Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Колесов, Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов, Явление буферности в резонансных системах нелинейных гиперболических уравнений, *УМН*, 2000, том 55, выпуск 2, 95–120

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm268>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 15:01:45

УДК 517.926

ЯВЛЕНИЕ БУФЕРНОСТИ В РЕЗОНАНСНЫХ СИСТЕМАХ НЕЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

А. Ю. Колесов, Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов

Исследуются гиперболические краевые задачи, представляющие собой системы телеграфных уравнений с нелинейными граничными условиями на концах конечного отрезка. Для данного класса систем устанавливается феномен буферности, т.е. существование в них при подходящем выборе параметров любого фиксированного числа устойчивых периодических по времени решений. Показано, что в случае резонансного спектра собственных частот изучение автоколебаний в различных системах приводит к одной из двух модельных краевых задач:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} &= w + \lambda(1 - w^2) \frac{\partial w}{\partial x}, & w(t, x+1) &\equiv -w(t, x), & \lambda > 0; \\ \frac{\partial w}{\partial t} + a^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} &= w - w^3, & w(t, x+1) &\equiv -w(t, x), & a \neq 0,\end{aligned}$$

являющихся своего рода инвариантами. Рассмотрены содержательные примеры из радиофизики.

Библиография: 29 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

§0. Введение	96
1. Разрушение буферности	97
2. Сохранение буферности	98
§1. Вывод базовых математических моделей	98
§2. Метод бесконечномерной нормализации	101
§3. Динамика нормальной формы	105
§4. Метод квазинормальных форм	107
§5. Случай неэквидистантного спектра	111
§6. Гибридная краевая задача	115
§7. Заключительные замечания	117
Список литературы	119

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00157).

§0. Введение

Будем говорить о явлении буферности, если в некоторой системе дифференциальных уравнений с частными производными параболического или гиперболического типа при подходящем выборе параметров можно гарантировать существование любого фиксированного конечного числа устойчивых циклов (периодических по t решений).

В системах параболических уравнений типа реакция-диффузия впервые это интересное явление численными методами было обнаружено Ю. С. Колесовым в ходе предпринятого по его инициативе в работе [1] исследования одной математической модели задачи хищник-жертва; рассматривавшаяся модель представляла собой краевую задачу для системы двух параболических уравнений с запаздыванием. Там же Ю. С. Колесов поставил проблему теоретического объяснения данного феномена на примере модельной параболической системы типа реакция-диффузия без запаздывания. Эта проблема получила впоследствии свое решение в цикле публикаций [2]–[5]. И наконец, в статье [6] результаты [2]–[5] были перенесены непосредственно на исходную краевую задачу из [1].

Исследование буферности в краевых задачах гиперболического типа по инициативе Ю. С. Колесова начато в заметке [7]. Затем оно было продолжено в статьях [8]–[10], а свое логическое завершение получило в монографии [11]. Результаты этих работ показали, что буферность типична именно для гиперболических уравнений. Собственно говоря, и в параболических системах явление буферности обнаруживается лишь в тех случаях, когда они по своим свойствам в определенном смысле близки к гиперболическим системам. В гиперболических же системах возможна даже гипербуферность, т. е. существование сразу счетного числа устойчивых циклов (феномен гипербуферности подробно изучался в [10], [11]).

Проведенный в [7]–[11] математический анализ позволяет утверждать, что в первую очередь буферность характерна для широкого класса физических процессов, адекватные математические модели которых описываются гиперболическими уравнениями (например, для автоколебательных процессов в распределенных электрических и механических системах). В этой связи необходимо напомнить, что на принципиальную возможность существования сразу нескольких устойчивых циклов в классическом автогенераторе с распределенными параметрами (содержащем отрезок длинной линии) указывал наш замечательный физик А. А. Витт [12], [13] еще в начале 30-х годов. Однако в полном объеме феномен буферности как таковой в то время выявлен не был. По-видимому, впервые увеличение числа возможных (устойчивых) автоколебательных режимов при изменении параметров автогенератора удалось заметить экспериментально в работе, выполненной под руководством В. В. Мигулина [14].

В настоящей статье объектами исследования являются краевые задачи гиперболического типа, состоящие из рассматриваемой на конечном отрезке (по пространственной переменной) системы телеграфных уравнений, чаще всего линейной. Нелинейности же фигурируют в граничных условиях на концах отрезка. Изучение подобных задач актуально в связи с тем, что они являются математическими моделями широкого класса автогенераторов, содержащих отрезок длинной линии с распределенными индуктивностью, емкостью и сопротивлением. При этом нелинейные элементы, имеющие произвольную природу (классическая лампа, туннельный диод и т. д.), в таких автогенераторах присоединены, как правило, к концам линии, что и объясняет происхождение нелинейных граничных условий.

Предположим, что в задаче об устойчивости нулевого положения равновесия некоторой гиперболической системы из описанного выше класса реализуется критический случай счетного числа чисто мнимых собственных значений, а при изменении некоторых входящих в систему параметров происходит смещение части спектра устойчивости в правую комплексную полуплоскость. Тогда естественным образом возникает вопрос о существовании и устойчивости автоколебаний такой системы, бифурцирующих из нуля. Насколько нам известно, первой публикацией, посвященной данной проблеме, является уже упоминавшаяся выше статья А. А. Витта [12]. Из ее результатов, а также из значительно более поздних работ [7]–[11] следует, что при отсутствии определенных резонансных соотношений между собственными частотами системы чаще всего в ней реализуется феномен буферности. Точнее говоря, в указанном случае имеется некоторое число квазигармонических (т.е. близких к гармоническим по t) устойчивых циклов, и это число за счет подходящего выбора параметров может быть сделано сколь угодно большим. Кроме того, имеются еще неустойчивые квазигармонические инвариантные торы различных размерностей, разделяющие области притяжения разных устойчивых циклов.

Предположим теперь, что спектр собственных частот рассматриваемой гиперболической краевой задачи является эквидистантным (эквидистантность означает, что если занумеровать все собственные частоты в порядке возрастания, то расстояния между любыми двумя соседними из них будут одинаковы) или становится таковым при изменении некоторых параметров. В такой ситуации, которая весьма интересна в математическом плане и довольно часто встречается в приложениях, бифурцирующие из нуля автоколебания обладают некоторыми специфическими особенностями. При анализе ряда содержательных примеров (главным образом – из радиофизики) были обнаружены две следующие основные закономерности.

1. Разрушение буферности. Диапазон значений параметров, в котором реализуется феномен буферности, существенно сужается и соответственно уменьшается количество устойчивых циклов. Более того, при прохождении некоторых параметров через конечные критические значения все циклы последовательно разрушаются за счет градиентных катастроф (т.е. становятся разрывными, оставаясь ограниченными в C -норме). Таким образом, динамика в данном случае характеризуется следующей схемой:

$$(1) \quad \boxed{\text{Буферность}} \rightarrow \boxed{\text{Градиентные катастрофы}} \rightarrow \boxed{\text{Разрывные колебания}}.$$

Отметим, что схема (1) реализуется в двух основных ситуациях. Во-первых, она проявляется в наиболее часто встречающемся случае, когда в гиперболической системе с эквидистантным (или близким эквидистантному) спектром собственных частот увеличивается некий энергетический параметр, т.е. параметр, отвечающий за смещение спектра устойчивости в правую комплексную полуплоскость. При этом, как видно из (1), происходит переход от гладких колебаний к разрывным. Во-вторых, схема (1) может возникнуть при переходе в гиперболической системе от неэквидистантного спектра собственных частот к эквидистантному.

И наконец, что самое главное, в случае реализации схемы (1) исследование любой конкретной гиперболической системы приводит к одной и той же модельной краевой

задаче [15]

$$(2) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} = w + \lambda(1 - w^2) \frac{\partial w}{\partial x}, \quad w(t, x + 1) \equiv -w(t, x), \quad \lambda = \text{const} > 0,$$

или к некоторой незначительной ее модификации. Таким образом, задача (2) является своего рода инвариантом, характеризующим рассматриваемую особенность.

2. Сохранение буферности. Особенно интересно, что переход в гиперболической системе от неэквидистантного спектра к эквидистантному может вызвать и прямо противоположные последствия: увеличение количества сосуществующих устойчивых циклов, а также расширение диапазона значений параметров, в котором наблюдается само явление буферности. Специфика же резонансности здесь проявляется лишь в том, что часть устойчивых циклов теряет гармоническую форму. Подобная ситуация обнаруживается, например, при исследовании автоколебаний в длинной линии с туннельным диодом [16].

Отметим, наконец, что, как и в предыдущем случае, здесь также имеется инвариант – модельная краевая задача

$$(3) \quad \frac{\partial w}{\partial t} + a^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = w - w^3, \quad w(t, x + 1) \equiv -w(t, x), \quad a = \text{const} \neq 0.$$

Настоящая работа подводит итог многолетнему циклу исследований феномена буферности в нелинейных гиперболических уравнениях. Ее цель – проиллюстрировать в очередной раз сформулированные выше общие положения на конкретном фактическом материале и получить, тем самым, дополнительные аргументы в пользу фундаментальности задач (2) и (3). В связи с этим ниже рассматриваются не вошедшие в монографию [11] радиофизические примеры – математические модели трех автогенераторов, представляющих собой распределенные аналоги классического генератора Ван-дер-Поля. На приводимых примерах описывается физический вывод соответствующих математических моделей, указывается способ получения из них задач (2) или (3), изучаются динамические свойства последних и демонстрируется используемый математический аппарат – методы нормальных и квазинормальных форм, разработанные Ю. С. Колесовым [17], [18].

§ 1. Вывод базовых математических моделей

Изучение автогенераторов с распределенными параметрами актуально в связи с развитием микроэлектроники и с появившейся возможностью реализации автоколебательных систем на распределенных структурах. В частности, представляет интерес проблема создания автогенераторов с распределенными параметрами, “подобных” уже известным генераторам на сосредоточенных элементах. В настоящем параграфе, опираясь на идеи работ [19]–[21], опишем адекватные математические модели трех таких генераторов, представляющих собой распределенные аналоги “однолампового генератора Ван-дер-Поля с колебательным контуром в цепи сетки или цепи анода” [22].

Рассмотрим автогенератор, принципиальная схема которого показана на рис. 1а). Его характерная особенность в том, что имеются две линии, индуктивности L_j , емкости C_j и активные сопротивления R_j , $j = 1, 2$, которых равномерно распределены

Рис. 1

на некоторых отрезках проводников одной и той же длины l (в обоих случаях пренебрегаем распределенной проводимостью). Считаем также, что между линиями наблюдается взаимная индукция с коэффициентами M_j , $j = 1, 2$. Относительно нелинейного элемента (в традиционном случае – классической лампы) будем предполагать, что ток I через него зависит от приложенного напряжения u так, как показано на рис. 1б).

Обозначим через u_j , i_j , $j = 1, 2$, переменные составляющие напряжения и силы тока в линиях. Как известно, они связаны системой телеграфных уравнений

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x} &= -R_1 i_1 - L_1 \frac{\partial i_1}{\partial t} + M_1 \frac{\partial i_2}{\partial t}, & \frac{\partial i_1}{\partial x} &= -C_1 \frac{\partial u_1}{\partial t}, \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} &= -R_2 i_2 - L_2 \frac{\partial i_2}{\partial t} + M_2 \frac{\partial i_1}{\partial t}, & \frac{\partial i_2}{\partial x} &= -C_2 \frac{\partial u_2}{\partial t}. \end{aligned}$$

В описываемой ситуации ее следует рассматривать на отрезке $0 \leq x \leq l$, дополнив граничными условиями

$$(1.2) \quad u_j|_{x=0} = 0, \quad j = 1, 2; \quad i_1|_{x=l} = [s_0 u_2 + s_1 u_2^2 - s_2 u_2^3]|_{x=l}, \quad i_2|_{x=l} = 0,$$

где $s_0, s_2 > 0$, а знак s_1 произволен. Поясним происхождение граничных условий (1.2). К условию $u_1|_{x=0} = 0$ приходим в предположении, что источник постоянного напряжения $+E$ “шунтирован” достаточно большой емкостью и, следовательно, первая линия имеет на конце $x = 0$ нулевое напряжение по переменной составляющей. Условие $u_2|_{x=0} = 0$ является следствием заземленности второй линии в точке $x = 0$, а равенство $i_2|_{x=l} = 0$ вытекает из предполагаемой идеальности усилителя (наличия у него бесконечно большого входного активного сопротивления). Наконец, фигурирующее в (1.2) нелинейное условие получается из связи двух рассматриваемых линий через нелинейный элемент в предположении, что характеристика последнего аппроксимирована в окрестности рабочей точки A (см. рис. 1б)) полиномом третьей степени с коэффициентами s_j , $j = 0, 1, 2$.

Краевая задача (1.1), (1.2) представляет собой общую математическую модель автогенератора, содержащего две LCR -линии, связанные через взаимную индукцию и нелинейный элемент. Однако ниже будем изучать только два частных случая: $C_2 = 0$ или $C_1 = 0, R_1 = 0$.

Начнем со случая $C_2 = 0$, когда задача (1.1), (1.2) является моделью распределенного аналога классического генератора Ван-дер-Поля с колебательным контуром в цепи анода [22]. Для пояснения сути дела отметим, что первая линия играет здесь роль “колебательного контура в цепи анода”, а вторая является вспомогательной, так как при $C_2 = 0$ автоматически имеем $i_2 \equiv 0$ (ее функция состоит в создании – посредством взаимной индукции – цепи обратной связи между основной линией и усилителем).

Итак, исследованию подлежит краевая задача

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x} &= -R_1 i_1 - L_1 \frac{\partial i_1}{\partial t}, & \frac{\partial i_1}{\partial x} &= -C_1 \frac{\partial u_1}{\partial t}, & \frac{\partial u_2}{\partial x} &= M_2 \frac{\partial i_1}{\partial t}, \\ u_1|_{x=0} &= u_2|_{x=0} = 0, & i_1|_{x=l} &= [s_0 u_2 + s_1 u_2^2 - s_2 u_2^3]|_{x=l}, \end{aligned}$$

получающаяся из (1.1), (1.2) при $i_2 = 0$. Для удобства ее анализа исключим сначала переменную u_2 :

$$(1.4) \quad u_2 = -\frac{M_2}{L_1} u_1 - \frac{M_2 R_1}{L_1} \int_0^x i_1(t, s) ds.$$

Выполняя, далее, в (1.3), (1.4) замены $x/l \rightarrow x$, $t/(l\sqrt{L_1 C_1}) \rightarrow t$, $u_1 = u$, $i_1 = v\sqrt{C_1/L_1}$, убеждаемся, что математическая модель принимает вид

$$(1.5) \quad \begin{aligned} u_t &= -v_x, & v_t &= -u_x - \varepsilon v, \\ u|_{x=0} &= 0, & v|_{x=1} &+ \beta_0 \sigma + \beta_1 \sigma^2 - \beta_2 \sigma^3 = 0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \sigma &= u|_{x=1} + \varepsilon \int_0^1 v(t, x) dx, & \varepsilon &= R_1 l \sqrt{C_1/L_1}, & \beta_0 &= \alpha s_0 \sqrt{L_1/C_1}, \\ \beta_1 &= -\alpha^2 s_1 \sqrt{L_1/C_1}, & \beta_2 &= \alpha^3 s_2 \sqrt{L_1/C_1}, & \alpha &= M_2/L_1. \end{aligned}$$

В случае $C_1 = 0$, $R_1 = 0$ имеем $i_1 \equiv I(t)$, где $I(t) = [s_0 u_2 + s_1 u_2^2 - s_2 u_2^3]|_{x=l}$. Таким образом, здесь вместо (1.1), (1.2) рассмотрению подлежит краевая задача

$$(1.6) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial x} &= -R_2 i_2 - L_2 \frac{\partial i_2}{\partial t} + M_2 \frac{dI}{dt}, & \frac{\partial i_2}{\partial x} &= -C_2 \frac{\partial u_2}{\partial t}, \\ u_2|_{x=0} &= 0, & i_2|_{x=l} &= 0, \end{aligned}$$

представляющая модель распределенного аналога генератора Ван-дер-Поля с колебательным контуром в цепи сетки [22]. Действительно, теперь вспомогательной является уже первая линия: в силу условия $R_1 = 0$ можно пренебречь падением напряжения в ней и считать, что $i_1 = I(t)$. Отметим еще, что роль вспомогательной линии здесь та же, что и в классическом генераторе Ван-дер-Поля: через нее посредством взаимной индукции осуществляется “подкачка” энергии в основную $L_2 C_2 R_2$ -линию, пополняющая часть энергии последней, теряемой на R_2 . Выполняя в задаче (1.6) замены $x/l \rightarrow x$, $t/(l\sqrt{L_2 C_2}) \rightarrow t$, $u_2 = u$, $i_2 = M_2 I(t)/L_2 = v\sqrt{C_2/L_2}$, приведем ее к более удобному для дальнейшего анализа виду

$$(1.7) \quad \begin{aligned} u_t &= -v_x, & v_t &= -u_x - \varepsilon v - \varepsilon [\beta_0 u + \beta_1 u^2 - \beta_2 u^3]|_{x=1}, \\ u|_{x=0} &= 0, & v|_{x=1} &+ \beta_0 u|_{x=1} + \beta_1 u^2|_{x=1} - \beta_2 u^3|_{x=1} = 0, \end{aligned}$$

где $\varepsilon = R_2 l \sqrt{C_2/L_2}$, $\beta_j = s_j M_2 / \sqrt{L_2 C_2}$, $j = 0, 1, 2$.

И наконец, рассмотрим еще один распределенный аналог генератора Ван-дер-Поля, получающийся из предыдущего при условии, что конец $x = 0$ основной линии не заземлен, а разомкнут. В этом случае вместо (1.7) имеем дело с краевой задачей

$$(1.8) \quad \begin{aligned} u_t &= -v_x, & v_t &= -u_x - \varepsilon v - \varepsilon[\beta_0 u + \beta_1 u^2 - \beta_2 u^3]|_{x=1}, \\ v|_{x=0} &= v|_{x=1}, & v|_{x=1} + \beta_0 u|_{x=1} + \beta_1 u^2|_{x=1} - \beta_2 u^3|_{x=1} &= 0. \end{aligned}$$

В качестве фазовых пространств (пространств начальных условий $(u(x), v(x))$) краевых задач (1.5), (1.7), (1.8) возьмем соответственно нелинейные многообразия Σ_j , $j = 1, 2, 3$, в гильбертовом пространстве $W_2^1([0, 1]; \mathbb{R}^2)$, определяющиеся равенствами

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \{(u(x), v(x)) : u|_{x=0} = 0, v|_{x=1} + \beta_0 \sigma + \beta_1 \sigma^2 - \beta_2 \sigma^3 = 0\}, \\ \Sigma_2 &= \{(u(x), v(x)) : u|_{x=0} = 0, v|_{x=1} + \beta_0 u|_{x=1} + \beta_1 u^2|_{x=1} - \beta_2 u^3|_{x=1} = 0\}, \\ \Sigma_3 &= \left\{ (u(x), v(x)) : v|_{x=0} = v|_{x=1} = -[\beta_0 u + \beta_1 u^2 - \beta_2 u^3]|_{x=1}, \int_0^1 u(x) dx = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Напомним, что понятие фазового пространства позволяет обычным образом определять основные понятия математической теории колебаний. Отметим также, что однозначная разрешимость отвечающих задачам (1.5), (1.7), (1.8) смешанных задач с начальными условиями из Σ_j , $j = 1, 2, 3$, устанавливается стандартно: достаточно системы из (1.5), (1.7), (1.8) проинтегрировать по характеристикам, а затем результат подставить в указанные там же граничные условия (см. [11]). Заметим, наконец, что требование $\int_0^1 u dx = 0$ в определении Σ_3 вызвано равенством $\int_0^1 u(t, x) dx \equiv \text{const}$, справедливым для любого решения задачи (1.8).

§ 2. Метод бесконечномерной нормализации

Периодическими по t решениями краевых задач (1.5), (1.7) мы будем интересоваться при дополнительных предположениях

$$(2.1) \quad \beta_0 = \varepsilon/2 + \gamma\varepsilon^2, \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = 1,$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$, а параметр $\gamma > 0$ имеет порядок единицы. Первое из условий (2.1) продиктовано чисто математическими причинами, которые прояснятся ниже. Допущение $\beta_1 = 0$, означающее симметричность нелинейной характеристики, сделано лишь для простоты, ибо все получающиеся результаты сохраняются и при $\beta_1 \neq 0$. Наконец, третье из равенств (2.1) легко обеспечивается подходящей нормировкой переменных u, v .

Подставляя (2.1) в задачу (1.5) и сохраняя во втором граничном условии (1.5) только существенные для дальнейшего слагаемые, приходим к краевой задаче

$$(2.2) \quad \begin{aligned} u_t &= -v_x, & v_t &= -u_x - \varepsilon v, \\ u|_{x=0} &= 0, & v|_{x=1} + \left(\frac{\varepsilon}{2} + \gamma\varepsilon^2\right)u|_{x=1} + \frac{\varepsilon^2}{2} \int_0^1 v dx - u^3|_{x=1} &= 0. \end{aligned}$$

Для построения ее периодических по t решений воспользуемся методом бесконечномерной нормализации. Этот метод представляет собой специальный вариант асимптотического метода Крылова–Боголюбова–Митропольского [23] и смыкается в алгоритмическом плане с методом квазинормальных форм Ю. С. Колесова [17], [18]. Следуя методике этих работ, подставим в (2.2) ряды

$$(2.3) \quad \begin{aligned} u &= \varepsilon u_0(t, \tau, x) + \varepsilon^2 u_1(t, \tau, x) + \varepsilon^3 u_2(t, \tau, x) + \dots, \\ v &= \varepsilon v_0(t, \tau, x) + \varepsilon^2 v_1(t, \tau, x) + \varepsilon^3 v_2(t, \tau, x) + \dots, \end{aligned}$$

где $\tau = \varepsilon^2 t$, все функции являются 4-периодическими по t ,

$$(2.4) \quad \begin{aligned} u_0 &= \sum_{n=1}^{\infty} [z_n(\tau) \exp(i\omega_n t) + \bar{z}_n(\tau) \exp(-i\omega_n t)] (-1)^{n-1} \sin \omega_n x, \\ v_0 &= i \sum_{n=1}^{\infty} [z_n(\tau) \exp(i\omega_n t) - \bar{z}_n(\tau) \exp(-i\omega_n t)] (-1)^{n-1} \cos \omega_n x, \end{aligned}$$

$\omega_n = \pi(2n-1)/2$, а комплексные “амплитуды” z_n таковы, что сходится ряд с общим членом $\omega_n^2 |z_n|^2$ (тогда $u_0, v_0 \in W_2^1$ по переменной x). Приравнявая, далее, коэффициенты при одинаковых степенях ε , последовательно определяем $u_j, v_j, j = 1, 2$, и неизвестные амплитуды $z_n, n = 1, 2, \dots$. Подчеркнем, что отыскание автоколебаний краевой задачи (2.2) в виде (2.3) вполне естественно, так как соотношения (2.4) (при фиксированном τ) задают произвольное решение линейной краевой задачи, получающейся из задачи (2.2) при $\varepsilon = 0$ и после отбрасывания нелинейности.

На первом шаге описанного алгоритма приходим к краевой задаче

$$(2.5) \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} = -\frac{\partial v_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial u_1}{\partial x} - v_0, \quad u_1|_{x=0} = 0, \quad v_1|_{x=1} + \frac{1}{2}u_0|_{x=1} = 0,$$

решение которой будем искать в виде рядов той же структуры, что и соответствующие неоднородности, т.е. в виде

$$(2.6) \quad \begin{aligned} u_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} (z_n A_n(x) \exp(i\omega_n t) + \bar{z}_n \bar{A}_n(x) \exp(-i\omega_n t)), \\ v_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} (z_n B_n(x) \exp(i\omega_n t) + \bar{z}_n \bar{B}_n(x) \exp(-i\omega_n t)). \end{aligned}$$

На этом пути для A_n, B_n получаем линейные неоднородные краевые задачи, разрешимость которых обеспечивает слагаемое $(\varepsilon/2)u|_{x=1}$ во втором граничном условии (2.2). Таким образом, теперь становятся понятными мотивы специального предположения в (2.1) относительно вида коэффициента усиления β_0 . Несложный анализ упомянутых краевых задач приводит к равенствам

$$(2.7) \quad A_n = -\frac{i}{2}(-1)^{n-1}x \cos \omega_n x, \quad B_n = \frac{i}{\omega_n} [A'_n(x) + i(-1)^{n-1} \cos \omega_n x], \quad n = 1, 2, \dots$$

На втором шаге после исключения v_2 имеем дело с краевой задачей

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u_2 &= -2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t \partial \tau} - \frac{\partial u_1}{\partial t}, \\ u_2|_{x=0} &= 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=1} = \frac{d}{dt} [\gamma u_0|_{x=1} - u_0^3|_{x=1}], \end{aligned}$$

решение которой ищем в виде

$$(2.9) \quad u_2 = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n(x, \tau) \exp(i\omega_n t) + \bar{C}_n(x, \tau) \exp(-i\omega_n t)).$$

Нетрудно проверить, что, с учетом (2.7), для C_n , $n = 1, 2, \dots$, получаются краевые задачи

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \frac{d^2 C_n}{dx^2} + \omega_n^2 C_n &= (-1)^{n-1} \left[2i\omega_n \frac{dz_n}{d\tau} \sin \omega_n x + \frac{\omega_n}{2} z_n x \cos \omega_n x \right], \\ C_n|_{x=0} &= 0, \quad \frac{dC_n}{dx} \Big|_{x=1} = i\omega_n f_n. \end{aligned}$$

Здесь f_n — коэффициент при $\exp(i\omega_n y)$ ряда Фурье функции $\gamma w(\tau, y) - w^3(\tau, y)$, где

$$(2.11) \quad w(\tau, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (z_n(\tau) \exp(i\omega_n y) + \bar{z}_n(\tau) \exp(-i\omega_n y)).$$

Условия разрешимости задач (2.10) приводят к счетной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(2.12) \quad \frac{dz_n}{d\tau} = \frac{i}{8\omega_n} z_n + f_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

для отыскания неизвестных амплитуд z_n , $n = 1, 2, \dots$. Привлекая, далее, функцию (2.11), без труда убеждаемся, что счетная система (2.12) “сворачивается” в краевую задачу

$$(2.13) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial \tau \partial y} = -\frac{1}{8} w + [\gamma - 3w^2] \frac{\partial w}{\partial y}, \quad w(\tau, y+2) \equiv -w(\tau, y).$$

Строгий смысл изложенным формальным построениям придается по той же схеме, что и в случае обыкновенных дифференциальных уравнений. Именно, с помощью построенных отрезков рядов (2.3) конструируется замена переменных, приводящая исходную задачу (2.2), с точностью до слагаемых порядка ε , к виду (2.12) (см. [11]). Таким образом, система (2.12), а значит, и краевая задача (2.13) представляют собой “укороченную” нормальную форму задачи (2.2). Поэтому справедливо следующее стандартное утверждение о соответствии между их периодическими решениями.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть краевая задача (2.13) имеет периодическое решение $w = w_0(\xi)$, $\xi = \sigma_0 \tau + y$, $\sigma_0 = \text{const}$, экспоненциально орбитально устойчивое или

дихотомичное (в метрике W_2^1). Тогда найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ в краевой задаче (2.2) ему отвечает цикл (периодическое по t решение) той же устойчивости с асимптотикой (2.3). При этом в формулах (2.4) следует положить

$$z_n(\tau) = w_n^0 \exp(i\omega_n \sigma_0 \tau), \quad n = 1, 2, \dots,$$

где $w_n^0, \bar{w}_n^0$ — коэффициенты Фурье функции $w_0(\xi)$ по системе $\exp(\pm i\omega_n \xi)$, $n \geq 1$.

Обратимся теперь к краевой задаче (1.7). Подставляя в нее (2.1), (2.3), (2.4) и действуя описанным выше образом, снова приходим к краевой задаче (2.13). Поэтому аналог теоремы 2.1 здесь также остается в силе.

В случае краевой задачи (1.8) возникает ряд новых моментов. Начнем с того, что, в отличие от двух предыдущих случаев, здесь автоколебания будем строить при условиях

$$(2.14) \quad \beta_0 = \varepsilon/4 + \gamma\varepsilon^2, \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = 1,$$

где по-прежнему $0 < \varepsilon \ll 1$, а параметр $\gamma > 0$ имеет порядок единицы.

Подставим, далее, в задачу (1.8) равенства (2.14) и ряды (2.3), в которых теперь

$$(2.15) \quad \begin{aligned} u_0 &= \sum_{n=1}^{\infty} [z_n(\tau) \exp(i\omega_n t) + \bar{z}_n(\tau) \exp(-i\omega_n t)] \cos \omega_n x, \\ v_0 &= -i \sum_{n=1}^{\infty} [z_n(\tau) \exp(i\omega_n t) - \bar{z}_n(\tau) \exp(-i\omega_n t)] \sin \omega_n x, \end{aligned}$$

$\omega_n = \pi(2n-1)$, $n = 1, 2, \dots$, и сходится ряд с общим членом $\omega_n^2 |z_n|^2$. В результате после приравнивания коэффициентов при ε^2 приходим к аналогичной (2.5) краевой задаче

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = -\frac{\partial v_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial u_1}{\partial x} - v_0, \quad v_1|_{x=0} = v_1|_{x=1} = -\frac{1}{4}u_0|_{x=1},$$

решение которой также будем искать в виде рядов (2.6). В итоге для A_n, B_n получаем равенства

$$(2.16) \quad A_n = \frac{i}{2} \left(x - \frac{1}{2} \right) \sin \omega_n x, \quad B_n = \frac{i}{\omega_n} [A'_n(x) - i \sin \omega_n x], \quad n = 1, 2, \dots$$

На втором шаге после исключения v_2 имеем дело с аналогичной (2.8) краевой задачей

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u_3 &= -\frac{\partial u_1}{\partial t} - 2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t \partial \tau}, \\ \frac{\partial u_3}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \frac{\partial u_3}{\partial x} \Big|_{x=1} = \frac{d}{dt} [\gamma u_0|_{x=1} - u_0^3|_{x=1}], \end{aligned}$$

решение которой также будем искать в виде (2.9). Непосредственная проверка с учетом (2.16) показывает, что для $C_n, n = 1, 2, \dots$, здесь получаются аналогичные (2.10) краевые задачи, условия разрешимости которых имеют вид

$$(2.17) \quad \frac{i\omega_n}{2} \frac{dz_n}{d\tau} = -\frac{1}{16}z_n + i\omega_n f_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

И наконец, привлекая функцию (2.11), убеждаемся, что, как и раньше, счетная система (2.17) сворачивается в краевую задачу

$$(2.18) \quad \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial \tau \partial y} = -\frac{1}{16}w + [\gamma - 3w^2] \frac{\partial w}{\partial y}, \quad w(\tau, y+1) \equiv -w(\tau, y).$$

При обосновании изложенных формальных построений в случае задачи (1.8) также возникают новые моменты. Для пояснения сути дела введем в рассмотрение характеристическое уравнение

$$(2.19) \quad \beta_0(1 - \operatorname{ch} \mu) + \frac{\mu}{\lambda} \operatorname{sh} \mu = 0, \quad \mu = \sqrt{\lambda^2 + \varepsilon \lambda},$$

для определения спектра устойчивости ее нулевого состояния равновесия. Несложная проверка показывает, что при условиях (2.14) корни уравнения (2.19) распадаются на две группы: $\lambda_n^1(\varepsilon), \bar{\lambda}_n^1(\varepsilon)$ и $\lambda_n^2(\varepsilon), \bar{\lambda}_n^2(\varepsilon)$, $n = 1, 2, \dots$, причем равномерно по n

$$\lambda_n^1(\varepsilon) = i\pi(2n-1) + O(\varepsilon^2), \quad \lambda_n^2(\varepsilon) = i2\pi n - \varepsilon/2 + O(\varepsilon^2).$$

Из результатов монографий [24], [25] следует, что первой группе этих корней в задаче (1.8) соответствует бесконечномерное центральное интегральное многообразие, экспоненциально орбитально устойчивое с показателем экспоненты порядка ε . Отметим еще, что указанное многообразие определено, естественно, в некоторой достаточно малой окрестности нулевого положения равновесия, а равенства (2.3), (2.15) (в силу своего построения) задают его асимптотику. Таким образом, система (2.17) представляет собой “укороченную” нормальную форму на данном многообразии, и следовательно, теорема 2.1 здесь остается в силе.

§3. Динамика нормальной формы

Отдельно остановимся на динамике по параметру γ автоколебаний краевых задач (2.13) и (2.18). С этой целью заметим, что обе они при подходящих нормировках переменных w, τ, y и замене τ на t, y на x приводятся к виду (2). Таким образом, интересующая нас проблема сводится к аналогичному вопросу для краевой задачи (2). Из теоремы 2.1 следует, что особый интерес представляют ее периодические решения типа бегущих волн, т.е. периодические решения вида

$$(3.1) \quad w = \theta(y), \quad y = \sigma t - x, \quad \sigma > 0.$$

Их динамика по λ подробно изучена в работах [11], [15]. Поэтому приведем лишь краткий обзор содержащихся там результатов.

Подставляя (3.1) в задачу (2), для нахождения функции $\theta(y)$ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение, которое после замены $y/\sqrt{\sigma} \rightarrow y$ принимает вид

$$(3.2) \quad \theta'' + r(\theta^2 - 1)\theta' + \theta = 0,$$

где $r = \lambda/\sqrt{\sigma}$. Заметим, что (3.2) – классическое уравнение Ван-дер-Поля, имеющее при всех $r > 0$ единственное периодическое решение $\theta = H(y, r)$, $H(y, 0) = 2 \cos y$, периода $T = T(r)$, $T(0) = 2\pi$, и удовлетворяющее также равенству $H(y + T/2, r) \equiv -H(y, r)$. Однако в силу того, что фигурирующая в (3.1) функция $\theta(y)$ периодична с периодом 2, нас интересует решение уравнения (3.2) периода $2/\sqrt{\sigma}$. Поэтому для определения неизвестного параметра r получаем уравнение

$$(3.3) \quad \lambda T(r) - 2r = 0.$$

При $\lambda \ll 1$, применяя к уравнению (3.3) в точке $\lambda = 0$, $r = 0$ теорему о неявной функции, однозначно определяем его решение $r = r_0(\lambda)$, $r_0(0) = 0$. Вспоминая, далее, о связи уравнения (3.2) с исходной задачей (2), заключаем, что последняя имеет периодическое решение

$$(3.4) \quad w = \theta_0(y, \lambda), \quad y = \sigma_0(\lambda)t - x,$$

где $\sigma_0(\lambda) = (\lambda/r_0(\lambda))^2$, $\theta_0(y, \lambda) = H(y/\sqrt{\sigma_0(\lambda)}, r_0(\lambda))$. Отметим также, что, наряду с решением (3.4), у задачи (2) при $\lambda \ll 1$ существуют и другие периодические решения, получающиеся из построенного с помощью принципа подобия:

$$(3.5) \quad w = \theta_n(y, \lambda), \quad y = \sigma_n(\lambda)t - x, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где $\theta_n = \theta_0((2n+1)y, (2n+1)\lambda)$, $\sigma_n(\lambda) = \sigma_0((2n+1)\lambda)/(2n+1)^2$.

Справедливо следующее утверждение (см. [11], [15])

ТЕОРЕМА 3.1. *По любому натуральному числу N можно указать такое достаточно малое $\bar{\lambda}_N > 0$, что при всех $0 < \lambda \leq \bar{\lambda}_N$ краевая задача (2) имеет экспоненциально орбитально устойчивые периодические решения (3.5) с номерами $n = 0, 1, \dots, N$.*

Отметим, что найденные решения краевой задачи (2) в форме волн стационарного профиля, описываемых уравнением Ван-дер-Поля, с физической точки зрения близки к автосолитонам, наблюдаемым, например, в кольцевом лазере в случае самосинхронизации мод (см. [26]). При такой интерпретации уравнение (3.3) представляет собой аналог нелинейного дисперсионного соотношения. Отметим еще, что в нашем случае “основной” период колебаний, т.е. период функции $\theta_0(y, \lambda)$, равен 2, а все функции $\theta_n(y, \lambda)$, $n \geq 1$, в силу принципа подобия имеют периоды $2/(2n+1)$. А отсюда и из теоремы 2.1 заключаем, что отвечающие решениям (3.5) периодические решения $(u_n(t, x, \varepsilon), v_n(t, x, \varepsilon))$, $n = 0, 1, 2, \dots$, исходных краевых задач (1.5), (1.7) имеют периоды $T_n(\varepsilon) = 4/(2n+1) + O(\varepsilon^2)$, а аналогичные им периодические решения краевой задачи (1.8) – периоды $T_n(\varepsilon) = 2/(2n+1) + O(\varepsilon^2)$.

Из теоремы 3.1 следует, что при $0 < \lambda \ll 1$ в краевой задаче (2) наблюдается явление буферности: существует асимптотически много циклов (3.5), причем можно гарантировать устойчивость любого фиксированного их числа. Далее, как показано

в [11], [15], каждый цикл (3.5) непрерывно продолжается по λ на интервал $0 < \lambda < \lambda_n$, $\lambda_n = \lambda_0/(2n+1)$, $\lambda_0 = 2/(3-2\ln 2)$, при $0 < \lambda_n - \lambda \ll 1$ становится релаксационным (в этом случае стремится к бесконечности параметр r в (3.2)), а при $\lambda \geq \lambda_n$ – разрывным. С физической точки зрения это вполне понятно: увеличение энергетического параметра λ в совокупности с эффектом самосинхронизации мод приводит сначала к усложнению формы каждого цикла (3.5), а затем (при $\lambda \geq \lambda_n$) – к полному его разрушению.

Способ исчезновения цикла (3.5) при прохождении λ через значение λ_n уместно назвать градиентной катастрофой в силу того, что при $\lambda \rightarrow \lambda_n - 0$ стремится к бесконечности его C^1 -норма, в то время как C -норма остается ограниченной. Данный феномен для периодических решений типа бегущих волн у нелинейного телеграфного уравнения отмечался ранее в работе [27]. Там, в частности, показано, что в момент градиентной катастрофы цикл может быть устойчивым.

Вопрос об аттракторах краевой задачи (2) при $\lambda > \lambda_0$ остается открытым. Наиболее вероятным здесь представляется следующее: все ее решения $w(t, x) \not\equiv 0$ при $t \rightarrow \infty$, оставаясь ограниченными в C -норме, стремятся к разрывным функциям.

Подведем некоторые итоги. Заметим, во-первых, что спектр собственных частот краевых задач (1.5), (1.7), (1.8) при условиях (2.1), (2.14) и при $\varepsilon = 0$ является, очевидно, эквидистантным. Во-вторых, как следует из теорем 2.1, 3.1 и из описанной выше динамики нормальной формы (2) по λ , при увеличении энергетического параметра γ в каждой из этих задач реализуется схема (1), т.е. происходит переход от буферности к разрывным колебаниям. Таким образом, получила подтверждение основная из отмеченных во Введении альтернатив, при которых имеем дело с модельной краевой задачей (2). Отметим еще, что диапазон изменения коэффициента усиления β_0 , в котором наблюдается явление буферности, в этих задачах весьма узок – имеет порядок ε^2 .

§ 4. Метод квазинормальных форм

С физической точки зрения переход в краевых задачах (1.5), (1.7), (1.8) от гладких колебаний к разрывным при увеличении коэффициента усиления означает, что в этом случае мы выходим за рамки применимости данных математических моделей. Поэтому естественно возникает вопрос о сглаживании разрывных колебаний путем учета каких-то дополнительных факторов. Как известно [22], подобная проблема решается введением паразитных индуктивностей, емкостей и т.д. Здесь мы проиллюстрируем указанный подход на примере автогенератора, описываемого задачей (1.7).

Рассмотрим краевую задачу

$$(4.1) \quad \begin{aligned} u_t &= -v_x, & v_t &= -u_x - \varepsilon v - \varepsilon[\beta_0 u + \beta_1 u^2 - \beta_2 u^3]_{x=1}, \\ u|_{x=0} &= 0, & \alpha v_x|_{x=1} + v|_{x=1} + \beta_0 u|_{x=1} + \beta_1 u^2|_{x=1} - \beta_2 u^3|_{x=1} &= 0, \end{aligned}$$

получающуюся из (1.7) при учете входной паразитной емкости C_0 нелинейного элемента ($\alpha = C_0/(lC)$). В качестве ее фазового пространства возьмем $(u, v) \in \overset{\circ}{W}_2^1(0, 1) \times W_2^1(0, 1)$, где $\overset{\circ}{W}_2^1 \subset W_2^1$ – подпространство функций, удовлетворяющих первому граничному условию из (4.1). Отличие от исходной задачи (1.7) заключается в том, что

за счет слагаемого $\alpha v_x|_{x=1}$ отпадает необходимость в требовании выполнения для начальных функций второго граничного условия (4.1).

Автоколебаниями задачи (4.1) будем интересоваться при $0 < \varepsilon \ll 1$, $0 < \alpha \ll 1$ и при условиях

$$(4.2) \quad \beta_0 = \varepsilon\beta, \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = 1,$$

где параметр $\beta > 0$ имеет порядок единицы. Далее, для согласования порядков малости ε и α заметим, что, во-первых, при условиях (4.2) и при $\varepsilon = 0$ спектр устойчивости нулевого положения равновесия задачи (4.1) состоит из чисто мнимых собственных значений $\pm i\sigma_n$, где $\sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_n < \dots$ — положительные корни уравнения $\operatorname{ctg} \sigma = \alpha\sigma$; во-вторых, при каждом фиксированном n справедливо асимптотическое представление

$$(4.3) \quad \sigma_n = \omega_n(1 - \alpha + \alpha^2) + (\omega_n^3/3 - \omega_n)\alpha^3 + O(\alpha^4),$$

где $\omega_n = \pi(2n - 1)/2$, $n = 1, 2, \dots$. Формулы (4.3) наводят на мысль о целесообразности условия

$$(4.4) \quad \alpha = \alpha_0\varepsilon^{1/3}, \quad \alpha_0 = \operatorname{const} > 0,$$

так как в этом случае “отход” от резонансности у собственных частот σ_n происходит в порядке ε , что согласуется с порядком малости коэффициента усиления β_0 в (4.2).

Итак, исследованию подлежит краевая задача

$$(4.5) \quad \begin{aligned} u_t &= -v_x, & v_t &= -u_x - \varepsilon v, \\ u|_{x=0} &= 0, & \varepsilon^{1/3}\alpha_0 v_x|_{x=1} + v|_{x=1} + \varepsilon[\beta u - u^3]|_{x=1} &= 0, \end{aligned}$$

получающаяся из (4.1) при условиях (4.2), (4.4) после нормировок $u/\sqrt{\varepsilon} \rightarrow u$, $v/\sqrt{\varepsilon} \rightarrow v$ и отбрасывания слагаемых порядка малости ε^2 . Для построения ее автоколебаний снова воспользуемся формализмом метода бесконечномерной нормализации, который в данном случае имеет определенную специфику. А именно, вместо (2.3) подставим в задачу (4.5) ряды

$$(4.6) \quad \begin{aligned} u &= u_0(\tau, s, x) + \varepsilon^{1/3}u_1(\tau, s, x) + \varepsilon^{2/3}u_2(\tau, s, x) + \varepsilon u_3(\tau, s, x) + \dots, \\ v &= v_0(\tau, s, x) + \varepsilon^{1/3}v_1(\tau, s, x) + \varepsilon^{2/3}v_2(\tau, s, x) + \varepsilon v_3(\tau, s, x) + \dots, \end{aligned}$$

где

$$(4.7) \quad \tau = (1 - \alpha_0\varepsilon^{1/3} + \alpha_0^2\varepsilon^{2/3})t, \quad s = \varepsilon t;$$

$$(4.8) \quad \begin{aligned} u_0 &= \sum_{n=1}^{\infty} [z_n(s) \exp(i\omega_n \tau) + \bar{z}_n(s) \exp(-i\omega_n \tau)] (-1)^{n-1} \sin \omega_n x, \\ v_0 &= i \sum_{n=1}^{\infty} [z_n(s) \exp(i\omega_n \tau) - \bar{z}_n(s) \exp(-i\omega_n \tau)] (-1)^{n-1} \cos \omega_n x; \end{aligned}$$

$$(4.9) \quad \begin{aligned} u_j &= \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^j(s, x) \exp(i\omega_n \tau) + \bar{A}_n^j(s, x) \exp(-i\omega_n \tau)), \\ v_j &= \sum_{n=1}^{\infty} (B_n^j(s, x) \exp(i\omega_n \tau) + \bar{B}_n^j(s, x) \exp(-i\omega_n \tau)). \end{aligned}$$

Здесь $j = 1, 2, 3$, $\omega_n = \pi(2n-1)/2$, а неизвестные комплексные амплитуды z_n таковы, что по-прежнему сходится ряд с общим членом $\omega_n^2 |z_n|^2$.

Приравнявая в (4.5) коэффициенты при $\varepsilon^{1/3}$, $\varepsilon^{2/3}$, для определения фигурирующих в (4.9) коэффициентов A_n^j , B_n^j , $j = 1, 2$, получаем краевые задачи

$$\begin{aligned} \frac{dB_n^1}{dx} + i\omega_n A_n^1 &= \alpha_0 i\omega_n z_n (-1)^{n-1} \sin \omega_n x, & A_n^1|_{x=0} &= 0, \\ \frac{dA_n^1}{dx} + i\omega_n B_n^1 &= -\alpha_0 \omega_n z_n (-1)^{n-1} \cos \omega_n x, & B_n^1|_{x=1} &= iz_n \alpha_0 \omega_n; \\ \frac{dB_n^2}{dx} + i\omega_n A_n^2 &= \alpha_0 i\omega_n A_n^1 - \alpha_0^2 i\omega_n z_n (-1)^{n-1} \sin \omega_n x, & A_n^2|_{x=0} &= 0, \\ \frac{dA_n^2}{dx} + i\omega_n B_n^2 &= \alpha_0 i\omega_n B_n^1 + \alpha_0^2 \omega_n z_n (-1)^{n-1} \cos \omega_n x, & B_n^2|_{x=1} &= -\alpha_0 \frac{dB_n^1}{dx} \Big|_{x=1}, \end{aligned}$$

которые оказываются разрешимыми за счет специального выбора поправок порядка $\varepsilon^{1/3}$ и $\varepsilon^{2/3}$ в (4.7). Несложный их анализ приводит к равенствам

$$(4.10) \quad A_n^1 = -\alpha_0 (-1)^{n-1} \omega_n z_n x \cos \omega_n x, \quad B_n^1 = i\alpha_0 (-1)^{n-1} \omega_n z_n x \sin \omega_n x;$$

$$(4.11) \quad \begin{aligned} A_n^2 &= \alpha_0^2 (-1)^{n-1} \omega_n z_n \left(x \cos \omega_n x - \frac{\omega_n x^2}{2} \sin \omega_n x \right), \\ B_n^2 &= -\alpha_0^2 (-1)^{n-1} i\omega_n z_n \left(x \sin \omega_n x + \frac{\omega_n x^2}{2} \cos \omega_n x \right). \end{aligned}$$

На третьем шаге после исключения A_n^3 приходим к краевым задачам

$$(4.12) \quad \begin{aligned} \frac{d^2 B_n^3}{dx^2} + \omega_n^2 B_n^3 &= 2\alpha_0 \omega_n^2 B_n^2 - 3\alpha_0^2 \omega_n^2 B_n^1 + 2\alpha_0^3 i\omega_n^2 z_n (-1)^{n-1} \cos \omega_n x \\ &\quad - \omega_n (-1)^{n-1} z_n \cos \omega_n x - 2\omega_n \frac{dz_n}{ds} (-1)^{n-1} \cos \omega_n x, \\ \frac{dB_n^3}{dx} \Big|_{x=0} &= 0, \quad B_n^3|_{x=1} = -\alpha_0 \frac{dB_n^2}{dx} \Big|_{x=1} - f_n. \end{aligned}$$

Здесь f_n — коэффициент при $\exp(i\omega_n y)$ ряда Фурье функции $\beta w - w^3$, где

$$(4.13) \quad w(s, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (z_n(s) \exp(i\omega_n y) + \bar{z}_n(s) \exp(-i\omega_n y)).$$

Условия разрешимости задач (4.12) с учетом (4.10), (4.11) приводят, в свою очередь, к счетной системе уравнений

$$(4.14) \quad \frac{dz_n}{ds} = -z_n/2 + i\alpha_0^3 [\omega_n^3/3 - \omega_n] z_n + f_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

для нахождения амплитуд z_n . И наконец, привлекая функцию (4.13), убеждаемся, что система (4.14) сворачивается в краевую задачу

$$(4.15) \quad \frac{\partial w}{\partial s} = -\frac{\alpha_0^3}{3} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \alpha_0^3 \frac{\partial w}{\partial y} + (\beta - 1/2)w - w^3, \quad w(s, y+2) \equiv -w(s, y).$$

Подчеркнем, что задача (4.15) не является нормальной формой для исходной задачи (4.5), ибо не существует корректно определенной замены, приводящей последнюю к виду (4.14). Для пояснения сути дела рассмотрим пространство l_2^1 последовательностей вида $z = (z_1, \bar{z}_1, \dots, z_n, \bar{z}_n, \dots)$, для которых конечна норма $\|z\| = (\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 |z_n|^2)^{1/2}$, и заметим, что построенные в §2 отрезки рядов (2.3) индуцируют обратимый ограниченный оператор, действующий из l_2^1 в $W_2^1([0, 1]; \mathbb{R}^2)$. А это, в свою очередь, позволяет сконструировать на них корректную замену переменных, приводящую задачу (2.2) к системе в пространстве l_2^1 , имеющей с точностью до слагаемых порядка ε вид (2.12). В случае же построенных выше отрезков рядов (4.6) ситуация иная: при произвольно фиксированном векторе $z \in l_2^1$, как следует из (4.10), имеем $u_1, v_1 \in L_2(0, 1)$ по переменной x , а ряды для u_2, v_2 и тем более для u_3, v_3 вообще носят формальный характер. Поэтому согласно введенной в [17], [18] терминологии краевую задачу (4.15) будем называть квазинормальной формой.

Несмотря на все вышесказанное, стандартное утверждение о соответствии между периодическими решениями задач (4.15) и (4.5) остается в силе. Точнее говоря, каждому периодическому решению $w = w_0(\xi)$, $\xi = \sigma_0 s + y$, $\sigma_0 = \text{const}$, задачи (4.15), экспоненциально орбитально устойчивому или дихотомичному, при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ в исходной задаче (4.5) соответствует цикл той же устойчивости, а его асимптотика получается из (4.6)–(4.9) по описанному в теореме 2.1 правилу. Доказательство этого утверждения вытекает из результатов работ [18] и [11], [28], где даны две различные версии обоснования метода квазинормальных форм в гиперболическом случае.

Отметим, что при $\beta < 1/2$ нулевое решение устойчиво как в исходной задаче (4.5), так и в рамках ее квазинормальной формы (4.15). Поэтому ниже динамикой последней будем интересоваться при $\beta > 1/2$. В этом случае после замены $y - \alpha_0^3 s \rightarrow y$, убивающей слагаемое $-\alpha_0^3 \partial w / \partial y$, подходящих нормировок переменных s, y, w и переобозначений $s \rightarrow t, y \rightarrow x$ задача (4.15) приводит к виду (3), где $a^2 = \alpha_0^3 / [24(\beta - 1/2)]$.

Остановимся на вопросе о существовании и устойчивости у краевой задачи (3) периодических решений

$$(4.16) \quad w = w(y), \quad y = (2n + 1)x + a^2(2n + 1)^3 \sigma t, \quad n = 0, 1, \dots$$

Подставляя (4.16) в (3), для определения антипериодической с периодом 1 функции $w(y)$ и постоянной σ приходим к дифференциальному уравнению

$$(4.17) \quad w''' + \sigma w' = \mu[w - w^3],$$

в котором параметр $\mu = a^{-2}(2n + 1)^{-3}$ для удобства будем считать меняющимся непрерывно. Справедливо следующее утверждение [10], [11].

ТЕОРЕМА 4.1. *Найдется такое достаточно малое $\mu_0 > 0$, что при всех $0 < \mu \leq \mu_0$ существует единственная пара достаточно гладких по своим переменным функций*

$$(\sigma(\mu), w(y, \mu)) : w(y + 1, \mu) \equiv -w(y, \mu), \quad \sigma(0) = \pi^2, \quad \sigma'(0) = 0, \\ w(y, 0) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \pi y, \quad w(1/2, \mu) \equiv 0,$$

обращающих уравнение (4.17) в тождество.

Сформулированная теорема доставляет сразу счетное число периодических решений

$$(4.18) \quad w = w(y, \mu), \quad y = (2n + 1)x + a^2(2n + 1)^3 \sigma(\mu)t, \quad \mu = [a^2(2n + 1)^3]^{-1},$$

задачи (3) с номерами n , удовлетворяющими неравенству

$$(4.19) \quad [a^2(2n + 1)^3]^{-1} \leq \mu_0.$$

Их устойчивость также исследована в работах [10], [11], где получено следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4.2. *Все периодические решения (4.18) экспоненциально орбитально устойчивы (в метрике пространства W_2^3 антипериодических с периодом 1 функций $w(y)$).*

Теоремы 4.1 и 4.2 описывают явление гипербуферности (см. Введение), реализующееся в краевой задаче (3) при любом значении параметра a . Отметим еще, что при $a \gg 1$ неравенство (4.19) заведомо выполняется для всех номеров $n = 0, 1, \dots$, а значит, в этом случае имеется полный набор циклов (4.16). Можно показать также, что при $a \gg 1$ имеются и торы всевозможных размерностей. Все они, однако, неустойчивы.

В случае $a \sim 1$ теоремы 4.1 и 4.2 гарантируют существование и устойчивость только циклов (4.18) с номерами, большими некоторого n_0 . Циклы, отвечающие меньшим номерам n , становятся нелокальными, т.е. усложняется их зависимость от t, x . И наконец, обращаясь к исходной задаче (4.5) и опираясь на аналог теоремы 2.1, заключаем, что при всех $0 < \varepsilon \ll 1$ в ней также наблюдается феномен буферности, однако речь здесь должна идти лишь о произвольном конечном числе устойчивых циклов.

Итак, краевая задача (4.5) представляет собой требуемую регуляризацию математической модели (1.7), о необходимости которой говорилось в начале этого параграфа. Действительно, при $\alpha = 0$ и при условиях (4.2) краевая задача (4.1) не может адекватно описывать работу реального физического объекта, так как при $\beta > 1/2$ все нетривиальные решения ее квазинормальной формы (4.15) (в которой теперь следует положить $\alpha_0 = 0$) стремятся при $s \rightarrow \infty$ к разрывным функциям. С учетом же малой паразитной емкости происходит регуляризация разрывных колебаний, причем сохраняется явление буферности.

§ 5. Случай неэквидистантного спектра

В этом параграфе проведем исследование автоколебаний краевой задачи (4.1) при условии (4.2) и при $\alpha \sim 1$. В данном случае спектр ее собственных частот ω_n , $n \geq 1$, неэквидистантен, так как ω_n — это занумерованные в порядке возрастания положительные корни уравнения $\operatorname{ctg} \omega = \alpha \omega$. В подобной ситуации, как известно (см. [11], [12], [16]), периодические решения имеют квазигармоническую форму, а их асимптотика строится с помощью классического одночастотного метода [23], применяемого к каждой частоте в отдельности.

Итак, анализу подлежит аналогичная (4.5) краевая задача

$$(5.1) \quad \begin{aligned} u_t &= -v_x, & v_t &= -u_x - \varepsilon v, \\ u|_{x=0} &= 0, & \alpha v_x|_{x=1} + v|_{x=1} + \varepsilon[\beta u - u^3]|_{x=1} &= 0, \end{aligned}$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$, а параметры $\alpha, \beta > 0$ имеют порядок единицы. Следуя методике работы [12], фиксируем произвольно номер n и подставим в (5.1) ряды

$$(5.2) \quad \begin{aligned} u &= u_0(\tau, x) + \varepsilon u_1(\tau, x) + \dots, & v &= v_0(\tau, x) + \varepsilon v_1(\tau, x) + \dots, \\ \tau &= (1 + \varepsilon \delta_1 + \varepsilon^2 \delta_2 + \dots)t. \end{aligned}$$

Здесь $u_j(\tau, x), v_j(\tau, x), j \geq 0$, — подлежащие определению периодические по τ с периодом $2\pi/\omega_n$ функции, причем

$$(5.3) \quad \begin{aligned} u_0 &= \xi[\exp(i\omega_n \tau) + \exp(-i\omega_n \tau)] \sin \omega_n x, \\ v_0 &= i\xi[\exp(i\omega_n \tau) - \exp(-i\omega_n \tau)] \cos \omega_n x, \end{aligned}$$

а $\xi, \delta_j, j \geq 1$, — произвольные вещественные параметры, также подлежащие определению. Подчеркнем, что отыскание интересующих нас периодических решений в виде (5.2) вполне естественно, так как равенствами (5.3) с заменой τ на t задается произвольное $2\pi/\omega_n$ -периодическое решение задачи (5.1) при $\varepsilon = 0$.

Приравнивая в (5.1) коэффициенты при ε , для определения u_1, v_1 получаем линейную неоднородную краевую задачу, которая после исключения u_1 принимает вид

$$(5.4) \quad \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) v_1 &= -2\delta_1 \frac{\partial^2 v_0}{\partial \tau^2} - \frac{\partial v_0}{\partial \tau}, \\ \frac{\partial v_1}{\partial x} \Big|_{x=0} &= 0, & \alpha \frac{\partial v_1}{\partial x} \Big|_{x=1} + v_1 \Big|_{x=1} &= [u_0^3 - \beta u_0] \Big|_{x=1}. \end{aligned}$$

Ее решение будем искать в том же виде, что и соответствующие неоднородности, т.е. в виде тригонометрического многочлена

$$(5.5) \quad v_1 = A(x) \exp(i\omega_n \tau) + \bar{A}(x) \exp(-i\omega_n \tau) + B(x) \exp(3i\omega_n \tau) + \bar{B}(x) \exp(-3i\omega_n \tau).$$

Подставляя (5.5) в (5.4), для нахождения A, B приходим к краевым задачам

$$(5.6) \quad \begin{aligned} A'' + \omega_n^2 A &= -\xi \omega_n (1 + 2i\delta_1 \omega_n) \cos \omega_n x, \\ A'(0) &= 0, & \alpha A'(1) + A(1) &= 3\xi^3 \sin^3 \omega_n - \beta \xi \sin \omega_n; \end{aligned}$$

$$(5.7) \quad \begin{aligned} B'' + 9\omega_n^2 B &= 0, \\ B'(0) &= 0, & \alpha B'(1) + B(1) &= \xi^3 \sin^3 \omega_n. \end{aligned}$$

Краевая задача (5.6) является вырожденной, а условие ее разрешимости задается равенством

$$(5.8) \quad -\frac{\xi}{2}(1 + 2i\delta_1 \omega_n)(1 + \alpha + \alpha^2 \omega_n^2) + \beta \xi - 3\xi^3 \sin^2 \omega_n = 0.$$

Предположим, далее, что выполняется неравенство

$$(5.9) \quad \beta > \beta_n,$$

где $\beta_n = (1 + \alpha + \alpha^2 \omega_n^2)/2$. Тогда из (5.8) находим

$$(5.10) \quad \delta_1 = 0, \quad \xi = \sqrt{(\beta - \beta_n)/(3 \sin^2 \omega_n)},$$

а затем, решая задачи (5.6) и (5.7) (вторая из них – невырожденная), окончательно получаем

$$A(x) = -\frac{\xi}{2} x \sin \omega_n x, \quad B(x) = -\frac{\xi^3}{8\alpha^3 \omega_n^3} \cos 3\omega_n x.$$

И наконец, компонента u_1 определяется в виде тригонометрического многочлена структуры (5.5) из уравнения $\partial u_1 / \partial \tau = -\partial v_1 / \partial x$.

Как следует из [11], в принципе полученной информации достаточно для доказательства существования у задачи (5.1) периодического решения с нулевым приближением, задающимся равенствами (5.3), (5.10). Однако при необходимости описанный алгоритм можно продолжить. При этом разрешимости соответствующих линейных неоднородных краевых задач для $u_j(\tau, x)$, $v_j(\tau, x)$, $j \geq 1$, в классе нечетных тригонометрических полиномов аргумента $\omega_n \tau$ добиваемся за счет слагаемых вида (5.3), с точностью до которых определяются функции u_{j-1} , v_{j-1} , и очередной поправки к частоте δ_j .

Следующий этап – исследование свойств устойчивости построенного выше приближенного периодического решения. Линеаризуя на нем задачу (5.1) и отбрасывая слагаемые порядка малости ε^2 и выше, приходим к линейной краевой задаче

$$(5.11) \quad \begin{aligned} u_t &= -v_x, & v_t &= -u_x - \varepsilon v, \\ u|_{x=0} &= 0, & \alpha v_x|_{x=1} + v|_{x=1} + \varepsilon a(t)u|_{x=1} &= 0, \end{aligned}$$

где

$$(5.12) \quad a(t) = \beta - 3\xi^2[2 + \exp(2i\omega_n t) + \exp(-2i\omega_n t)] \sin^2 \omega_n,$$

а ξ задается в (5.10).

Следуя в очередной раз методике работы [12], при $m = 1, 2, \dots, m \neq n$, подставим в (5.11)

$$(5.13) \quad \begin{aligned} u &= [\sin \omega_m x + \varepsilon z_m(t, x)] \exp(i\omega_m + \varepsilon \lambda_m)t, \\ v &= [i \cos \omega_m x + \cos \omega_m x + \varepsilon w_m(t, x)] \exp(i\omega_m + \varepsilon \lambda_m)t, \end{aligned}$$

где постоянная λ_m и функции z_m , w_m , периодические по t с периодом $2\pi/\omega_n$, подлежат определению. Приравнивая затем коэффициенты при ε , для z_m , w_m получаем линейную неоднородную краевую задачу, которая после исключения z_m приобретает вид

$$(5.14) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 w_m}{\partial t^2} + 2i\omega_m \frac{\partial w_m}{\partial t} - \omega_m^2 w_m - \frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2} &= \omega_m (2\lambda_m + 1) \cos \omega_m x, \\ \frac{\partial w_m}{\partial x} \Big|_{x=0} &= 0, & \alpha \frac{\partial w_m}{\partial x} \Big|_{x=1} + w_m|_{x=1} + a(t) \sin \omega_m &= 0. \end{aligned}$$

Из структуры фигурирующей в задаче (5.14) неоднородности (см. (5.12)) заключаем, что ее решение следует искать в форме

$$(5.15) \quad w_m = C_{0,m}(x) + C_{1,m}^+(x) \exp(2i\omega_n t) + C_{1,m}^-(x) \exp(-2i\omega_n t).$$

Подставляя, далее, (5.15) в (5.14), для $C_{0,m}$ получаем аналогичную (5.6) вырожденную краевую задачу, разрешимости которой добиваемся выбором λ_m . Соответствующий анализ приводит к равенствам

$$(5.16) \quad C_{0,m} = -\frac{1}{2}(2\lambda_m + 1)x \sin \omega_m x, \quad \lambda_m = [2\beta_n - \beta_m - \beta]/(2\beta_m).$$

В случае же $C_{1,m}^\pm$ имеем дело с невырожденными краевыми задачами, из которых определяем:

$$(5.17) \quad C_{1,m}^\pm(x) = \mp \frac{3\xi^2}{2\alpha^3\omega_n(\omega_m \pm \omega_n)^2} \cos(\omega_m \pm 2\omega_n)x.$$

При $m = n$, т.е. на собственной частоте ω_n периодического решения, описанный выше алгоритм приходится несколько видоизменить. Связано это с тем, что при $m = n$ обращается в нуль знаменатель в формуле для $C_{1,m}^-$ (см (5.17)). Поэтому здесь, опираясь на методику работы [29], вместо (5.13) подставим в (5.11)

$$u = [Z_0(t, x) + \varepsilon Z_1(t, x)] \exp(\varepsilon Dt), \quad v = [W_0(t, x) + \varepsilon W_1(t, x)] \exp(\varepsilon Dt),$$

где

$$\begin{aligned} Z_0(t, x) &= [\exp(i\omega_n t) \sin \omega_n x, \exp(-i\omega_n t) \sin \omega_n x], \\ W_0(t, x) &= [\exp(i\omega_n t) i \cos \omega_n x, -\exp(-i\omega_n t) i \cos \omega_n x], \end{aligned}$$

а элементы $2\pi/\omega_n$ -периодических по t матриц-строк

$$Z_1(t, x) = [z_{1,n}, \bar{z}_{1,n}], \quad W_1(t, x) = [w_{1,n}, \bar{w}_{1,n}]$$

и постоянной матрицы $D = (d_{jk})$, $j, k = 1, 2$, подлежат определению. Действуя, далее, указанным выше образом, для функций $z_{1,n}$, $w_{1,n}$ получим линейную неоднородную краевую задачу, из условий разрешимости которой в классе тригонометрических полиномов аргумента $\omega_n t$ находим элементы матрицы D . Опуская вполне понятные выкладки, приведем сразу окончательный результат:

$$(5.18) \quad D = \begin{pmatrix} d & d \\ d & d \end{pmatrix}, \quad d = \frac{\beta_n - \beta}{2\beta_n}.$$

Отметим, что одно собственное значение матрицы (5.18) — нулевое (ибо (5.11) — это линеаризация на цикле), а второе в силу (5.9) отрицательно.

Обоснование описанных алгоритмов и доказательство существования у краевой задачи (5.1) периодического решения с асимптотикой (5.2) проводятся по стандартным схемам (см. [11]). В нашем случае из проделанных выше построений и из результатов [11] вытекает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть выполнено неравенство (5.9), отличны от нуля все числа λ_m из (5.16) и количество положительных среди них равно m_0 . Тогда найдется такое достаточно малое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ краевая задача (5.1) имеет цикл (периодическое по t решение) с нулевым приближением (5.3), (5.10). Данный цикл экспоненциально орбитально устойчив при $m_0 = 0$ и дихотомичен при $m_0 > 0$ с размерностью неустойчивого многообразия, равной $2m_0 + 1$.

Заметим, что число m_0 всегда конечно, поскольку $\lambda_m \rightarrow -1/2$ при $m \rightarrow \infty$. Отметим, далее, что, как следует из приведенной теоремы, цикл (5.2) с номером $n = 1$ устойчив при всех $\beta > \beta_1$. Циклы же с номерами $n \geq 2$, бифурцирующие из нуля при $\beta = \beta_n$, сначала, т.е. при $\beta_n < \beta < 2\beta_n - \beta_1$, неустойчивы, но становятся устойчивыми при дальнейшем увеличении параметра β , а именно, при

$$(5.19) \quad \beta > 2\beta_n - \beta_1.$$

Тем самым, при подходящем увеличении β можно гарантировать существование у краевой задачи (5.1) любого наперед заданного числа устойчивых циклов, т.е. наблюдается феномен буферности.

Итак, краевая задача (5.1) иллюстрирует описанную во Введении типовую ситуацию, когда в гиперболической системе с неэквидистантным спектром собственных частот при увеличении энергетических параметров реализуется явление буферности. Далее, при $\alpha \rightarrow 0$, т.е. при переходе в (5.1) от неэквидистантного спектра к эквидистантному, и при любом фиксированном $\beta > 1/2$ условия самовозбуждения (5.9) и устойчивости (5.19) начинают выполняться для все большего количества частот. Наконец, при $\alpha \sim \varepsilon^{1/3}$ часть устойчивых циклов (на младших модах) теряет гармоническую форму: в этом случае процесс описывается модельной краевой задачей (3). Таким образом, получил подтверждение и отмеченный во Введении сценарий перехода от неэквидистантного спектра к эквидистантному, связанный с сохранением феномена буферности.

§ 6. Гибридная краевая задача

Из приведенных выше результатов следует, что базовые краевые задачи (2) и (3) при определенных условиях могут описывать автоколебания в рамках одного и того же автогенератора. Поэтому естественно возникает вопрос о нахождении такой универсальной математической модели, анализ которой приводил бы к некоторой гибридной краевой задаче, включающей задачи (2) и (3) как частные случаи. Как будет показано в этом параграфе, в качестве такой математической модели можно взять краевую задачу

$$(6.1) \quad \begin{aligned} u_t &= -v_x, & v_t &= -u_x - \varepsilon v - \varepsilon[\beta_0 u - u^3]|_{x=1}, \\ u|_{x=0} &= 0, & \varepsilon^{2/3}\alpha_0 v_x|_{x=1} + v|_{x=1} + [\beta_0 u - u^3]|_{x=1} &= 0, \end{aligned}$$

получающуюся из (1.7) при учете малой паразитной емкости $C_0/(lC) = \varepsilon^{2/3}\alpha_0$, $\alpha_0 = \text{const} > 0$, и специальном выборе коэффициента усиления

$$(6.2) \quad \beta_0 = \varepsilon/2 + \alpha_0 \varepsilon^{5/3}/2 + \varepsilon^2 \gamma, \quad \gamma = \text{const} > 0.$$

Для построения автоколебаний задачи (6.1) при условии (6.2) воспользуемся в очередной раз формализмом метода бесконечномерной нормализации. В данном случае подставим в (6.1) ряды

$$\begin{aligned} u &= \varepsilon u_0 + \varepsilon^{5/3} u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^{7/3} u_3 + \varepsilon^{8/3} u_4 + \varepsilon^3 u_5 + \dots, \\ v &= \varepsilon v_0 + \varepsilon^{5/3} v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \varepsilon^{7/3} v_3 + \varepsilon^{8/3} v_4 + \varepsilon^3 v_5 + \dots, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} u_j &= u_j(\tau, s, x), \quad v_j = v_j(\tau, s, x), \quad j = 0, 1, \dots, 5, \\ \tau &= (1 - \alpha_0 \varepsilon^{2/3} + \alpha_0^2 \varepsilon^{4/3})t, \quad s = \varepsilon^2 t, \end{aligned}$$

а функции u_0, v_0 заданы в (4.8). Действуя, далее, обычным образом, для u_1, v_1 приходим к формулам (4.9), (4.10), для u_2, v_2 — к формулам (2.6), (2.7), где t следует заменить на τ , а для u_3, v_3 — к формулам (4.9) (при $j = 2$), (4.11).

Некоторый новый момент возникает на четвертом шаге. Здесь после исключения u_4 имеем дело с краевой задачей

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) v_4 &= 2\alpha_0 \frac{\partial^2 v_2}{\partial \tau^2} + \alpha_0 \frac{\partial v_0}{\partial \tau} - \frac{\partial v_1}{\partial \tau}, \\ \frac{\partial v_4}{\partial x} \Big|_{x=0} &= 0, \quad v_4 \Big|_{x=1} = -\alpha_0 \frac{\partial v_2}{\partial x} \Big|_{x=1} - \frac{1}{2} u_1 \Big|_{x=1} - \frac{\alpha_0}{2} u_0 \Big|_{x=1}, \end{aligned}$$

решение которой ищем в виде

$$v_4 = \sum_{n=1}^{\infty} z_n V_n(x) \exp(i\omega_n \tau) + \bar{z}_n \bar{V}_n(x) \exp(-i\omega_n \tau).$$

В результате для определения коэффициентов V_n , $n = 1, 2, \dots$, приходим к краевым задачам

$$\begin{aligned} V_n'' + \omega_n^2 V_n &= -2\alpha_0 (-1)^{n-1} \omega_n^2 x \sin \omega_n x, \\ V_n'(0) &= 0, \quad V_n(1) = -\alpha_0/2, \end{aligned}$$

которые оказываются разрешимыми за счет специального выбора поправки порядка $\varepsilon^{5/3}$ в (6.2).

На пятом шаге из условий разрешимости в классе тригонометрических рядов вида (4.9) краевой задачи для u_5, v_5 получаем аналогичную (2.12) счетную систему уравнений

$$\frac{dz_n}{ds} = i\alpha_0^3 [\omega_n^3/3 - \omega_n] z_n + i(8\omega_n)^{-1} z_n + f_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Привлекая, далее, функцию (4.13), убеждаемся, что эта система сворачивается в краевую задачу

$$(6.3) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial y} + \frac{\alpha_0^3}{3} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\alpha_0^3 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{w}{8} + [\gamma - 3w^2] \frac{\partial w}{\partial y}, \quad w(s, y+2) \equiv -w(s, y).$$

Отметим, что, как и в предыдущем случае, задача (6.3) представляет собой лишь квазинормальную форму для исходной задачи (6.1). Однако и здесь аналог теоремы 2.1 о соответствии между их грубыми периодическими решениями остается в силе.

Выполняя в задаче (6.3) замену $y - \alpha_0^3 s \rightarrow y$, подходящие нормировки переменных s , y , w и переобозначая в конечном итоге s через t , y через x , приведем ее к каноническому виду

$$(6.4) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} + a^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = w + \lambda(1 - w^2) \frac{\partial w}{\partial x}, \quad w(t, x + 1) \equiv -w(t, x),$$

где $a \neq 0$, $\lambda > 0$. Эта краевая задача и является искомым гибридом, включающим в себя задачи (2) и (3) как частные случаи. Действительно, к первой же из них приходим, полагая $a = 0$ в (6.4). Для получения же задачи (3) в (6.4) положим $a^2 = \sigma^2 \lambda$, выполним нормировку времени $\lambda t \rightarrow t$, сократим на λ и устремим λ к бесконечности. В результате приходим к задаче

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} + \sigma^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = (1 - w^2) \frac{\partial w}{\partial x}, \quad w(t, x + 1) \equiv -w(t, x),$$

которая после “сбрасывания” дифференцирования по x приводится к виду (3).

В заключение добавим, что гибридная краевая задача (6.4) наследует свойства задачи (3), а именно, при любом фиксированном $a \neq 0$ она имеет счетное число устойчивых периодических решений (4.16) с номерами n , большими некоторого n_0 . Тем самым, в исходной краевой задаче (6.1) при условии (6.2) и при всех $0 < \varepsilon \ll 1$ по-прежнему наблюдается феномен буферности.

§ 7. Заключительные замечания

Итак, фундаментальность краевых задач (2) и (3) проиллюстрирована в очередной раз на новом фактическом материале. Ясно также, что список конкретных радиофизических примеров, анализ которых приводит к задачам (2) и (3), можно продолжить. Однако мы сознательно ограничились рассмотрением лишь круга вопросов, связанных с распределенными аналогами генератора Ван-дер-Поля. Тем самым, попутно решена интересная прикладная проблема, включающая в себя следующие два аспекта. Во-первых, описаны физические идеи, лежащие в основе создания указанных генераторов. Во-вторых, проведено теоретическое исследование автоколебаний в соответствующих математических моделях и выявлена главная особенность – феномен буферности.

Наконец, следует отметить, что к настоящему времени имеется целая серия экспериментов (поставленных В. Ф. Камбуловым и частично опубликованных в [20], [21]), подтверждающая физическую реализуемость этого феномена. Так, например, в генераторе, моделирующемся краевой задачей (1.8), удалось обнаружить до шести различных сосуществующих периодических режимов, реализация каждого из которых зависела (при фиксированных прочих параметрах) только от задания подходящих начальных условий для тока и напряжения.

Возвращаясь к математическим аспектам рассмотренных проблем, напомним, что, как уже отмечалось во Введении, при исследовании конкретных гиперболических систем могут возникать не сами модельные задачи (2) и (3), а их модификации. Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим два типовых примера.

В качестве первого примера возьмем краевую задачу

$$(7.1) \quad u_{tt} + (3u^2 - \varepsilon)u_t + \mu u = u_{xx}, \quad u|_{x=0} = u_x|_{x=1} = 0,$$

где $0 < \varepsilon, \mu \ll 1$, и заметим, что ее собственные частоты

$$\omega_n = \sqrt{\mu + \pi^2(2n+1)^2/4}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

при $\mu = 0$ находятся во всевозможных резонансных соотношениях нечетных порядков, а при $\mu > 0$ они теряют эквидистантность. Поэтому подставим в нее $\mu = \varkappa\varepsilon$, $\varkappa = \text{const} > 0$, и изучим ее динамику при уменьшении $\varkappa$ методом бесконечномерной нормализации.

Следуя описанной в §2 методике, положим в (7.1)

$$u = \sqrt{\varepsilon} u_0(t, s, x) + \varepsilon^{3/2} u_1(t, s, x) + \dots, \quad s = \varepsilon t,$$

$$u_0 = \sum_{n=0}^{\infty} [z_n(s) \exp(i\omega_n t) + \bar{z}_n(s) \exp(-i\omega_n t)] \sin \omega_n x,$$

где $\omega_n = \pi(2n+1)/2$, и приравняем коэффициенты при $\varepsilon^{3/2}$. В итоге из условий разрешимости в классе 4-периодических по t функций краевой задачи для u_1 выводим аналогичную (2.12) счетную систему дифференциальных уравнений, которая сворачивается в скалярную краевую задачу

$$(7.2) \quad 2 \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial y} = -\varkappa w + [1 - 3M(w^2) - 3w^2] \frac{\partial w}{\partial y}, \quad w(s, y+2) \equiv -w(s, y).$$

Здесь $M(*)$ – среднее значение по y ,

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} (w_n \exp(i\omega_n y) + \bar{w}_n \exp(-i\omega_n y)), \quad w_n = -iz_n/2.$$

Далее, посредством подходящих нормировок s, y, w и замен y на x, s на t приведем задачу (7.2) к каноническому виду:

$$(7.3) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} = w + \lambda [1 - M(w^2) - w^2] \frac{\partial w}{\partial x}, \quad w(t, x+1) \equiv -w(t, x),$$

где $\lambda = (2\varkappa)^{-1} > 0$, $M(*)$ – среднее значение по x . Остается добавить, что краевые задачи (2) и (7.3) имеют не только сходную структуру, но, как показано в [11], и идентичные динамические свойства по параметру λ .

Рассмотренный пример представляет интерес и в том плане, что иллюстрирует еще одну отмеченную во Введении возможность реализации схемы (1), связанную с переходом от неэквидистантного спектра собственных частот к эквидистантному.

Однако, как показано в §§ 4, 5, данный переход может вызвать и прямо противоположные последствия, т.е. увеличение числа сосуществующих устойчивых циклов.

Для того чтобы убедиться в этом еще раз, рассмотрим второй пример – краевую задачу

$$(7.4) \quad u_{tt} + (3u^2 - \varepsilon)u_t = u_{xx}, \quad -\mu u_x|_{x=0} + u|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=1} = 0,$$

где по-прежнему $0 < \varepsilon, \mu \ll 1$. Поскольку ее собственные частоты – положительные корни уравнения $\operatorname{ctg} \omega = \mu \omega$, то здесь, как и в § 4, целесообразно положить

$$(7.5) \quad \mu = \alpha \varepsilon^{1/3}, \quad \alpha = \operatorname{const} > 0.$$

Применяя, далее, к задаче (7.4) при условии (7.5) описанный в § 4 метод, приходим в конечном итоге к модельной краевой задаче

$$(7.6) \quad \frac{\partial w}{\partial t} + a^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = w - 3M(w^2)w - w^3, \quad w(t, x+1) \equiv -w(t, x),$$

где $a^2 = \alpha^3/12$, $M(*)$ – среднее значение по x . Отметим, наконец, что, как установлено в [11], данная задача, так же, как и задача (2), обладает свойством гипербуферности.

Суммируя все вышесказанное, приходим к выводу, что инвариантность задач (2) и (3) имеет место в некотором обобщенном смысле, т.е. с точностью до незначительных структурных изменений, не влияющих принципиально на динамику. Выбор же в качестве эталонных именно задач (2) и (3) обусловлен их максимальной структурной простотой.

В связи с этим уместно напомнить, что задача (2) впервые была получена в статье [15], а задача (3) сначала, безотносительно к каким-либо приложениям, рассматривалась в работе [10] и лишь впоследствии нашла применение в радиофизике (см. [11], [16]). Что же касается гибридной краевой задачи (6.4), то она является новой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Захаров А. А., Колесов Ю. С. Пространственно неоднородные режимы в задаче хищник-жертва // Нелинейные колебания и экология. Ярославль: ЯрГУ, 1984. С. 3–15.
- [2] Колесов А. Ю. Существование асимптотически большого числа устойчивых бегущих волн в одной трехмерной системе параболических уравнений // Методы качественной теории дифференциальных уравнений. Горький: ГГУ, 1986. С. 57–66.
- [3] Колесов А. Ю. Автоколебания сингулярно возмущенных параболических систем первой степени негрубости // Матем. заметки. 1991. Т. 49. № 5. С. 62–69.
- [4] Колесов А. Ю. Бифуркация периодических решений сингулярно возмущенных параболических систем первой степени негрубости // Укр. матем. журн. 1990. Т. 42. № 8. С. 1037–1042.
- [5] Колесов А. Ю. Теоретическое объяснение явления диффузионной буферности // Моделирование динамики популяций. Н. Новгород: НГУ, 1990. С. 35–38.
- [6] Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Диффузионная буферность в одной математической модели биологии // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62. № 5. С. 135–164.
- [7] Колесов А. Ю., Колесов Ю. С. Бифуркация автоколебаний сингулярно возмущенного волнового уравнения // Докл. АН СССР. 1990. Т. 315. № 2. С. 281–283.
- [8] Колесов А. Ю. Устойчивость автоколебаний телеграфного уравнения, бифурцирующих из состояния равновесия // Матем. заметки. 1992. Т. 51. № 2. С. 59–65.
- [9] Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Построение периодических решений уравнения типа Буссинеска с помощью метода квазинормальных форм // Фунд. и прикл. матем. 1995. Т. 1. № 1. С. 207–220.

- [10] Колесов А. Ю. Существование счетного числа устойчивых циклов в средах с дисперсией // Изв. РАН. Сер. матем. 1995. Т. 59. № 3. С. 141–158.
- [11] Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Асимптотические методы исследования периодических решений нелинейных гиперболических уравнений // Тр. МИАН. 1998. Т. 222. С. 1–192.
- [12] Витт А. А. Распределенные автоколебательные системы // Журн. технич. физ. 1934. Т. 4. № 1. С. 144–157.
- [13] Витт А. А. К теории скрипичной струны // Журн. технич. физ. 1936. Т. 6. № 9. С. 1459–1479.
- [14] Азьян Ю. М., Мигулин В. В. Об автоколебаниях в системах с запаздывающей обратной связью // Радиотехн. и электроника. 1956. Т. 1. № 1. С. 126–130.
- [15] Камбулов В. Ф., Колесов А. Ю. Об одном модельном гиперболическом уравнении, возникающем в радиофизике // Матем. моделирование. 1996. Т. 8. № 1. С. 93–102.
- [16] Камбулов В. Ф., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Теоретический и экспериментальный анализ феномена буферности в длинной линии с туннельным диодом // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 5. С. 638–645.
- [17] Колесов Ю. С. Бифуркация инвариантных торов параболических систем с малой диффузией // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 3. С. 121–136.
- [18] Колесов Ю. С. Асимптотика и устойчивость нелинейных параметрических колебаний сингулярно возмущенного телеграфного уравнения // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 10. С. 57–72.
- [19] Камбулов В. Ф. Резонансность как источник релаксационных колебаний в системах телеграфных уравнений // Докл. АН. 1994. Т. 334. № 5. С. 569–570.
- [20] Камбулов В. Ф. Модель распределенного автогенератора Ван-дер-Поля // Радиотехн. и электроника. 1997. Т. 42. № 9. С. 1121–1124.
- [21] Камбулов В. Ф., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Исследование автоколебаний в генераторе Ван-дер-Поля с распределенными параметрами // Вестник МГУ. Сер. 3. Физика. Астрономия. 1999. № 3. С. 23–27.
- [22] Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959.
- [23] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
- [24] Митропольский Ю. А., Лыкова О. В. Интегральные многообразия в нелинейной механике. М.: Наука, 1973.
- [25] Хартман П. Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
- [26] Ланда П. С. Нелинейные колебания и волны. М.: Наука, 1997.
- [27] Колесов А. Ю. Релаксационные циклы нелинейного волнового уравнения, гладко зависящего от параметров // Докл. АН. 1995. Т. 341. № 2. С. 158–160.
- [28] Камбулов В. Ф., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Бифуркация пространственно неоднородных циклов у нелинейного волнового уравнения с малой диффузией // Труды ММО. 1997. Т. 59. С. 197–220.
- [29] Колесов Ю. С., Майоров В. В. Новый метод исследования устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с близкими к постоянным почти периодическими коэффициентами // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10. № 10. С. 1778–1788.

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова;
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН;
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
05.01.2000