$G_1 = \langle \langle \mathcal{S}_1 \mid \mathcal{D}_1 \rangle \rangle, \quad G_2 = \langle \langle \mathcal{S}_2 \mid \mathcal{D}_2 \rangle \rangle.$$

Если множества $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$ не пересекаются, то группа

$$(1) \quad G_1 * G_2 \triangleq \langle \langle \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \mid \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \rangle \rangle$$

называется *свободным произведением групп G_1 и G_2* .

Очевидно, любое слово X равно в группе $G_1 * G_2$ некоторому слову W , которое находится в *приведенной форме*, т.е. имеет вид

$$W = W_1 \dots W_{n-1} W_n \quad (n \geq 1),$$

где каждое W_j есть слово в алфавите одной из групп G_1 или G_2 , причем W_j и W_{j+1} – слова в разных алфавитах и при $n > 1$ все W_j не равны единице в соответствующей группе.

Следующая теорема о приведенной форме для свободных произведений доказывается элементарно.

ТЕОРЕМА 7.1. *Если*

$$W = W_1 \dots W_{n-1} W_n$$

и

$$U = U_1 \dots U_{m-1} U_m$$

– приведенные формы слов W и U в свободном произведении $G_1 * G_2$, то W равно U в $G_1 * G_2$ тогда и только тогда, когда $n = m$ и при любом $j = 1, \dots, n$ слово W_j равно U_j в соответствующей группе.

Пусть в конечно определенных группах

$$G_1 = \langle \langle \mathcal{S}_1 \mid \mathcal{D}_1 \rangle \rangle \quad \text{и} \quad G_2 = \langle \langle \mathcal{S}_2 \mid \mathcal{D}_2 \rangle \rangle$$

выделены две подгруппы

$$H_1 = \langle A_1, \dots, A_k \rangle_{G_1} \quad \text{и} \quad H_2 = \langle B_1, \dots, B_k \rangle_{G_2},$$

причем соответствие $A_i \xrightarrow{\varphi} B_i$ ($i = 1, \dots, k$) порождает изоморфное отображение G_1 на G_2 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Свободным произведением групп G_1 и G_2 с объединенными подгруппами $H_1 \cong H_2$ называется группа

$$\langle \langle \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \mid \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2, A_1 = B_1, \dots, A_k = B_k \rangle \rangle.$$

Можно считать, что порождающие выделенных подгрупп $A_1, \dots, A_k$ и $B_1, \dots, B_k$ входят в число исходных образующих соответствующих групп. Для этого достаточно добавить в задания групп G_1 и G_2 новые образующие $c_1, \dots, c_k$ и приравнять их к соответствующим словам $A_1, \dots, A_k$ и $B_1, \dots, B_k$. Поэтому мы будем считать, что заданы две конечно определенные группы

$$(2) \quad G_1 = \langle \langle \mathcal{S}'_1 \cup \mathcal{S}_0 \mid \mathcal{D}_1 \rangle \rangle \quad \text{и} \quad G_2 = \langle \langle \mathcal{S}'_2 \cup \mathcal{S}_0 \mid \mathcal{D}_2 \rangle \rangle,$$

причем $\mathcal{S}_i = \mathcal{S}'_i \cup \mathcal{S}_0$, $\mathcal{S}'_1 \cap \mathcal{S}'_2 = \emptyset$ и объединяемые подгруппы H_1 и H_2 порождаются образующими $\mathcal{S}_0 = \{c_1, \dots, c_k\}$ в группах G_1 и G_2 , соответственно. Изоморфизм подгрупп H_1 и H_2 означает, что для любого слова X в алфавите $\mathcal{S}_0$

$$X = 1 \text{ в } G_1 \iff X = 1 \text{ в } G_2.$$

Тогда свободное произведение групп G_1 и G_2 с объединенными подгруппами, порождаемыми в них множеством $\mathcal{S}_0$, имеет задание

$$(3) \quad \langle \langle \mathcal{S}'_1 \cup \mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}'_2 \mid \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \rangle \rangle.$$

ТЕОРЕМА 7.2. Если G_3 есть свободное произведение (3) групп G_1 и G_2 с объединенными подгруппами, то каждая из этих групп естественным образом вложена в G_3 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Алфавиты S_i упорядочим так, чтобы все буквы из S_0 предшествовали остальным буквам. Будем рассматривать лексикографическое упорядочение множества S_i^* слов в алфавите S_i , удовлетворяющее дополнительному условию, что все слова в алфавите S_0 предшествуют всем словам, содержащим буквы из алфавита S_i' . Через $\stackrel{i}{=}$ будем обозначать равенство слов в группе G_i ($i = 1, 2$). Для любого слова $X \in S_i^*$ выберем в смежном классе XH_i наименьшее в указанном выше лексикографическом порядке слово Y в алфавите S_i и положим $\psi(X) \stackrel{i}{=} Y$. Очевидно, для любого слова X в алфавите S_i можно указать представление

$$(4) \quad X \stackrel{i}{=} \psi(X)A, \quad \text{где } A \in S_0^*.$$

Для любых двух равных в G_i слов U и V имеем $\psi(U) \stackrel{i}{=} \psi(V)$.

Если существует слово из S_0^* , равное данному слову X в группе G_i , то $X \in H_i$ и, следовательно, $\psi(X) = 1$.

Для слов $X \in H_i$ введем также функцию $\overline{X}$, которую определим как наименьшее в указанном выше лексикографическом порядке слово в алфавите S_0 , равное слову X в группе G_i . Если такого слова в алфавите S_0 нет, то считаем, что функция $\overline{X}$ не определена. Очевидно, в равенстве (4) всегда можно считать, что $\overline{A} = A$.

Теперь для произвольного слова X в образующих группы G_3 определим *стандартное представление* $\varphi(X)$, равное X в группе G_3 и имеющее вид

$$(5) \quad \varphi(X) = C_1 C_2 \dots C_r A,$$

где $\overline{A} = A$, C_j суть значения $\psi(Z)$ для некоторых слов $Z \in S_i^*$ и соседние C_j взяты из разных алфавитов S_i .

Представление $\varphi(X)$ определим индукцией по числу $\gamma(X)$ множителей из различных S_i^* , на которые можно графически разбить слово X .

Если $X \in S_i^*$, то положим $\varphi(X) \stackrel{i}{=} \psi(X)A$, где $\overline{A} = A$ (см. (4)).

Если $X = YE$, где $E \in S_i^*$ и последняя буква слова Y не принадлежит S_i , то $\gamma(Y) < \gamma(X)$. Тогда по индуктивному предположению для слова Y имеем равное ему в G_3 стандартное представление

$$(6) \quad \varphi(Y) = C_1 C_2 \dots C_r A,$$

где $\overline{A} = A$, а C_j суть значения $\psi(Z)$ для некоторых слов $Z \in S_i^*$ и соседние C_j взяты из разных алфавитов S_i .

Если $C_r \in S_i^*$, то $C_r A E \in S_i^*$. Тогда положим

$$\varphi(X) \stackrel{i}{=} C_1 C_2 \dots C_{r-1} \psi(C_r A E) A_0,$$

где

$$C_r A E \stackrel{i}{=} \psi(C_r A E) A_0 \quad \& \quad \overline{A_0} = A_0.$$

Если же $C_r \notin S_i^*$, то положим

$$\varphi(X) \stackrel{i}{=} C_1 C_2 \dots C_r \psi(AE) A_0,$$

где $AE \stackrel{i}{=} \psi(AE) A_0$ и $\overline{A_0} = A_0$.

Легко проверяются следующие свойства представления $\varphi(X)$:

- (7) $(\forall E \in \mathcal{S}_i^*) (\forall D \in \mathcal{S}_i^*) (E \stackrel{i}{=} D \implies \varphi(\varphi(X)E) = \varphi(\varphi(X)D));$
 (8) $(\forall E \in \mathcal{S}_i^*) (\forall D \in \mathcal{S}_i^*) (\varphi(\varphi(X)ED) = \varphi(\varphi(\varphi(X)E)D)).$

Индукцией по числу элементарных преобразований группы G_3 с использованием импликаций (7) и (8) доказывается

ЛЕММА 7.1. *Если слова X и Y равны в группе G_3 , то $\varphi(X) = \varphi(Y)$.*

Из этой леммы легко следует, что для любого слова $X \in \mathcal{S}_i^*$ имеет место

$$X = 1 \text{ в } G_i \iff X = 1 \text{ в } G_3$$

т.е. группы G_1 и G_2 являются подгруппами группы G_3 . Теорема 7.2 доказана.

ТЕОРЕМА 7.3. *Пусть группа G_3 есть свободное произведение (3) групп G_1 и G_2 с объединенными подгруппами H_1 и H_2 , порожденными в них множеством S_0 . Если в каждой группе G_i ($i = 1, 2$) разрешимы проблема равенства слов и проблема вхождения в подгруппу H_i , то и в G_3 разрешимы проблемы равенства и вхождения в подгруппу G_0 , порожденную множеством S_0 .*

Кроме того, если в группах G_1 и G_2 разрешимы проблемы вхождения в любые подгруппы, порожденные подмножествами множеств образующих этих групп, то и в группе G_3 разрешима проблема вхождения в любую подгруппу, порожденную некоторыми образующими групп G_1 и G_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно доказать, что наши функции $\psi(X)$, $\overline{X}$ и $\varphi(X)$ можно выбрать рекурсивными. Мы выбираем последовательно представителей в правых смежных классах по подгруппе H_1 или H_2 . Для эффективности этого процесса, кроме алгоритмов, решающих проблемы равенства и вхождения в подгруппу H_i для группы G_i , нам нужно еще уметь для данной пары слов $A, B \in \mathcal{S}_i^*$ определять, попадают ли они в один правый смежный класс относительно H_i . Для этого надо только проверить, входит ли $A^{-1}B$ в подгруппу H_i . В силу леммы 7.1 два произвольных слова X и Y группы G_3 равны в G_3 в том и только том случае, если их стандартные представления совпадают графически.

Докажем второе утверждение теоремы. Пусть G – подгруппа группы G_3 , порожденная некоторыми образующими групп G_1 и G_2 . Для решения проблемы вхождения в G нам достаточно при построении функций $\psi(Z)$ и $\overline{Z}$ уметь проверять каждый раз возможность выбора значений этих функций из $G \cap G_i$ (соответственно, из $G \cap H_i$) и для произвольного слова X искать стандартную форму таким образом, чтобы $\psi(Z)$ принадлежало подгруппе $G \cap G_i$ каждый раз, когда есть такая возможность, т.е. если $(\exists Y) (Y \stackrel{i}{=} Z \ \& \ Y \in G \cap G_i)$, то $\psi(Z) \in G \cap G_i$. То же самое надо делать при выборе $\overline{A}$. Тогда будем иметь $X \in G$ в том и только том случае, если все компоненты стандартного представления слова X принадлежат $G \cap G_i$. Теорема 7.3 доказана.

В начале 30-х годов В. Магнусом были доказаны две замечательные теоремы о группах с одним определяющим соотношением – теорема о свободе и теорема о разрешимости проблемы равенства слов.

ТЕОРЕМА 7.4 (теорема о свободе). Пусть

$$G = \langle \langle t, a, b, c, \dots \mid R(t, a, b, c, \dots) = 1 \rangle \rangle,$$

где слово $R(t, a, b, c, \dots)$ циклически несократимо. Любое подмножество порождающих группы G , не содержащее хотя бы одну букву, входящую в $R(t, a, b, c, \dots)$, является множеством свободных порождающих в G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что все буквы алфавита группы G входят в слово R и в R входит не менее двух букв, так как в противном случае теорема очевидна. Через $\sigma_\alpha(W)$ будем обозначать сумму показателей буквы α в слове W . Рассмотрим два случая.

Случай 1. Некоторая буква, входящая в R , например буква t , имеет нулевую сумму показателей. Тогда слово R равно в свободной группе $F = \langle \langle t, b, c, \dots \rangle \rangle$ произведению $\overline{R}$ множителей вида $t^j e^{\pm 1} t^{-j}$, где e любая из букв $a, b, c, \dots$, отличных от t . Для каждой такой буквы e введем новые образующие

$$(9) \quad e_i \Rightarrow t^i e t^{-i}.$$

Теперь для нахождения представления $\overline{R}(a_i, b_j, \dots)$ в новых образующих (9) достаточно в слове R каждое вхождение $e^{\pm 1}$ каждой буквы e заменить на $e_i^{\pm 1}$, где индекс i равен сумме показателей буквы t в начальном отрезке слова R до заменяемого вхождения $e^{\pm 1}$. Например, для слова $R = t^i a^\alpha t^j b^\beta t^k a^\gamma t^n$, где $i + j + k + n = 0$, будем иметь

$$\overline{R}(a_i, b_j, \dots) = a_i^\alpha b_{i+j}^\beta a_{i+j+k}^\gamma.$$

Так как буква t по предположению входит в слово $R(t, a, b, c, \dots)$, то $|\overline{R}(a_i, b_j, \dots)| < |R(t, a, b, c, \dots)|$. Заметим, что представление $\overline{E}(a_i, b_j, \dots)$ можно указать для любого слова E группы G при $\sigma_t(E) = 0$.

Допустим, что некоторое непустое и несократимое слово H равно 1 в группе G и не содержит одну из букв алфавита. Тогда $\sigma_t(H) = 0$. Сначала рассмотрим подслучай, когда эта буква отлична от t . Без ограничения общности можно считать, что это есть буква a , т.е. $H = H(t, b, c, \dots)$, и при этом буква a стоит в начале слова R . Пусть m и M — соответственно минимальный и максимальный индексы у a_i , действительно встречающиеся в $\overline{R}(a_i, b_j, \dots)$. Тогда слово $\overline{R}(a_i, b_j, \dots)$ начинается с a_0 , т.е. имеем $m \leq 0 \leq M$.

Группа G изоморфна группе

$$G_1 = \langle \langle t, a_m, \dots, a_M, b_j, c_j, \dots \ (j \in \mathbb{Z}) \mid \overline{R}(a_i, b_j, \dots) = 1, \\ ta_i = a_{i+1}t \ (i = m, \dots, M-1), tb_j = b_{j+1}t, tc_j = c_{j+1}t, \dots \ (j \in \mathbb{Z}) \rangle \rangle.$$

Так как $|\overline{R}(a_i, b_j, \dots)| < |R(t, a, b, c, \dots)|$ и в $\overline{R}(a_i, b_j, \dots)$ действительно входят буквы a_m и a_M , то по индуктивному предположению элементы

$$a_m, \dots, a_{M-1}, b_j, c_j, \dots \quad (j \in \mathbb{Z}),$$

так же как и элементы

$$a_{m+1}, \dots, a_M, b_j, c_j, \dots \quad (j \in \mathbb{Z})$$

суть свободные образующие порожденных ими подгрупп в группе

$$\overline{G_1} \Rightarrow \langle \langle a_m, \dots, a_M, b_j, c_j, \dots \ (j \in \mathbb{Z}) \mid \overline{R}(a_i, b_j, \dots) = 1 \rangle \rangle.$$

Это означает, что G_1 есть HNN-расширение группы $\overline{G_1}$. Рассмотрим перевод $\overline{H}(b_j, c_k, \dots)$ слова H в алфавит G_1 . Тогда $\overline{H}(b_j, c_k, \dots) = 1$ в G_1 , а значит, и в $\overline{G_1}$. По индуктивному предположению это невозможно, так как в $\overline{R}(a_i, b_j, \dots)$ входит буква a_0 , которая не входит в слово $\overline{H}(b_j, c_k, \dots)$.

Нам остается рассмотреть подслучай, когда в H не входит буква t , т.е. $H = H(a, b, c, \dots)$ и $\overline{H} = H(a_0, b_0, c_0, \dots) = 1$ в G_1 . Так как буква t входит в R , то в слово $\overline{R}(a_i, b_j, \dots)$ должна входить некоторая буква a_i при $i \neq 0$. Но это опять противоречит индуктивному предположению.

Случай 2. Все образующие, а их у нас по условию не менее 2, входят в R с ненулевой суммой показателей. Пусть буквы t и a входят в число образующих. Допустим, что некоторое несократимое слово $H(t, b, c, \dots)$, не содержащее a , равно 1 в G .

Обозначим $\beta \Rightarrow \sigma_t(R)$ и $\alpha \Rightarrow \sigma_a(R)$. Отображение Ψ , переводящее t в x^α , a в $yx^{-\beta}$, а остальные порождающие – в себя, задает гомоморфизм группы G в группу

$$G' \Rightarrow \langle \langle x, y, b, c, \dots \mid R(x^\alpha, yx^{-\beta}, b, c, \dots) = 1 \rangle \rangle.$$

Обозначим $R'(x, y, b, c, \dots) \Rightarrow R(x^\alpha, yx^{-\beta}, b, c, \dots)$.

Буква y существенно входит в слово $R'(x, y, b, c, \dots)$ и

$$\sigma_x(R'(x, y, b, c, \dots)) = 0.$$

Очевидно, из равенства $H(t, b, c, \dots) = 1$ в G следует $H(x^\alpha, b, c, \dots) = 1$ в группе G' и, значит, $\sigma_x(H(x^\alpha, b, c, \dots)) = 0$. Так как при этом слово $H(x^\alpha, b, c, \dots)$ несократимо и непусто, то в него входит некоторая буква, отличная от x .

Теперь, аналогично тому, как это выше было сделано для группы G , группу G' изоморфно представим в виде HNN-расширения группы $\overline{G'_1}$ с соответствующим определяющим соотношением вида $\overline{R'}(y_i, b_j, c_k, \dots) = 1$, где $|\overline{R'}(y_i, b_j, c_k, \dots)|$ равно $|R(t, a, b, c, \dots)|$ минус общее число вхождений буквы t в слово $R(t, a, b, c, \dots)$. При этом и равенство $H(x^\alpha, b, c, \dots) = 1$ группы G' перейдет в нетривиальное равенство $\overline{H}(b_j, c_k, \dots) = 1$ в подгруппе $\overline{G'_1}$. Но по индуктивному предположению это невозможно. Теорема 7.4 доказана.

В работе [89] Н. С. Романовский получил следующий интересный аналог теоремы В. Магнуса о свободе для групп, заданных более чем одним соотношением.

ТЕОРЕМА 7.5. *Если группа G задана n образующими и t определяющими соотношениями, где $n > t$, то в ней найдутся $n - t$ образующих, которые порождают свободную подгруппу ранга $n - t$.*

ТЕОРЕМА 7.6. *Существует единый алгоритм, решающий проблему равенства слов в любой конечно определенной группе с одним определяющим соотношением.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть дана конечно определенная группа

$$(10) \quad G = \langle \langle a, b, c, \dots, t \mid R(t, a, b, c, \dots) = 1 \rangle \rangle.$$

Можно считать, что все указанные в (10) буквы существенно входят в слово R и оно циклически несократимо.

Будем искать алгоритм, проверяющий по данному собственному подалфавиту $\mathcal{A}$ и любому слову X , равно ли оно в G какому-нибудь слову в алфавите $\mathcal{A}$, и указывающий такое слово, если ответ положительный. Эту проблему, которую В. Магнус называл “обобщенной проблемой равенства”, мы будем называть *ограниченной проблемой вхождения*. Имея ответ на этот вопрос и используя теорему о свободе, можно будет решать и проблему равенства единице для данного слова X .

Доказательство будем вести индукцией по длине слова $R(t, a, b, c, \dots)$. Можно считать, что $|R| > 0$.

Случай 1. $\sigma_t(R) = 0$.

Считаем, что слово R начинается с a . Как и в доказательстве теоремы о свободе, запишем слово $R(t, a, b, c, \dots)$ через новые образующие $a_i = t^i a t^{-i}$, $b_j = t^j b t^{-j}$, $\dots$. Будем решать ограниченную проблему вхождения в новом задании той же группы

$$\begin{aligned} G = G_0 = \langle \langle t, a, b, c, \dots, a_m, \dots, a_M, b_j, c_j, \dots \ (j \in \mathbb{Z}) \mid \\ \overline{R}(a_i, b_j, \dots) = 1, a_0 = a, b_0 = b, \dots, \\ ta_i = a_{i+1}t \ (i = m, \dots, M-1), tb_j = b_{j+1}t, tc_j = c_{j+1}t, \dots \ (j \in \mathbb{Z}) \rangle \rangle, \end{aligned}$$

где m — минимальное, а M — максимальное значение i , при котором множитель $a_i = t^i a t^{-i}$ входит в полученное разложение $\overline{R}(t^i a t^{-i}, t^j b t^{-j}, \dots)$ слова $R(t, a, b, c, \dots)$. Так как слово R начинается с a , то $m \leq 0 \leq M$.

Из теоремы о свободе следует, что G_0 является HNN-расширением группы

$$\overline{G_0} = \langle \langle a, b, c, \dots, a_m, \dots, a_M, b_j, c_j, \dots \ (j \in \mathbb{Z}) \mid \overline{R}(a_i, b_j, \dots) = 1, a_0 = a, b_0 = b, \dots \rangle \rangle.$$

При любом целом s через R_s обозначим слово $t^s R t^{-s}$. Очевидно, соотношение $R_s = 1$ равносильно соотношению $R = 1$. Пусть $\overline{R_s}$ результат записи слова R_s через $a_i = t^i a t^{-i}$, $b_j = t^j b t^{-j}$, $\dots$. При любом s слово $\overline{R_s}$ получается из $\overline{R}(a_i, b_j, \dots)$ прибавлением числа s к индексу каждой буквы, входящей в $\overline{R}$. При любом r группы

$$\begin{aligned} G_r = \langle \langle t, a_{m+r}, \dots, a_{M+r}, b_j, c_j, \dots \ (j \in \mathbb{Z}) \mid \overline{R_r}(a_i, b_j, \dots) = 1, \\ ta_i = a_{i+1}t \ (i = m+r, \dots, M+r-1), tb_j = b_{j+1}t, tc_j = c_{j+1}t, \dots \ (j \in \mathbb{Z}) \rangle \rangle \end{aligned}$$

и

$$\overline{G_r} = \langle \langle a_{m+r}, \dots, a_{M+r}, b_j, c_j, \dots \ (j \in \mathbb{Z}) \mid \overline{R_r}(a_i, b_j, \dots) = 1 \rangle \rangle$$

изоморфны, соответственно, группам G_0 и $\overline{G_0}$.

При $k > 0$ рассмотрим также группы

$$\begin{aligned} \Gamma_{r,k} = \langle \langle t, a_{m+r}, \dots, a_{M+r+k}, b_j, c_j, \dots \ (j \in \mathbb{Z}) \mid \overline{R_s} = 1 \ (s = r, r+1, \dots, r+k), \\ ta_i = a_{i+1}t \ (i = m+r, \dots, M-1+r+k), tb_j = b_{j+1}t, tc_j = c_{j+1}t, \dots \ (j \in \mathbb{Z}) \rangle \rangle \end{aligned}$$

и

$$\overline{\Gamma_{r,k}} = \langle \langle a_{m+r}, \dots, a_{m+r+k}, b_j, c_j, \dots \ (j \in \mathbb{Z}) \mid \overline{R_s} = 1 \ (s = r, r+1, \dots, r+k) \rangle \rangle.$$

Очевидно, все группы $\Gamma_{r,k}$ порождаются буквами $t, a_0, b_0, \dots$, если $r \leq 0 \leq r+k$. Более того, все они изоморфны группе G . Группа $\Gamma_{r,0}$ совпадает с группой G_r , которая также изоморфна G , а группа $\overline{\Gamma_{r,0}}$ совпадает с группой $\overline{G_r}$.

При $k=1$ группа $\overline{\Gamma_{r,k}}$ есть свободное произведение двух групп $\overline{G_r}$ и $\overline{G_{r+1}}$ с объединенной свободной подгруппой, порожденной в них всеми образующими, кроме одной из букв a_i (точнее, кроме a_{m+r} и a_{m+r+1} , соответственно).

В общем случае $\overline{\Gamma_{r,k}}$ есть свободное произведение группы $\overline{\Gamma_{r,k-1}}$ и группы $\overline{G_k}$ с соответствующей объединенной подгруппой. Так как при любых r и k группы $\overline{\Gamma_{r,k-1}}$ и $\overline{\Gamma_{r+1,k-1}}$ изоморфны, то группа $\Gamma_{r,k}$ есть HNN-расширение группы $\overline{\Gamma_{r,k}}$.

Очевидно, $|\overline{R_s}| = |\overline{R}| < |R|$. По индуктивному предположению ограниченная проблема вхождения разрешима во всех группах $\overline{G_r}$. Отсюда индукцией по k на основании теоремы 7.3 получим, что ограниченная проблема вхождения разрешима во всех группах $\overline{\Gamma_{r,k}}$.

Теперь перейдем к решению ограниченной проблемы вхождения для группы G . В силу теоремы о свободе достаточно для группы G решить проблему вхождения в подгруппу F , порожденную всеми образующими кроме одной.

Подслучай 1.1. Подгруппа F порождается в G всеми буквами, кроме t .

Рассмотрим произвольное слово X группы G . Если $\sigma_t(X) \neq 0$, то $X \notin F$. Пусть $\sigma_t(X) = 0$. Записав слово $X(t, a, b, c, \dots)$ через $t^i a t^{-i}$, $t^j b t^{-j}$, $\dots$, получим $X = \overline{X}(t^i a t^{-i}, t^j b t^{-j}, \dots)$. Пусть m_1 — минимальное, а M_1 — максимальное значение i , при котором $t^i a t^{-i}$ входит в запись слова $\overline{X}$. Положим $m_2 = \min(m, m_1)$ и $M_2 = \max(M, M_1)$.

Так как в задании групп $\Gamma_{r,k}$ и $\overline{\Gamma_{r,k}}$ при $r = m_2 - m$ и $k = M_2 - m_2 - M + m$ участвуют все буквы a_i при $m_2 \leq i \leq M_2$ и $\overline{\Gamma_{r,k}}$ есть подгруппа группы $\Gamma_{r,k}$, которая изоморфна G , то нам достаточно решить вопрос о вхождении слова $\overline{X}(a_i, b_j, \dots)$ в подгруппу группы $\overline{\Gamma_{r,k}}$, порожденную буквами $a_0, b_0, \dots$. А это было сделано выше.

Подслучай 1.2. Подгруппа F порождается в G всеми буквами, кроме a .

Переходя к слову $X t^{-\sigma_t(X)}$, мы можем считать, что $\sigma_t(X) = 0$. Тогда можем рассмотреть представление $\overline{X}(a_i, b_j, \dots)$, для которого нужно проверить принадлежность подгруппе, порожденной всеми буквами, кроме всех букв a_i , в группе $\Gamma_{r,k}$, алфавит которой содержит все буквы a_i из $\overline{X}$ и $\overline{R}$. А это следует из разрешимости ограниченной проблемы вхождения для групп $\overline{\Gamma_{r,k}}$.

Случай 2. Все образующие входят в $R(t, a, b, c, \dots)$ с ненулевой суммой показателей. Если в R входит всего одна буква, то утверждение очевидно. Пусть буквы a и t входят в R , причем $\sigma_a(R) = \beta$ и $\sigma_t(R) = \alpha$. В силу равнозначности букв алфавита группы G в рассматриваемом случае, достаточно решить проблему вхождения в подгруппу F , порожденную всеми буквами, кроме t .

Пусть $R'(x, y, b, c, \dots)$ есть результат подстановки $t = yx^{-\beta}$ и $a = x^\alpha$ в слово $R(t, a, b, c, \dots)$. Очевидно, $\sigma_x(R') = 0$. Рассмотрим группу

$$G' = \langle \langle x, b, c, \dots, y \mid R' = R(yx^{-\beta}, x^\alpha, b, c, \dots) = 1 \rangle \rangle.$$

Слово R' может быть длиннее, чем R , но, применив к нему кодирование из случая 1, мы перейдем к соотношению $\overline{R'}(y_i, b_j, \dots) = 1$, которое короче, чем исходное соотношение $R = 1$. Так как на основании индуктивного предположения и в силу доказанного в рассмотренном выше случае 1 мы имеем разрешимость ограниченной проблемы вхождения для соотношения

$$R(yx^{-\beta}, x^\alpha, b, c, \dots) = 1,$$

то нам остается свести проблему вхождения для группы G к проблеме вхождения для группы G' .

Наряду с группами G и G' рассмотрим еще группу

$$G'' \Rightarrow \langle \langle t, x, b, c, \dots \mid R(t, x^\alpha, b, c, \dots) = 1 \rangle \rangle.$$

Очевидно, для любого слова $X(t, a, b, \dots)$ из группы G имеем

$$X(t, a, b, \dots) \in F \iff X(t, x^\alpha, b, \dots) \text{ равно в группе } G'' \\ \text{некоторому слову } \Psi(x^\alpha, b, \dots)$$

и

$$X(t, x^\alpha, b, \dots) = \Psi(x^\alpha, b, \dots) \text{ в } G'' \iff X(yx^{-\beta}, x^\alpha, b, \dots) = \Psi(x^\alpha, b, \dots) \text{ в } G'.$$

Для проверки существования такого Ψ , для которого выполняется последнее равенство, сначала выясним, существует ли такое $\Phi(x, b, \dots)$ (без вхождений буквы y), что $X(yx^{-\beta}, x^\alpha, b, \dots) = \Phi(x, b, \dots)$ в G' . Если такого $\Phi(x, b, \dots)$ нет, то $X \notin F$. Если такое $\Phi(x, b, \dots)$ найдется, то в силу теоремы о свободе нам остается проверить, равно ли оно в свободной группе, порожденной в G' буквами $x, b, \dots$, некоторому слову вида $\Psi(x^\alpha, b, \dots)$. Теорема 7.6 доказана.

Как уже отмечалось выше, разрешимость проблемы тождества для групп с одним определяющим соотношением была установлена В. Магнусом еще в 1932 году в работе [50]. Вопрос о существовании групп с неразрешимой проблемой равенства слов, заданных k определяющими соотношениями, при $2 \leq k \leq 11$ остается открытым.

СЛЕДСТВИЕ 7.6.1. Если при $i = 1, 2, \dots, k$ циклически несократимое слово $R_i(x_i, y_1, \dots, y_n)$ содержит букву x_i , то в группе

$$\langle \langle x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n \mid R_1(x_1, y_1, \dots, y_n) = 1, \dots, R_k(x_k, y_1, \dots, y_n) = 1 \rangle \rangle$$

разрешима проблема равенства.

СЛЕДСТВИЕ 7.6.2. Проблема равенства разрешима в любой группе, имеющей задание

$$\langle \langle a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \mid R_1(a_1, \dots, a_n) = 1, R_2(b_1, \dots, b_m) = 1, \\ U(a_1, \dots, a_{n-1}) = V(b_1, \dots, b_{m-1}) \rangle \rangle$$

где буквы a_n и b_m входят в циклически несократимые слова $R_1(a_1, \dots, a_n)$ и $R_2(b_1, \dots, b_m)$, а $U(a_1, \dots, a_{n-1})$ и $V(b_1, \dots, b_{m-1})$ — непустые несократимые слова.

Заметим, что проблема сопряженности для групп, заданных одним определяющим соотношением, остается пока открытой. Ее решение найдено только для определяющих соотношений вида $F^k = 1$, где $k > 1$ [68].

8. Проблемы распознавания групповых свойств

Из результата П. С. Новикова о неразрешимости проблемы равенства слов нетрудно вывести неразрешимость *проблемы изоморфизма*, поставленной Типе еще в 1908 году [102] и включенной М. Дэном [31] в число фундаментальных алгоритмических проблем для конечно определенных групп.

ОБЩАЯ ПРОБЛЕМА ИЗОМОРФИЗМА. *Найти алгоритм, который бы по любым двум заданным конечно определенным группам определял, изоморфны они или нет.*

ЧАСТНАЯ ПРОБЛЕМА ИЗОМОРФИЗМА. *Для фиксированной группы F_0 найти алгоритм, который бы по любой конечно определенной группе F проверял, изоморфна она группе F_0 или нет.*

Приведем простое доказательство неразрешимости частной проблемы изоморфизма для случая, когда F_0 — свободная группа. Тем самым будет установлена и неразрешимость общей проблемы изоморфизма.

Пусть

$$(1) \quad G = \langle \langle a_1, a_2, \dots, a_m \mid R \rangle \rangle$$

есть группа с неразрешимой проблемой равенства слов. Можно считать, что все образующие a_i имеют в группе G бесконечный порядок. Кроме того, можно считать, что в группе G выделен специальный класс слов $\mathcal{M}$, такой, что невозможен алгоритм, проверяющий равенство $X = 1$ в группе G уже для слов X из $\mathcal{M}$, и при этом для каждого X из множества $\mathcal{M}$ элемент $[X]$ либо равен 1, либо имеет бесконечный порядок в группе G . В частности, этим свойством обладает в группе G множество слов вида $k^{-1}(X^{-1}tX)k(X^{-1}t^{-1}X)$, рассмотренное выше в теореме 6.6.

Каждому такому слову $A \Leftarrow k^{-1}(X^{-1}tX)k(X^{-1}t^{-1}X)$ группы G поставим в соответствие конечно определенную группу G_A , заданную образующими

$$a_1, a_2, \dots, a_m, q_1, q_2, \dots, q_m$$

и определяющими соотношениями

$$(2) \quad R \cup \{a_i q_i = q_i A \mid 1 \leq i \leq m\}.$$

Если $A = 1$ в группе G , то из определяющих соотношений (2) следует, что в группе G_A выполняется равенство $a_i = 1$ при любом $i = 1, 2, \dots, m$. Поэтому группа G_A изоморфна свободной группе F_m с m свободными образующими.

Если же $A \neq 1$ в группе G , то по условию элемент A имеет бесконечный порядок в основании G группы G_A по системе проходных букв

$$(3) \quad q_1, q_2, \dots, q_m.$$

Все образующие a_i также имеют бесконечный порядок в группе G . Следовательно, при $A \neq 1$ в группе G буквы (3) образуют правильную систему проходных букв. Тогда G есть подгруппа группы G_A , так что в этом случае группа G_A не может быть изоморфна свободной группе F_m .

Из доказанного в силу неразрешимости проблемы равенства слов для группы G следует, что невозможен алгоритм, проверяющий изоморфизм данной свободной группе F_m уже для групп из класса

$$(4) \quad \{G_A \mid A \in G\}.$$

В 1955 году [2] было доказано, что частная проблема изоморфизма неразрешима для каждой конечно определенной группы F_0 . Принципиальную трудность здесь представлял случай, когда F_0 есть единичная группа. Дело в том, что группа, содержащая проходные буквы, всегда имеет свободную подгруппу и потому не может быть единичной.¹ В работе [2], полное изложение которой опубликовано в [3], впервые было построено семейство групп (4) с параметром A , пробегающим множество слов данной группы G с неразрешимой проблемой равенства, для которого выполнено условие:

группа G_A единична в том и только том случае, если слово A равно 1 в группе G .

Вскоре А. А. Марков (см. [59]), опираясь на эту конструкцию, построил такое бесконечное семейство 4-мерных многообразий M_A с фундаментальными группами G_A , что M_A гомеоморфно фиксированному многообразию в том и только том случае, когда группа G_A единичная. Тем самым была доказана неразрешимость известной алгоритмической проблемы топологии – *проблемы распознавания гомеоморфизма многообразий* размерности n при $n \geq 4$, сформулированной М. Дэном еще в 1909 году. Позже С. П. Новиков доказал неразрешимость для $n = 5$ поставленной в начале века проблемы А. Пуанкаре об алгоритмическом распознавании сферы среди n -мерных многообразий [108]. Отметим, что для $n = 4$ эта проблема остается открытой. Сравнительно недавно А. Томпсон [100] доказала, что проблема распознавания 3-мерной сферы решается положительно. Последнему результату предшествовала некоторая предыстория, в ходе которой определенный вклад в решение этого вопроса внесли также Хакен и Рубинштейн (см. [62]).

Здесь мы приведем предложенный недавно Ч. Миллером III [65] весьма простой способ построения семейства групп G_A с 2 образующими с неразрешимой проблемой распознавания единичности.

ЛЕММА 8.1 (лемма Миллера). *Пусть (1) есть произвольная конечно определенная группа, а w – любое слово в ее алфавите. Обозначим через G_w группу со следующим заданием:*

$$\langle \langle a_1, a_2, \dots, a_m, a, b, c, \mid R, a^{-1}ba = c^{-1}b^{-1}cbc, a^{-2}b^{-1}aba^2 = c^{-2}b^{-1}cbc^2, \\ a^{-3}[w, b]a^3 = c^{-3}bc^3, a^{-(3+i)}a_i b a^{(3+i)} = c^{-(3+i)}bc^{(3+i)}, i = 1, 2, \dots, m \rangle \rangle,$$

где a, b и c – новые буквы.

Группа G_w порождается двумя элементами b и ca^{-1} .

Если $w = 1$ в группе G , то G_w – единичная группа.

Если $w \neq 1$ в группе G , то G – подгруппа группы G_w .

¹Заметим, что в известной монографии А. Г. Куроша, изданной в 1953 году [45; с. 266], проблема изоморфизма упомянута в следующем контексте: “Эта проблема не имеет пока решения даже в том случае, когда одна из заданных групп является единичной”.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, первое определяющее соотношение группы G_w можно записать в виде $c = b(ca^{-1})b(ca^{-1})^{-1}b^{-1}$, а последняя серия соотношений позволяет выразить все порождающие a_i через a, b, c , что завершает доказательство первого утверждения леммы.

Пусть $w = 1$ в группе G . Тогда из соответствующих соотношений получаем сначала $b = 1$, затем $c = 1$ и $a = 1$. Следовательно, группа G_w — единичная.

Пусть $w \neq 1$ в группе G . В свободной группе с порождающими d и c элементы $d, c^{-1}d^{-1}cdc, c^{-2}d^{-1}cdc^2, c^{-3}bc^3, c^{-(3+i)}dc^{(3+i)}$ ($i = 1, 2, \dots, m$) являются свободными образующими порожденной ими подгруппы H_1 .

Аналогично в свободном произведении $G * \langle\langle a, b \rangle\rangle$, элементы $b, a^{-1}ba, a^{-2}b^{-1}aba^2, a^{-3}[w, b]a^3, a^{-(3+i)}a_i ba^{(3+i)}$ ($i = 1, 2, \dots, m$) также являются свободными образующими порожденной ими подгруппы H_2 .

Группа G_w является свободным произведением групп $G * \langle\langle a, b \rangle\rangle$ и $\langle\langle d, c \rangle\rangle$ с объединением по подгруппам H_1 и H_2 . Следовательно, G — подгруппа группы G_w .

Из этой леммы Миллера легко следует

ЛЕММА 8.2. *Каждая счетная группа G вложима в 2-порожденную группу H . Если при этом исходная группа G была рекурсивно определенной (или конечно определенной), то и расширение H будет такой же группой.*

Применив ту же конструкцию к группе с неразрешимой проблемой равенства слов, получим конечно определенную группу с двумя порождающими, имеющую неразрешимую проблему равенства.

ТЕОРЕМА 8.1. *Проблема изоморфизма единичной группе неразрешима уже в классе 2-порожденных групп. Частная проблема изоморфизма для каждой m -порожденной группы неразрешима в классе $(m + 2)$ -порожденных групп.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства первого утверждения достаточно в лемме Миллера взять в качестве исходной группы G конечно определенную группу с неразрешимой проблемой равенства. Очевидно, в классе циклических групп проблема изоморфизма решается положительно.

Для доказательства второго утверждения теоремы для данной конечно определенной группы F_0 с m порождающими рассмотрим семейство групп

$$G'_w \rightleftharpoons G_w * F_0,$$

где w пробегает множество всех слов в группе G с неразрешимой проблемой равенства. Если $w = 1$ в группе G , то группа G'_w изоморфна группе F_0 , а при $w \neq 1$ ранг группы G'_w больше ранга группы F_0 (см. следствие IV.1.9 в [47]).

В работах [2], [3] были доказаны также несколько теорем о неразрешимости проблем распознавания различных инвариантных групповых свойств. Под проблемой распознавания данного группового свойства α здесь понимается задача нахождения алгоритма, распознающего по любой конечно определенной группе, выполнено или нет в ней данное свойство. Групповое свойство называется *инвариантным*, если оно, будучи выполнено в некоторой группе G , выполняется также во всех изоморфных ей группах. Инвариантное свойство называется *наследственным*, если оно, будучи выполнено в некоторой группе G , выполняется также во всех ее подгруппах.

Наследственное групповое свойство называется *нетривиальным*, если существует группа, обладающая этим свойством, и группа, не обладающая им. В работе [3] было впервые доказано, что для произвольного нетривиального наследственного свойства α и произвольного инвариантного свойства β невозможен алгоритм распознавания конъюнкции свойств α и β . Очевидно, здесь условие нетривиальности свойства α необходимо. Заметим, что утверждение остается в силе, если в нем опустить свойство β . Из этих двух утверждений уже следует, что для большинства наиболее интересных групповых свойств проблема распознавания неразрешима. В частности, наследственным является любое тождественное соотношение, например – абелевость, нильпотентность, разрешимость и др. Сюда относятся также и такие свойства, как тривиальность, конечность, периодичность, быть группой без кручения, цикличность, быть свободной группой, иметь разрешимую проблему равенства и т. д.

Впоследствии в работах С. И. Адяна [5], [6] и М. О. Рабина [85] была получена более общая теорема о невозможности распознавания инвариантных групповых свойств, аналогичная уже известной тогда теореме А. А. Маркова о распознавании свойств полугрупп [58].

Инвариантное групповое свойство α называется *марковским*, если существует конечно определенная группа со свойством α и конечно определенная группа, не вложимая ни в какую конечно определенную группу со свойством α . В указанных работах С. И. Адяна и М. О. Рабина было доказано, что для каждого марковского группового свойства α невозможен алгоритм, распознающий по любой конечно определенной группе, выполнено в ней свойство α или нет. Если предложенное С. И. Адяном доказательство использовало технику его первоначальной работы 1955 года, то М. О. Рабин внес существенное упрощение в конструкцию семейства групп G_A , используя свободные произведения групп с объединенной подгруппой.

ТЕОРЕМА 8.2 (теорема Адяна–Рабина). *Любое марковское групповое свойство алгоритмически нераспознаваемо.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть α – произвольное марковское групповое свойство, т. е. оно инвариантно и существуют как конечно определенная группа G^+ со свойством α , так и конечно определенная группа G^- , которую нельзя вложить ни в какую конечно определенную группу со свойством α . Кроме того, пусть H – конечно определенная группа с неразрешимой проблемой равенства слов. Для произвольного слова w в алфавите группы H , применяя конструкцию Миллера, строим конечно определенную группу $(G^- * H)_w$. Тогда имеет место логическая эквивалентность:

$$w = 1 \text{ в группе } H \iff \text{группа } (G^- * H)_w * G^+ \text{ обладает свойством } \alpha.$$

Следовательно, невозможен алгоритм распознавания свойства α для всех конечно определенных групп.

Из приведенной теоремы Адяна–Рабина вытекает одно любопытное следствие. Пусть K_α есть класс всех групп, обладающих инвариантным свойством α . С каждым таким классом K_α можно связать две алгоритмические проблемы: проблема равенства слов для групп из класса K_α и проблема распознавания по любой конечно определенной группе, принадлежит ли она классу K_α . Оказывается, что для любого непустого класса K_α по крайней мере одна из этих двух проблем неразрешима, т. е. здесь имеет место своего рода “*принцип неопределенности*”.

Каждое нетривиальное наследственное свойство является марковским. Свойство “быть простой группой” дает пример марковского, но не наследственного свойства. Существование конечно определенной группы, которая не вложима ни в какую конечно определенную простую группу, следует из разрешимости проблемы равенства для любой конечно определенной простой группы. Если группа единичная, то проблемы равенства для нее не существует. Алгоритм распознавания равенства слов для всех неединичных простых групп составляется из следующих двух параллельных алгоритмических процессов для данной конечно определенной группы H и произвольного слова A в его алфавите: первый последовательно перечисляет все слова, равные слову A в группе H , и останавливается, когда найдет среди них пустое слово; а второй процесс перечисляет все слова, равные 1 в группе H' , полученной добавлением к H нового соотношения $A = 1$, и останавливается только в том случае, если будет установлено, что в H' все образующие равны 1. Очевидно, для неединичной простой группы H один и только один из указанных процессов завершится в конечное число шагов и даст ответ на вопрос, равно слово A единице в группе H или нет.

Как было отмечено в работе [3], теорему о нераспознаваемости марковских групповых свойств нельзя распространить на любые нетривиальные инвариантные групповые свойства. Так свойство “совпадать со своим коммутантом” является нетривиальным и алгоритмически распознаваемо, так как можно воспользоваться алгоритмом распознавания единичности для абелевых групп.

Описанная выше конструкция позволяет доказать алгоритмическую нераспознаваемость и для некоторых свойств, не являющихся марковскими. Например, свойство быть 2-порожденной группой не является марковским. В то же время это свойство алгоритмически нераспознаваемо, что также легко вытекает из леммы Миллера, если в рассмотренной нами конструкции взять в качестве группы G^- — единичную группу, а в качестве группы G^+ — свободную группу ранга 2.

Р. Д. Павлов [82] на основе введенного С. И. Адяном в работе [3] понятия *квазипроходной* буквы получил усиление теоремы Адяна–Рабина, показав, что проблема распознавания произвольного марковского свойства α , выполняющегося для некоторой конечно определенной группы с n образующими, неразрешима в классе конечно определенных групп с $n+1$ образующим. Им же была показана неразрешимость проблемы распознавания изоморфизма свободной группе ранга n в классе конечно определенных групп с $n+1$ образующим. Очевидно, проблема распознавания изоморфизма свободной группе ранга n в классе конечно определенных групп с n образующими разрешима.

Для класса всех конечно определенных абелевых групп легко доказывается разрешимость как проблемы равенства слов, так и проблемы изоморфизма. Среди наиболее интересных положительных результатов, связанных с проблемой изоморфизма, следует отметить совместную работу Ф. Грюневальда и Д. Сигала [37] с решением проблемы изоморфизма для класса всех конечно определенных нильпотентных групп, а также решение М. А. Тайцлиным [97] проблемы изоморфизма для класса конечно определенных коммутативных полугрупп, которая тоже оставалась открытой в течение длительного времени.

9. Проблема вхождения и некоторые результаты о вложении

Проблема вхождения в данную подгруппу H группы G формулируется следующим образом.

Найти алгоритм, который бы по любому элементу g группы G определял принадлежит он подгруппе H или нет.

Общая проблема вхождения для данной группы G заключается в отыскании единого алгоритма, решающего эту проблему для любой подгруппы. Обычно порождающие элементы подгруппы H и элемент g задаются словами в алфавите группы G .

Очевидно, проблема равенства слов для группы G равносильна проблеме вхождения в ее единичную подгруппу. Важный частный случай проблемы вхождения получается, если ограничиться рассмотрением лишь таких подгрупп H , которые порождаются некоторыми образующими исходной группы. Этот ограниченный вариант проблемы вхождения В. Магнус называл *расширенной проблемой равенства слов*. Выше мы привели полученное В. Магнусом решение этой проблемы для групп с одним определяющим соотношением. Вопрос о разрешимости проблемы вхождения для групп с одним определяющим соотношением в общем случае пока остается открытым.

Еще в 1921 году Е. Нильсен [69] указал алгоритм, решающий проблему вхождения в любую конечно порожденную подгруппу произвольной свободной группы. Этот результат был обобщен К. А. Михайловой, доказавшей разрешимость проблемы вхождения для свободного произведения любых двух групп с разрешимой проблемой вхождения [64]. Позже В. Н. Безверхний доказал разрешимость проблемы вхождения для свободного произведения двух свободных групп с объединением по циклическим подгруппам [19]. Он же доказал разрешимость проблемы вхождения для групп с одним определяющим соотношением, имеющих нетривиальный центр.

А. И. Мальцев [55] доказал разрешимость проблемы вхождения для конечно порожденных нильпотентных групп, а Н. С. Романовский [88] решил положительно проблему вхождения для любой конечно порожденной метабелевой группы.

Приведем доказательство результата К. А. Михайловой [63] о неразрешимости проблемы вхождения для прямого произведения двух свободных групп ранга 2 и некоторые интересные следствия, получаемые из него.

ТЕОРЕМА 9.1. *В прямом произведении двух свободных групп ранга 2*

$$(1) \quad F_2 \times F_2 = \langle \langle a_1, a_2, b_1, b_2 \mid a_i b_j = b_j a_i \ (1 \leq i, j \leq 2) \rangle \rangle$$

можно указать конечно порожденную подгруппу, для которой проблема вхождения неразрешима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим 2-порожденную группу с неразрешимой проблемой равенства слов

$$(2) \quad G = \langle \langle a_1, a_2 \mid R_1 = 1, \dots, R_m = 1 \rangle \rangle.$$

Через H_G обозначим подгруппу группы $F_2 \times F_2$, порожденную элементами

$$(3) \quad a_1 b_1, a_2 b_2, \{R_i \mid i = 1, \dots, m\}.$$

Нам достаточно доказать, что слово A в алфавите группы G равно единице в G в том и только том случае, когда $A \in H_G$.

Для данного слова E в алфавите из a -букв через B_E обозначим результат замены в E каждой буквы a_j буквой b_j . Очевидно, для любого слова E в алфавите из

a -букв слово EB_E принадлежит H_G . Отсюда следует, что в H_G лежат все слова вида ER_iE^{-1} , а в силу леммы 5.1 – и все слова, равные 1 в G .

Пусть некоторый элемент группы (1), представимый словом A из a -букв, принадлежит подгруппе H_G , т.е. в группе (1) выполнено равенство

$$(4) \quad A = H_1 H_2 \dots H_k,$$

где H_i суть какие-то порождающие (3) или им обратные. Очевидно, сумма показателей b -букв в слове $W \Rightarrow H_1 H_2 \dots H_k$ равна 0. Равенство $A = 1$ в G доказывается индукцией по числу вхождений в W множителей вида $R_i^{\pm 1}$. Пусть H_t – последний такой множитель в записи (4), а W_1 – результат вычеркивания из W этого множителя H_t . В группе (1) выполнены равенства

$$W = W_1(H_{t+1} \dots H_k)^{-1} H_t H_{t+1} \dots H_k = W_1 E R_i^{\pm 1} E^{-1} = A_1 E R_i^{\pm 1} E^{-1},$$

где A_1 и E суть проекции слов W_1 и $H_{t+1} \dots H_k$ на алфавит из a -букв. Остается заметить, что по индуктивному предположению $A_1 = 1$ в G .

Из доказанной теоремы следует неразрешимость проблемы вхождения для любой группы, в которую вкладывается группа $F_2 \times F_2$. В частности, так как свободная группа F_2 ранга 2 вложима в группу $SL(2, \mathbb{Z})$ целочисленных матриц второго порядка с равным 1 определителем, то группа $SL(4, \mathbb{Z})$ целочисленных матриц порядка 4 с равным 1 определителем имеет неразрешимую проблему вхождения. Другими словами, можно указать такое конечное множество матриц четвертого порядка

$$(5) \quad \{M_1, M_2, \dots, M_n\},$$

что невозможен алгоритм, определяющий по произвольной матрице M четвертого порядка, можно ли ее представить в виде произведения матриц из множества (5) и им обратных. Это замечание о неразрешимости проблемы распознавания представимости матриц порядка 4 было впервые отмечено А. А. Марковым [60].

Приведем еще одно интересное следствие теоремы К. А. Михайловой, которое было доказано А. А. Чеботарем в работе [28].

Группа

$$G^* = \langle \langle a, b, c, d \mid ac = ca, bc = cb, ad = da, bd = db, at = tc, bt = td, ct = tb \rangle \rangle$$

есть HNN-расширение группы $F_2 \times F_2$ с образующими a, b, c, d , так как соответствие

$$\varphi(a) \Rightarrow c, \quad \varphi(b) \Rightarrow d, \quad \varphi(c) \Rightarrow b$$

определяет изоморфное отображение подгруппы, порожденной в $F_2 \times F_2$ элементами a, b, c , в подгруппу, порожденную элементами c, d, b . Следовательно, $F_2 \times F_2$ есть подгруппа группы G^* .

Используя преобразования Тие, нетрудно показать, что группа G^* имеет следующее задание:

$$\langle \langle a, t \mid at^{-1}at = t^{-1}ata, at^{-3}at^3 = t^{-3}at^3a \rangle \rangle.$$

Таким образом, мы получаем пример группы с 2 определяющими соотношениями, которая имеет неразрешимую проблему вхождения. Это один из немногих известных в настоящее время примеров неразрешимых алгоритмических проблем для групп с двумя определяющими соотношениями. В той же работе [28] было доказано, что группа $F_2 \times F_2$ не вложима в группы с одним определяющим соотношением.

Т. А. Маканина [54] показала, что группу $F_2 \times F_2$ можно вложить в группу кос с n нитями $\mathbf{B}_n$ при $n \geq 5$. Поэтому для групп $\mathbf{B}_n$ также неразрешима проблема вхождения. Открытым остается вопрос о разрешимости проблемы вхождения для группы кос $\mathbf{B}_4$.

Счетную группу G будем называть *рекурсивно определенной*, если она задается рекурсивно перечислимым множеством определяющих соотношений при некотором наборе порождающих. Очевидно, рекурсивная определенность группы G равносильна рекурсивной перечислимости множества всех слов, равных 1 в этой группе.

Заметим, что группа, заданная рекурсивно перечислимым множеством определяющих соотношений

$$R_1 = 1, R_2 = 1, \dots, R_i = 1, \dots,$$

может быть задана в том же алфавите и множеством соотношений вида

$$R_1 = 1, R_1 R_2 = 1, \dots, R_1 R_2 R_3 \dots R_i = 1, \dots,$$

которое будет не только рекурсивно перечислимо, но и рекурсивно, так как длины этих соотношений растут монотонно.

Г. Хигман в работе [39] доказал следующую интересную теорему.

ТЕОРЕМА ХИГМАНА. *Конечно порожденная группа вложима в некоторую конечно определенную группу тогда и только тогда, когда она является рекурсивно определенной.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следуя работе С. Аандераа [1], здесь мы используем ту же конструкцию В. Буна, которая была использована выше при доказательстве теоремы 6.5.

Если группа G вложена в некоторую конечно определенную группу F , то множество слов подгруппы G , равных 1 в группе F , рекурсивно перечислимо, т.е. G является рекурсивно определенной группой.

Пусть конечно порожденная группа G имеет рекурсивно перечислимое множество определяющих соотношений. Пусть

$$(6) \quad \{b_1, b_2, \dots, b_p\}$$

— множество ее полугрупповых образующих, а E — множество всех слов, равных 1 в G .

Рекурсивная перечислимость множества E означает, что существует машина Тьюринга T_E с начальным состоянием q_1 и заключительным — q_0 , внешний алфавит которой содержит алфавит (6), такая, что для произвольного слова X в алфавите (6) выполнено условие

$$\text{начав работать в конфигурации } q_1 X, \text{ машина } T_E \text{ остановится} \iff X \in E.$$

Пусть $S_{T_E} = \{s_0, s_1, \dots, s_N\}$ – внешний алфавит, а $Q_{T_E} = \{q_0, q_1, \dots, q_M\}$ – внутренний алфавит машины T_E . По программе P_{T_E} машины Тьюринга T_E построим конечно определенную полугруппу Π_E , заданную множеством образующих элементов

$$\{s_0, s_1, \dots, s_N, q_0, q_1, \dots, q_M, h, q\}$$

и некоторым множеством определяющих соотношений $\mathcal{R}(T_E)$. Для этого мы используем ту же конструкцию, которая была использована при доказательстве теоремы 2.1.

I. Для каждой команды машины Тьюринга T_E вида

$$q_i s_j \mid q_r s_t$$

включаем в множество определяющих соотношений $\mathcal{R}(T_E)$ соотношение $q_i s_j = q_r s_t$.

II. Для каждой команды вида

$$q_i s_j \mid q_r L$$

включаем в множество определяющих соотношений $\mathcal{R}(T_E)$ все соотношения вида $s_t q_i s_j = q_r s_t s_j$, где $t = 0, \dots, N$, и еще одно соотношение $h q_i s_j = h q_r s_0 s_j$.

III. Для каждой команды $P_{T_E}(i, j)$ вида

$$q_i s_j \mid q_r R$$

и для каждого числа $t = 0, \dots, N$ включаем в множество определяющих соотношений $\mathcal{R}(T_E)$ соотношение $q_i s_t s_j = s_t q_r s_j$ и еще одно соотношение $q_i s_j h = s_j q_r s_0 h$.

IV. Для каждого $j = 0, \dots, N$ включаем в множество $\mathcal{R}(T_E)$ два соотношения

$$q_0 s_j = q_0, \quad s_j q_0 = q_0.$$

Наконец, включим в $\mathcal{R}(T_E)$ еще и соотношение $h q_0 h = q$.

Легко видеть, что если $W = q$ в Π_E и W отлично от q , то $W = h X_1 q_j X_2 h$, где X_1, X_2 – слова в алфавите $\{s_0, s_1, \dots, s_N\}$.

Как было установлено ранее при доказательстве теоремы Маркова–Поста, верна следующая лемма.

ЛЕММА 9.1. *Для полугруппы Π_E и любого слова W в алфавите (6) выполнено следующее условие:*

$$W \in E \iff h q_1 W h = q \text{ в } \Pi_E.$$

По полугруппе Π_E , используя конструкцию, описанную выше при доказательстве теоремы 6.5, построим группу G_E .

Для удобства обозначим через

$$\{a_1, \dots, a_n\}$$

все образующие полугруппы Π_E . Пусть $E_1 = F_1, \dots, E_m = F_m$ – все определяющие соотношения Π_E , записанные в этом алфавите, т.е.

$$\Pi_E = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \mid E_1 = F_1, \dots, E_m = F_m \rangle.$$

Группу G_E зададим образующими элементами

$$a_1, a_2, \dots, a_n, l, r, c, t, k$$

и определяющими соотношениями:

- (i) $a_j l = l^{m+1} a_j$ ($1 \leq j \leq n$), $ra_j = a_j r^{m+1}$ ($1 \leq j \leq n$),
- (ii) $ca_j = a_j c$ ($1 \leq j \leq n$), $(l^i E_i r^i) c = c(l^i F_i r^i)$ ($1 \leq i \leq m$),
- (iii) $ct = tc$, $lt = tl$,
- (iv) $ck = kc$, $rk = kr$, $(q^{-1}tq)k = k(q^{-1}tq)$.

Как и выше, будем использовать следующие обозначения:

G_1 — группа, заданная образующими $a_1, a_2, \dots, a_n, l, r, c, t$ и определяющими соотношениями (i)–(iii),

G_2 — группа, заданная образующими $a_1, a_2, \dots, a_n, l, r, c$ и определяющими соотношениями (i) и (ii),

G_3 — группа, заданная образующими $a_1, a_2, \dots, a_n, l, r$ и определяющими соотношениями (i),

а через G_0 обозначаем свободную группу, порожденную элементами l, r .

Напомним, что буква k в группе G_E есть правильная проходная буква и группа G_1 есть базис G_E по этой проходной букве.

В группе G_1 правильной проходной буквой является буква t , а группа G_2 — базис G_1 по ней.

В группе G_2 буква c — правильная проходная буква, а базисом при этом будет группа G_3 .

Буквы $a_1, \dots, a_n$ образуют в группе G_3 правильную систему проходных букв, а базисом в этом случае является свободная группа G_0 .

Докажем несколько вспомогательных лемм.

Как и выше, через L и R (с индексами или без них) будем обозначать слова вида $\varphi(l, c)$ и $\varphi(r, c)$, соответственно. Так как конструкция нашей группы G_E по полугруппе Π_E совпадает с конструкцией группы G по полугруппе Π , приведенной в разделе 6, то для нее верны доказанные ранее леммы 6.3, 6.4 и 6.5 с дополнительной информацией о связи с множеством E , которая отмечена в лемме 9.1.

ЛЕММА 9.2. *Элементы $\{a_1, \dots, a_n, k\}$ являются в G_E свободными образующими порожденной ими подгруппы. То же самое верно для множества $\{a_1, \dots, a_n, t\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что в группе G_E выполняется нетривиальное равенство $\varphi(a_1, \dots, a_n, k) = 1$. Рассмотрим кратчайшее из таких равенств. По лемме Бриттона слово $\varphi(a_1, \dots, a_n, k)$ имеет вид $Z_1 k^\delta T k^{-\delta} Z_2$, где $T = \psi(a_1, \dots, a_n)$ и $\psi(a_1, \dots, a_n) = \varphi_1(c, r, q^{-1}tq)$ в группе G_1 .

Считаем, что слово $\varphi_1(c, r, q^{-1}tq)$ кратчайшее. Тогда, как было показано в начале доказательства леммы 6.5, буквы $t^{\pm 1}$ не должны входить в слово $\varphi_1(c, r, q^{-1}tq)$, т.е. $\varphi_1(c, r, q^{-1}tq)$ есть слово вида $R(c, r)$. Если бы в него входила буква c , то по лемме Бриттона мы получили бы равенство вида

$$r^i = W(a_1, \dots, a_n, l E_1 r, l^2 E_2 r^2, \dots, l^m E_m r^m),$$

где $E_1, \dots, E_m$ — непустые слова. Но это невозможно в силу леммы 6.2. Следовательно, кратчайшее слово $\varphi_1(c, r, q^{-1}tq)$ должно быть степенью r . Тогда

$$\psi(a_1, \dots, a_n) \equiv 1$$

в свободной группе G_0 , т.е. слово $\varphi(a_1, \dots, a_n, k)$ сократимо в свободной группе, что противоречит условию его выбора. Для элементов $\{a_1, \dots, a_n, t\}$ доказательство аналогично.

ЛЕММА 9.3. *Если X_1, X_2, X_3 и X_4 — несократимые слова в алфавите $\{a_1, \dots, a_n\}$ и в группе G_E выполняется равенство*

$$(X_1^{-1}tX_2)k = k(X_3^{-1}tX_4),$$

то $X_1 = X_2 = X_3 = X_4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(X_1^{-1}tX_2)k = k(X_3^{-1}tX_4)$. Тогда, добавив соотношение $k = 1$, получим, что в группе G_1 , а значит, и в G_E выполняется равенство $X_1^{-1}tX_2 = X_3^{-1}tX_4$, откуда в силу леммы 9.2 получаем $X_1 = X_3$ и $X_2 = X_4$. Добавив соотношение $t = 1$, получим, что в группе G_E выполняется равенство $X_1^{-1}X_2k = kX_3^{-1}X_4$, откуда в силу леммы 9.2 получаем $X_1 = X_2$ и $X_3 = X_4$.

ЛЕММА 9.4. *Пусть H — подгруппа группы G_E , порожденная элементами $\{a_1, \dots, a_n, t, k\}$. Тогда H задается следующей системой определяющих соотношений:*

$$(7) \quad (X^{-1}tX)k = k(X^{-1}tX),$$

где X пробегает множество всех слов, равных q в полугруппе P_E .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через H_1 группу с образующими $\{a_1, \dots, a_n, t, k\}$ и всеми соотношениями вида (7). Докажем, что группы H и H_1 изоморфны.

По лемме 6.4 все соотношения группы H_1 выполнены в группе H .

Допустим, что $\varphi(a_1, \dots, a_n, t, k) = 1$ в G_E , но $\varphi(a_1, \dots, a_n, t, k) \neq 1$ в группе H_1 . Рассмотрим соотношение такого вида, содержащее минимальное число вхождений буквы k . В силу леммы 9.2 и леммы Бриттона

$$(8) \quad \varphi(a_1, \dots, a_n, t, k) = Z_1 k^\delta T k^{-\delta} Z_2,$$

где слово T не содержит вхождений буквы k и коммутирует с ним, т.е. $kTk^{-1}T^{-1} = 1$ в группе G_E . Кроме того, $kTk^{-1}T^{-1} \neq 1$ в группе H_1 , так как иначе вместо $\varphi(a_1, \dots, a_n, t, k)$ мы могли взять слово $Z_1 t Z_2$, содержащее меньшее число вхождений k . Можно считать, что слово T содержит минимальное число вхождений буквы t при этих двух условиях.

В силу леммы 9.2 в слово $kTk^{-1}T^{-1}$ должно входить t^δ . С другой стороны, так как t — правильная проходная буква в группе G_E , то по лемме Бриттона

$$(9) \quad kTk^{-1}T^{-1} = kYt^\delta Ft^{-\delta}Y_1,$$

где F не содержит t и коммутирует с t в группе G_E . Согласно лемме 9.2 F содержит единственное вхождение буквы k^{-1} в слово (9), т.е. слово T имеет вид $Yt^\delta X$, а F имеет вид $Xk^{-1}X^{-1}$. Из соотношения

$$(10) \quad t(XkX^{-1}) = (XkX^{-1})t$$

группы G_E в силу леммы 6.5 следует $X = q$ в полугруппе Π_E , т.е. (10) выполнено и в группе H_1 . Теперь, используя равенство (10) в группе H_1 , мы можем уменьшить число вхождений буквы t в слово T при условии сохранения как равенства $kTk^{-1}T^{-1} = 1$ в группе G_E , так и неравенства $kTk^{-1}T^{-1} \neq 1$ в группе H_1 . Полученное противоречие завершает доказательство леммы 9.4.

ЛЕММА 9.5. Подгруппа H_2 группы G_E , порожденная образующими

$$(11) \quad \{k_0, t_0, b_1, b_2, \dots, b_p\},$$

где $k_0 = hkh^{-1}$, $t_0 = q_1^{-1}h^{-1}thq_1$, задается системой определяющих соотношений

$$(12) \quad k_0^{-1}(W^{-1}t_0W)k_0 = W^{-1}t_0W,$$

где W пробегает все слова из E .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через H_3 группу, заданную образующими (11) и всеми определяющими соотношениями вида (12).

Если $W \in E$, то $hq_1Wh = q$ в полугруппе Π_E . Тогда по лемме 6.4 в группе G_E выполнено равенство

$$(h^{-1}W^{-1}q_1^{-1}h^{-1}thq_1Wh)k = k(h^{-1}W^{-1}q_1^{-1}h^{-1}thq_1Wh),$$

т.е. равенство $k_0^{-1}(W^{-1}t_0W)k_0 = W^{-1}t_0W$. Таким образом, все соотношения (12) выполнены в группе H_2 .

Ограничившись рассмотрением слов вида $\varphi(b_1, \dots, b_p, t_0, k_0)$, равных 1 в G_E , и повторив рассуждения, приведенные при доказательстве предыдущей леммы, мы получим, что в H_3 выполнены все соотношения подгруппы H_2 , т.е. $H_2 \simeq H_3$. При этом мы воспользуемся тем, что в данном случае в представлении (8) слово T имеет вид $h^{-1}T_1h$, а в представлении (9) слово F имеет вид $hq_1F_1q_1^{-1}h^{-1}$. При этом соотношение (10) будет иметь вид

$$(13) \quad t(hq_1Xhkh^{-1}X^{-1}q_1^{-1}h^{-1}) = (hq_1Xhkh^{-1}X^{-1}q_1^{-1}h^{-1})t.$$

Отсюда в силу леммы 6.5 получим $hq_1Xh = q$ в полугруппе Π_E , т.е. $X \in E$. При этом полученное соотношение (13) имеет вид (12) и оно выполнено в H_3 .

Для произвольного слова $W(b_1, \dots, b_p)$ в алфавите $\{b_1, \dots, b_p\}$ через W_u будем обозначать результат замены в $W(b_1, \dots, b_p)$ каждой буквы b_i ($i = 1, \dots, p$) на новую букву u_i , а через W_c — результат подстановки в $W(b_1, \dots, b_p)$ вместо каждой буквы b_i ($i = 1, \dots, p$) новой буквы c_i . При этом само слово W иногда будем обозначать через W_b .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Для произвольной группы G через

$$\langle\langle G; c_1, \dots, c_n \mid C_1 = D_1, \dots, C_m = D_m \rangle\rangle$$

будем обозначать группу, задание которой получается из задания G добавлением новых образующих $c_1, \dots, c_n$ и новых определяющих соотношений $C_1 = D_1, \dots, C_m = D_m$.

В дополнение к построенным нами группам G_E, G_1, G_2 и G_3 рассмотрим следующие группы. Положим

$$\begin{aligned} R &\Rightarrow \langle\langle u_1, u_2, \dots, u_p \mid \{W_u = 1 \mid W \in E\} \rangle\rangle; \\ G_4 &\Rightarrow G_E * R = \langle\langle G_E; u_1, u_2, \dots, u_p \mid \{W_u = 1 \mid W \in E\} \rangle\rangle; \\ G_5 &\Rightarrow \langle\langle G_4; c_1, c_2, \dots, c_p \mid \{c_i b_j = b_j c_i, c_i u_j = u_j c_i, c_i k_0 u_i^{-1} = k_0 c_i \mid i, j = 1, \dots, p\} \rangle\rangle; \\ G_6 &\Rightarrow \langle\langle G_5; d \mid dk_0 = k_0 d, \{db_i = b_i c_i d \mid i = 1, \dots, p\} \rangle\rangle; \\ G_7 &\Rightarrow \langle\langle G_6; g \mid t_0 g = g t_0 d, k_0 g = g k_0, \{b_i g = g b_i \mid i = 1, \dots, p\} \rangle\rangle. \end{aligned}$$

I) В силу леммы 9.2 элементы $b_1, \dots, b_p, k_0$ являются свободными образующими порождаемой ими подгруппы в группе G_E , а значит, и в группе G_4 . Поэтому элементы $b_1, \dots, b_p, u_1, \dots, u_p, k_0$ – система свободных образующих для подгруппы, порожденной ими в группе G_4 . Аналогично, $b_1, \dots, b_p, u_1, \dots, u_p, k_0 u_i^{-1}$ при каждом фиксированном i ($i = 1, \dots, p$) есть система свободных образующих для подгруппы, порожденной ими в группе G_4 . Отсюда следует, что $c_1, \dots, c_p$ – правильная система проходимых букв в G_5 .

II) Очевидно, $b_1 c_1, \dots, b_p c_p, k_0$ являются свободными образующими подгруппы, порожденной ими в группе G_5 . Поэтому d – правильная проходная буква в G_6 .

III) Докажем следующее утверждение:

$$(14) \quad \varphi(t_0, k_0, b_1, \dots, b_p) = 1 \text{ в } G_6 \iff \varphi(t_0 d, k_0, b_1, \dots, b_p) = 1 \text{ в } G_6.$$

Если в группе G_6 выполняется равенство $\varphi(t_0 d, k_0, b_1, \dots, b_p) = 1$, то, добавив соотношение $d = 1$, получим $\varphi(t_0, k_0, b_1, \dots, b_p) = 1$.

Пусть в группе G_6 выполняется равенство $\varphi(t_0, k_0, b_1, \dots, b_p) = 1$. В силу леммы 9.5 оно выводимо из соотношений вида (12), где $W \in E$. Заметим, что в группе G_6 выполняются равенства

$$(15) \quad dW_b = W_b W_c d,$$

а в группе G_5 – равенства

$$(16) \quad W_c k_0 = k_0 W_c W_u.$$

Кроме того, если $W_b \in E$, то $W_u = 1$ в группе G_4 . Поэтому все эти равенства выполняются и в G_6 . Используя эти равенства, из соотношений (12) легко выведем соотношения

$$(W_b^{-1} t_0 d W_b) k_0 = k_0 (W_b^{-1} t_0 d W_b),$$

а из них – равенство $\varphi(t_0 d, k_0, b_1, \dots, b_p) = 1$.

Из доказанной эквивалентности (14) следует, что g — правильная проходная буква в группе G_7 .

IV) Из пунктов I), II) и III) следует, что группа R является подгруппой группы G_7 .

Для завершения доказательства теоремы Хигмана нам остается доказать, что G_7 конечно определенная группа. Обозначим через G'_7 группу, задание которой получается из задания группы G_7 удалением всех определяющих соотношений $W_u = 1$ исходной группы R .

В силу (10) для произвольного слова $W_b \in E$ в G'_7 выполняется равенство

$$(17) \quad k_0^{-1}(W_b^{-1}t_0W_b)k_0 = W_b^{-1}t_0W_b.$$

Умножив обе части этого равенства справа на g и протаскив g влево в обеих частях равенства, получим после сокращения на g равенство

$$k_0^{-1}(W_b^{-1}t_0dW_b)k_0 = W_b^{-1}t_0dW_b.$$

Далее, используя соотношения (15), (16) и (17), получим в G'_7 равенства

$$\begin{aligned} k_0^{-1}W_b^{-1}t_0W_bW_cdk_0 &= W_b^{-1}t_0W_bW_cd, \\ k_0^{-1}W_b^{-1}t_0W_bk_0W_cW_ud &= W_b^{-1}t_0W_bW_cd, \\ W_b^{-1}t_0W_bW_cW_ud &= W_b^{-1}t_0W_bW_cd. \end{aligned}$$

Следовательно, $W_u = 1$ в группе G'_7 . Поэтому группы G_7 и G'_7 изоморфны. Это завершает доказательство теоремы Хигмана.

СЛЕДСТВИЕ 9.1.1. *Существует конечно определенная группа, универсальная для всех конечно определенных групп, т.е. такая конечно определенная группа F , что для любой конечно определенной группы G в F есть подгруппа, изоморфная G .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть задан некоторый бесконечный алфавит

$$(18) \quad a_1, a_2, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots$$

Очевидно, любая конечно определенная группа G с k образующими может быть задана в алфавите $\{a_i, a_{i+1}, \dots, a_{i+k-1}\}$. С другой стороны, имеется только счетное число различных заданий конечно определенных групп с образующими из (18), и мы имеем простой алгоритм для перечисления всех таких заданий. Пусть

$$(19) \quad G_1, G_2, G_3, \dots, G_j, G_{j+1}, \dots$$

есть рекурсивно перечислимая последовательность заданий конечно определенных групп в алфавите (18), в которой с точностью до изоморфизма представлены все конечно определенные группы. Можно считать, что алфавиты групп (19) не пересекаются и для каждого j если в группах $G_1, \dots, G_j$ использованы буквы из отрезка $a_1, a_2, \dots, a_i$, то алфавит группы G_{j+1} есть начальный отрезок последовательности

$$a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_{i+r}, \dots$$

Объединив все определяющие соотношения групп последовательности (19), мы получим группу G , заданную рекурсивно перечислимым множеством определяющих соотношений в алфавите (18) и универсальную для всех конечно определенных групп. Нам остается сослаться на лемму 8.2.

М. К. Валиевым в работе [107] был построен явный пример универсальной конечно определенной группы с 14 образующими и 42 определяющими соотношениями.

Из теоремы Хигмана выводится следующая алгебраическая характеристика групп с разрешимой проблемой распознавания равенства слов, которая была получена в работе [23].

ТЕОРЕМА 9.2. *В конечно порожденной группе проблема равенства слов разрешима тогда и только тогда, когда эта группа вложима в простую подгруппу некоторой конечно определенной группы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть конечно порожденная группа G с образующими $u_1, \dots, u_n$ есть подгруппа простой группы S , которая в свою очередь есть подгруппа конечно определенной группы H с образующими $b_1, \dots, b_k$ и определяющими соотношениями $R_1 = 1, \dots, R_m = 1$. Докажем разрешимость проблемы равенства слов в G .

Можно считать, что группа G неединичная. Пусть $W(u_1, \dots, u_n)$ — произвольный ее элемент. Обозначим через H_W группу с образующими $b_1, \dots, b_k$ и определяющими соотношениями $R_1 = 1, \dots, R_m = 1$ и $W_1(b_1, \dots, b_k) = 1$, где W_1 — результат подстановки $u_i = u_i(b_1, \dots, b_k)$, реализующей вложение G в группу H .

Одновременно выполняем два алгоритма — $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$.

Пусть алгоритм $\mathfrak{A}$ перечисляет все слова в образующих $b_1, \dots, b_k$, равные 1 в группе H , а алгоритм $\mathfrak{B}$ перечисляет все слова в образующих $b_1, \dots, b_k$, равные 1 в группе H_W .

Если $W_1(b_1, \dots, b_k) = 1$ в группе G , то слово $W_1(b_1, \dots, b_k)$ будет найдено алгоритмом $\mathfrak{A}$. Если же $W_1(b_1, \dots, b_k) \neq 1$ в G , то в силу простоты подгруппы S в процессе работы алгоритма $\mathfrak{B}$ будет установлено, что все образующие $u_1, \dots, u_n$ группы G равны 1 в группе H_W . Так как группа G неединичная, то в результате совместной работы этих двух алгоритмов будет доказано равенство $W_1(b_1, \dots, b_k) = 1$ или его отрицание в G .

Пусть конечно порожденная группа G имеет разрешимую проблему равенства. Рассмотрим рекурсивно перечислимое множество всех упорядоченных пар $\langle A_i, B_i \rangle$ неединичных элементов группы G . Пусть α — новая буква. В свободном произведении $G * \langle \langle \alpha \rangle \rangle$ элементы $A_i \alpha A_i \alpha^{-1}$ и $B_i \alpha A_i^{-1} \alpha^{-1}$ имеют бесконечный порядок. Поэтому группа

$$(20) \quad G' \equiv \langle \langle G * \langle \langle \alpha \rangle \rangle; t_i (i = 1, 2, \dots) \mid t_i A_i \alpha A_i \alpha^{-1} t_i^{-1} = B_i \alpha A_i^{-1} \alpha^{-1} (i = 1, 2, \dots) \rangle \rangle$$

есть HNN-расширение группы $G * \langle \langle \alpha \rangle \rangle$.

Так как в группе G разрешима проблема равенства, а в группе $G * \langle \langle \alpha \rangle \rangle$ разрешимы проблемы вхождения в циклические подгруппы, порожденные элементами $A_i \alpha A_i \alpha^{-1}$ и $B_i \alpha A_i^{-1} \alpha^{-1}$, то по теореме 6.3 в группе G' разрешима проблема равенства. Группа G' рекурсивно определена, и для любых двух неединичных элементов A_i и B_i группы G в группе G' найдутся такие элементы U_1, U_2 и U_3 , что выполняется равенство

$$B_i = (U_1 A_i U_1^{-1})(U_2 A_i U_2^{-1})(U_3 A_i U_3^{-1}).$$

Положим $G_0 \Rightarrow G$ и $G_{j+1} \Rightarrow (G_j)'$ при $j = 1, 2, \dots$. Группа

$$G^* \Rightarrow \bigcup_{j=0}^{\infty} G_j$$

является рекурсивно определенной, имеет разрешимую проблему равенства и для любых двух ее неединичных элементов A и B найдутся такие элементы U_1, U_2 и U_3 группы G^* , что выполнено равенство

$$B = (U_1 A U_1^{-1})(U_2 A U_2^{-1})(U_3 A U_3^{-1}).$$

В частности, это означает, что группа G^* является простой. В силу леммы 8.2 эта группа вложима в 2-порожденную группу, которая будет рекурсивно определенной, а значит, по теореме Хигмана она вложима в конечно определенную группу.

Пока остается открытым вопрос: *можно ли произвольную конечно порожденную группу с разрешимой проблемой равенства вложить в конечно определенную простую группу?*

Следующая теорема доказана Ч. Миллером III [65].

ТЕОРЕМА 9.3. *Существует такая конечно определенная группа, все нетривиальные факторгруппы которой имеют неразрешимую проблему равенства слов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что непересекающиеся множества K и T натуральных чисел называются *рекурсивно неотделимыми*, если не существует такого рекурсивного расширения множества K , которое не пересекалось бы с T . Пусть K, T — пара рекурсивно перечислимых множеств натуральных чисел, которые рекурсивно неотделимы. Можно считать, что $1 \in K, 2 \in T$.

По лемме 8.2 и теореме Хигмана группа G_0 , заданная порождающими $a_1, a_2, \dots, a_i, \dots$ и определяющими соотношениями $a_i = a_1$ для всех $i \in K$ и $a_i = a_2$ для всех $i \in T$, вложима в некоторую конечно определенную группу G .

Так же, как это было сделано в лемме 8.1, по неединичному элементу $w \Rightarrow a_1 a_2^{-1}$ группы G построим конечно определенную группу G_w , являющуюся расширением группы G и такую, что нормальное замыкание элемента w совпадает со всей группой G_w . Сохраним обозначения a_i для их образов в группах G и G_w .

Рассмотрим произвольную неединичную факторгруппу H группы G_w . Очевидно, $a_1^{-1} a_2 \neq 1$ в H . Поэтому множество

$$(21) \quad \{n \mid a_1 = a_n \text{ в группе } H\}$$

содержит K и не пересекается с T . В силу рекурсивной неотделимости множеств K и T множество (21) не рекурсивно, т.е. проблема распознавания равенства в H неразрешима для класса слов $\{a_1^{-1} a_n \mid n = 1, 2, \dots\}$.

Приведем еще одну интересную характеристику конечно порожденных групп с разрешимой проблемой равенства слов. Она формулируется в терминах алгебраически замкнутых групп. Группа G называется *алгебраически замкнутой*, если любая система уравнений и неравенств с переменными и коэффициентами из G , имеющая решение в некотором расширении G , имеет решение и в самой группе G .

Алгебраически замкнутые группы не являются конечно порожденными группами, так как в них любое конечное множество элементов имеет нетривиальный централизатор, в то время как центр всей группы тривиален (последнее следует из разрешимости неравенства $ax \neq xa$).

Легко доказать, что любая алгебраически замкнутая группа G является простой. В самом деле, как было показано выше, если A и B — неединичные элементы группы G , то уравнение

$$A = (U_1 B U_1^{-1})(U_2 B U_2^{-1})(U_3 B U_3^{-1})$$

имеет решение в некотором расширении (20) группы G . Тогда оно разрешимо и в G . Это означает, что любой элемент A принадлежит нормальному замыканию любого неединичного элемента B .

Б. Нейман [67] доказал, что каждая конечно порожденная группа с разрешимой проблемой равенства слов вложима в любую алгебраически замкнутую группу. В работе [49] А. Макинтайр получил обращение этой теоремы, доказав, что если конечно порожденная группа вложима в любую алгебраически замкнутую группу, то в ней разрешима проблема равенства слов. Он также заметил, что из теоремы 9.3 следует, что каждая алгебраически замкнутая группа имеет некоторую конечно порожденную подгруппу с неразрешимой проблемой равенства слов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Aanderaa S. A proof of Higman's embedding theorem using Britton extensions of groups // Stud. Logic Found. Math. 1973. V. 71. P. 1–18.
- [2] Адян С. И. Алгоритмическая неразрешимость проблем распознавания некоторых свойств групп // Докл. АН СССР. 1955. Т. 103. № 4. С. 533–535.
- [3] Адян С. И. Неразрешимость некоторых алгоритмических проблем теории групп // Труды ММО. 1957. Т. 6. С. 231–298.
- [4] Адян С. И. Роль закона сокращения при задании подгрупп с сокращением посредством определяющих соотношений // Докл. АН СССР. 1957. Т. 113. № 6. С. 1191–1194.
- [5] Адян С. И. Конечно-определенные группы и алгоритмы // Докл. АН СССР. 1957. Т. 117. № 1. С. 9–12.
- [6] Адян С. И. Об алгоритмических проблемах в эффективно-полных классах групп // Докл. АН СССР. 1958. Т. 123. № 1. С. 13–16.
- [7] Адян С. И. О вложимости подгрупп в группы // Докл. АН СССР. 1960. Т. 133. № 2. С. 255–257.
- [8] Адян С. И. К проблеме тождества в ассоциативных исчислениях специального вида // Докл. АН СССР. 1960. Т. 135. № 6. С. 1297–1300.
- [9] Адян С. И. Тождества в специальных подгруппах // Докл. АН СССР. 1962. Т. 143. № 3. С. 499–502.
- [10] Адян С. И. Определяющие соотношения и алгоритмические проблемы для групп и подгрупп. М.: Наука, 1966. (Труды МИАН. Т. 85.)
- [11] Адян С. И. Бесконечные неприводимые системы групповых тождеств // Докл. АН СССР. 1970. Т. 190. № 3. С. 499–501.
- [12] Адян С. И. Бесконечные неприводимые системы групповых тождеств // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1970. Т. 34. № 4. С. 715–734.
- [13] Адян С. И. Проблема Бернсайда и тождества в группах. М.: Наука, 1975.
- [14] Адян С. И. О преобразованиях слов в подгруппе, заданной системой определяющих соотношений // Алгебра и логика. 1976. Т. 15. № 6. С. 611–621.
- [15] Адян С. И. К проблеме делимости для моноидов, заданных одним определяющим соотношением // Матем. заметки. 1994. Т. 55. № 1. С. 3–9.
- [16] Адян С. И. Нормальные подгруппы свободных периодических групп // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1981. Т. 45. № 5. С. 931–947.

- [17] Адян С. И., Оганесян Г. У. К проблемам равенства и делимости в полугруппах с одним определяющим соотношением // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1978. Т. 42. №2. С. 219–225.
- [18] Адян С. И., Оганесян Г. У. О проблемах равенства и делимости в полугруппах с одним определяющим соотношением // Матем. заметки. 1987. Т. 41. №3. С. 412–421.
- [19] Безверхний В. Н. Решение проблемы вхождения для одного класса групп // Вопросы теории групп и полугрупп. №2. Тула: ТГПИ им. Л. Н. Толстого, 1972. С. 3–86.
- [20] Бокуть Л. А., Кукин Г. П. Неразрешимые алгоритмические проблемы для полугрупп, групп и колец // Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия. Т. 25. М.: ВИНТИ, 1987. С. 3–66.
- [21] Boone W. W. Certain simple unsolvable problems of group theory. V, VI // Proc. Konink. Nederl. Akad. Wetensch. Ser. A. 1957. V. 60. P. 22–27; 227–232.
- [22] Boone W. W. The word problem // Ann. of Math. 1959. V. 70. №2. P. 207–265.
- [23] Boone W. W., Higman G. An algebraic characterization of the solvability of the word problem // J. Austral. Math. Soc. 1974. V. 18. №1. P. 41–53.
- [24] Boone W. W., Rogers H. Jr. On a problem of J.H.C. Whitehead and a problem of Alonzo Church // Math. Scand. 1966. V. 19. №2. P. 185–192.
- [25] Борисов В. В. Простые примеры групп с неразрешимой проблемой тождества // Матем. заметки. 1969. Т. 6. №5. С. 521–532.
- [26] Britton J. L. The word problem for groups // Proc. London Math. Soc. (3). 1958. V. 8. P. 493–506.
- [27] Britton J. L. The word problem // Ann. of Math. (2). 1963. V. 77. №1. P. 16–32.
- [28] Чеботарь А. А. Подгруппы групп с одним определяющим соотношением // Известия высших учебных заведений. Математика. 1978. №8 (195). С. 109–118.
- [29] Church A. An unsolvable problem of elementary number theory // Amer. J. Math. 1936. V. 58. №2. P. 345–363.
- [30] Church A. A note on the Entscheidungsproblem // J. Symbolic Logic. 1936. V. 1. №1. P. 40–41.
- [31] Dehn M. Über unendliche diskontinuierliche Gruppen // Math. Ann. 1912. V. 71. P. 116–144.
- [32] Епанчинцев В. И., Кукин Г. П. Проблема равенства в многообразии групп, содержащем $\mathfrak{N}_2\mathfrak{A}$ // Алгебра и логика. 1979. Т. 18. №3. С. 259–285.
- [33] Фридман А. А. О взаимоотношении между проблемой тождества и проблемой сопряженности в конечно определенных группах // Труды ММО. 1960. Т. 9. С. 329–356.
- [34] Гольбергер А. И. О невозможности усиления некоторых результатов Гриндлингера и Линдона // УМН. 1978. Т. 33. №6. С. 201–202.
- [35] Greendlinger M. Dehn's algorithm for the word problem // Comm. Pure Appl. Math. 1960. V. 13. P. 67–83.
- [36] Greendlinger M. On Dehn's algorithms for the conjugacy and word problems with applications // Comm. Pure Appl. Math. 1960. V. 13. P. 641–677.
- [37] Grunewald F., Segal D. Some general algorithms. I: Arithmetic groups; II: Nilpotent groups // Ann. of Math. (2). 1980. V. 112. №3. P. 531–583; 585–617.
- [38] Hall P. On the finiteness of certain soluble groups // Proc. London Math. Soc. 1959. V. 9. P. 592–622.
- [39] Higman G. Subgroups of finitely presented groups // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1961. V. 262. №1311. P. 455–475.
- [40] Higman G., Neumann B. H., Neumann H. Embedding theorems for groups // J. London Math. Soc. 1949. V. 24. P. 247–254.
- [41] Howie J., Pride S. The word problem for one-relator semigroups // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1986. V. 99. №1. P. 33–44.
- [42] van Kampen E. R. On some lemmas in the theory of groups // Amer. J. Math. 1933. V. 55. P. 268–273.
- [43] Харлампович О. Г. Конечно определенная разрешимая группа с неразрешимой проблемой равенства // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1981. Т. 45. №4. С. 852–873.
- [44] Клейман Ю. Г. О тождествах в группах // Труды ММО. 1982. Т. 44. С. 62–108.

- [45] Курош А. Г. Теория групп. М.: Наука, 1967.
- [46] Lyndon R. C. On Dehn's algorithm // Math. Ann. 1966. V. 166. P. 208–228.
- [47] Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.
- [48] Лысенко И. Г. Бесконечные бернсайдовы группы четного периода // Изв. РАН. Сер. матем. 1996. Т. 60. №3. С. 3–224.
- [49] Macintyre A. On algebraically closed groups // Ann. of Math. (2). 1972. V. 96. №1. P. 53–97.
- [50] Magnus W. Das Identitätsproblem für Gruppen mit einer definierenden Relation // Math. Ann. 1932. V. 106. P. 295–307. Рус. пер.: Проблема идентичности для групп с одним определяющим соотношением // УМН. 1940. Вып. 8. С. 365–376.
- [51] Магнус В., Каррас А., Солитер Д. Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974.
- [52] Маканин Г. С. К проблеме тождества в конечно-определенных полугруппах // Докл. АН СССР. 1966. Т. 171. №2. С. 285–287.
- [53] Маканин Г. С. К проблеме тождества в конечно-определенных группах и полугруппах // Дисс. ... канд. физ.-матем. наук. М.: МИАН, 1966.
- [54] Маканина Т. А. Проблема вхождения для группы кос $\mathfrak{B}_n$ при $n \geq 5$ // Матем. заметки. 1981. Т. 29. №1. С. 31–33.
- [55] Мальцев А. И. О гомоморфизмах на конечные группы // Уч. зап. Ивановск. гос. пед. ин-та 1958. Т. 18. №5. С. 49–60.
- [56] Мальцев А. И. Алгоритмы и рекурсивные функции. М.: Наука, 1965.
- [57] Марков А. А. Невозможность некоторых алгоритмов в теории ассоциативных систем // Докл. АН СССР. 1947. Т. 55. №7. С. 587–590.
- [58] Марков А. А. Теория алгоритмов. М.: Наука, 1954. (Труды МИАН. Т. 42.)
- [59] Марков А. А. Неразрешимость проблемы гомеоморфии // Докл. АН СССР. 1958. Т. 121. №2. С. 218–220.
- [60] Марков А. А. К проблеме представимости матриц // Z. Math. Logik Grundlag. Math. 1958. V. 4. №2. P. 157–168.
- [61] Матиясевич Ю. В. Простые примеры неразрешимых ассоциативных исчислений // Докл. АН СССР. 1967. Т. 173. №6. С. 1264–1266.
- [62] Матвеев С. В. Алгоритм распознавания трехмерной сферы (по А. Томпсон) // Матем. сб. 1995. Т. 186. №5. С. 69–84.
- [63] Михайлова К. А. Проблема вхождения для прямых произведений групп // Докл. АН СССР. 1958. Т. 119. С. 1103–1105.
- [64] Михайлова К. А. Проблема вхождения для свободных произведений групп // Докл. АН СССР. 1959. Т. 127. С. 746–748.
- [65] Miller C. F. III. Decision problems for groups—survey and reflections // Math. Sci. Res. Inst. Publ. 1992. V. 23. P. 1–59.
- [66] Мурский В. Л. Изоморфная вложимость полугруппы с перечислимым множеством определяющих соотношений в конечно определенную полугруппу // Матем. заметки. 1967. Т. 1. №2. С. 217–224.
- [67] Neumann B. H. The isomorphism problem for algebraically closed groups // Stud. Logic Found. Math. 1973. V. 71. P. 553–562.
- [68] Newman B. B. Some results on one-relator groups // Bull. Amer. Math. Soc. 1968. V. 74. P. 568–571.
- [69] Nielsen J. Om Regning med ikke-kommutative Faktoren og dens Anvendelse i Gruppeteorien // Matematisk Tidsskrift B. 1921. P. 77–94.
- [70] Новиков П. С. Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества // Докл. АН СССР. 1952. Т. 85. №4. С. 709–712.
- [71] Новиков П. С. Неразрешимость проблемы сопряженности в теории групп // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1954. Т. 18. №6. С. 485–524.
- [72] Новиков П. С. Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества слов в теории групп. М.: Наука, 1955. (Труды МИАН. Т. 44.)
- [73] Новиков П. С., Адян С. И. Проблема тождества для полугрупп с односторонним сокращением // Z. Math. Logik Grundlag. Math. 1958. V. 4. №1. P. 66–88.

- [74] Новиков П. С., Адян С. И. О бесконечных периодических группах. I; II; III // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1968. Т. 32. № 1. С. 212–244; № 2. С. 251–524; № 3. С. 709–731.
- [75] Новиков П. С., Адян С. И. Определяющие соотношения и проблема тождества для свободных периодических групп нечетного порядка // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1968. Т. 32. № 4. С. 971–979.
- [76] Новиков П. С., Адян С. И. О коммутативных подгруппах и проблеме сопряженности в свободных периодических группах нечетного порядка // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1968. Т. 32. № 5. С. 1176–1190.
- [77] Оганесян Г. У. О подгруппах с одним соотношением и подгруппах без циклов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1982. Т. 46. № 1. С. 88–94.
- [78] Ольшанский А. Ю. Геометрия определяющих соотношений в группах. М.: Наука, 1989.
- [79] Ольшанский А. Ю., Шмелькин А. Л. Бесконечные группы // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 37. М.: ВИНТИ, 1989. С. 5–113.
- [80] Осипова В. А. К проблеме тождества для конечно-определенных подгрупп // Докл. АН СССР. 1968. Т. 178. № 5. С. 1017–1020.
- [81] Осипова В. А. Алгоритмические проблемы в подгруппах с ограниченной мерой налегания определяющих слов // Дисс. ... канд. физ.-матем. наук. М.: МИАН, 1971.
- [82] Павлов Р. Д. К проблеме распознавания групповых свойств // Матем. заметки. 1971. Т. 10. № 2. С. 169–180.
- [83] Post E. L. Finite combinatorial processes—formulation 1 // J. Symbolic Logic. 1936. V. 1. № 3. P. 103–105.
- [84] Post E. L. Recursive unsolvability of a problem of Thue // J. Symbolic Logic. 1947. V. 12. № 1. P. 1–11.
- [85] Rabin M. O. Recursive unsolvability of group theoretic problems // Ann. of Math. 1958. V. 67. № 1. P. 172–194.
- [86] Ремесленников В. Н. Пример группы, конечно-определенной в многообразии $\mathfrak{A}^5$, с неразрешимой проблемой равенства слов // Алгебра и логика. 1973. Т. 12. № 5. С. 577–602.
- [87] Ремесленников В. Н., Романьков В. А. Теоретико-модельные и алгоритмические вопросы теории групп // Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия. Т. 21. М.: ВИНТИ, 1983. С. 3–79.
- [88] Романовский Н. С. О некоторых алгоритмических проблемах для разрешимых групп // Алгебра и логика. 1974. Т. 13. № 1. С. 26–34.
- [89] Романовский Н. С. Свободные подгруппы в конечно определенных группах // Алгебра и логика. 1977. Т. 16. № 1. С. 88–97.
- [90] Sapir M. V. On the word problem in periodic group varieties // Internat. J. Algebra Comput. 1991. V. 1. № 1. P. 115–126.
- [91] Саркисян О. А. Некоторые соотношения между проблемами тождества и делимости в группах и подгруппах // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43. № 4. С. 909–921.
- [92] Саркисян О. А. О проблемах равенства и делимости в группах и подгруппах без циклов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1981. Т. 45. № 6. С. 1424–1440.
- [93] Саркисян Р. А. Алгоритмические вопросы для линейных алгебраических групп I; II // Матем. сб. 1980. Т. 113. № 2. С. 179–216; № 3. С. 400–436.
- [94] Scott D. A short recursively unsolvable problem (abstract) // J. Symbolic Logic. 1956. V. 21. № 1. P. 11–112.
- [95] Scott E. A. A finitely presented simple group with unsolvable conjugacy problem // J. Algebra. 1984. V. 90. № 2. P. 333–353.
- [96] Тайцлин М. А. О проблеме изоморфизма для коммутативных подгрупп // Матем. сб. 1974. Т. 93. № 1. С. 103–128.
- [97] Тайцлин М. А. Проблема изоморфизма для коммутативных подгрупп решается положительно // Теория моделей и ее применения. Алма-Ата, 1980. С. 75–81.
- [98] Тартаковский В. А. О проблеме тождества для некоторых типов групп // Докл. АН СССР. 1947. Т. 58. С. 1909–1910.

- [99] Тартаковский В. А. Решение проблемы тождества для группы с k -сократимым базисом при $k = 6$ // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1949. Т. 13. С. 483–494.
- [100] Thompson A. Thin position and the recognition problem for S^3 // Math. Res. Lett. 1994. V. 1. №5. P. 613–630.
- [101] Thue A. Problem über Veränderungen von Zeichenreihen nach gegebenen Regeln // Vid. Skr. Math.-natur. KI. 1914. V. 10.
- [102] Tietze H. Über die topologischen Invarianten mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten // Monatsh. Math. Phys. 1908. V. 19. P. 1–118.
- [103] Цейтин Г. С. Относительно проблемы распознавания свойств ассоциативных исчислений // Докл. АН СССР. 1956. Т. 107. №2. С. 209–212.
- [104] Цейтин Г. С. Ассоциативное исчисление с неразрешимой проблемой эквивалентности // Докл. АН СССР. 1956. Т. 107. №3. С. 370–371.
- [105] Цейтин Г. С. Ассоциативное исчисление с неразрешимой проблемой эквивалентности // Труды МИАН. 1958. Т. 52. С. 172–189.
- [106] Turing A. M. On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem // Proc. London Math. Soc. (2). 1936. V. 42. №3, 4. P. 230–265.
- [107] Валиев М. К. Примеры универсальных конечно определенных групп // Докл. АН СССР. 1973. Т. 211. С. 265–268.
- [108] Володин И. А., Кузнецов В. Е., Фоменко А. Т. О проблеме алгоритмического распознавания стандартной трехмерной сферы // УМН. 1974. Т. 29. №5. С. 71–168.
- [109] Watier G. On the word problem for single relation monoids with an unbordered relator // Internat. J. Algebra Comput. 1997. V. 7. №6. P. 749–770.
- [110] Zhang L. A short proof of a theorem of Adjan // Proc. Amer. Math. Soc. 1992. V. 116. №1. P. 1–3.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН;
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: si@adian.mian.su, durnev@univ.uniyar.ac.ru

Поступила в редакцию
26.01.2000