Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Штерн, Проблема Каждана–Мильмана для полупростых компактных групп Ли, *УМН*, 2007, том 62, выпуск 1, 123–190

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm2696>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 16:15:17

УДК 517.986.6

Светлой памяти С. С. Аверинцева

Проблема Каждана–Мильмана для полупростых компактных групп Ли

А. И. Штерн

За последние 25–30 лет в теории отображений, близких к представлениям, – почти представлений, аппроксимативных представлений, квазипредставлений, псевдопредставлений и т. д. – накоплен большой материал и созданы технические приемы, имеющие нетривиальные приложения в алгебре и топологии, – от ограниченных когомологий до финслеровых метрик и инварианта Калаби в симплектической геометрии. В обзоре основные понятия и факты теории излагаются в связи с приводимым в данной работе доказательством “теоремы тривиальности” для конечномерных квазипредставлений компактных групп Ли: любое (не обязательно непрерывное) конечномерное унитарное квазипредставление с малым дефектом полупростой компактной группы Ли близко к обычному (непрерывному) представлению этой группы. Эта теорема, дающая полный ответ на вопрос Каждана–Мильмана 1982 г., является и частичным ответом на вопрос Громова 1995 г., а именно, хотя полупростая компактная группа в дискретной топологии не аменабельна, но все ее конечномерные унитарные квазипредставления являются возмущениями обычных представлений. Кроме того, указаны необходимые и достаточные условия справедливости аналога теоремы Ван дер Вардена (т.е. условия автоматической непрерывности всех локально ограниченных конечномерных представлений) для данной связной группы Ли и дано описание структуры всех конечномерных локально ограниченных квазипредставлений произвольных связных полупростых групп Ли. Обсуждаются и результаты, связанные с некоторыми другими направлениями исследований по теории отображений групп и алгебр, близких к представлениям, и их приложениями к геометрии и теории групп.

Библиография: 225 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	125
Глава I. Отображения, близкие к представлениям банаховых алгебр, и аменабельные банаховы алгебры	130
§ I.1. Банаховы бимодули, дуальные бимодули и умножения Аренса	130

Исследование поддержано грантом РФФИ 05-01-00923, программой поддержки ведущих научных школ (проект НШ-619.2003.1) и грантом INTAS.

© А. И. Штерн, 2007

§ I.2. Аменабельные банаховы алгебры	131
§ I.3. Деформации умножения, отображения, близкие к представлениям и гомоморфизмам, и когомологии банаховых алгебр	134
§ I.4. Теория Джонсона	139
§ I.5. Утверждение, дополняющее теорему Джонсона	140
§ I.6. Теоремы об автоматической тривиальности коциклов с коэффициен- тами в представлениях	141
Глава II. Квазипредставления групп и их связь с почти представлениями групповых алгебр	142
§ II.1. Основные определения и свойства квазипредставлений групп	142
II.1.1. Определение квазипредставления. Основные свойства	142
II.1.2. Другие операции над ε -квазипредставлениями	145
II.1.3. Почти гомоморфизмы групповых алгебр и ограниченные из- меримые ε -квазипредставления локально компактных групп ...	146
§ II.2. Псевдопредставления групп. Чистые псевдопредставления. Приме- ры	147
§ II.3. Структура одномерных квазипредставлений групп. Квазихарактеры и псевдохарактеры	148
II.3.1. Определение и основные свойства	148
II.3.2. Ограниченность коциклов Гипшарде–Вигнера	151
II.3.3. Дополнительные сведения о псевдохарактерах	155
§ II.4. Структура конечномерных квазипредставлений групп	157
Глава III. Тривиальность конечномерных квазипредставлений компакт- ных групп с малым дефектом	159
§ III.1. Некоторые условия автоматической непрерывности представлений топологических групп	159
§ III.2. Коммутаторы в компактных группах Ли	161
§ III.3. Доказательство основной теоремы	162
§ III.4. Заключительные замечания к главе III	167
III.4.1. Критерий аменабельности связных локально компактных групп в терминах квазипредставлений	167
III.4.2. Теорема Ван дер Вардена и ее обобщения	169
III.4.3. Гипотеза Мищенко для связных групп Ли	170
III.4.4. Локально ограниченные конечномерные квазипредставления полупростых групп Ли	170
Глава IV. Обзор близких результатов	171
§ IV.1. Деформации и лифтинги представлений групп в классе чистых псевдопредставлений	172
§ IV.2. Аддитивная задача	174
§ IV.3. Заключительные замечания и нерешенные задачи	175
IV.3.1. Дополнение. Группа разрывов относительно компактного го- моморфизма топологических групп	177
Список литературы	179

Введение

И человек, и измерительные приборы допускают ошибки. В связи с этим естественный математический интерес, связанный с объединением идей симметрии и близости, имеет и физический смысл, который можно описать следующим образом. Если у группы симметрий описания некоторой физической системы существуют квазипредставления, т.е. отображения в группу обратимых непрерывных линейных операторов в некотором топологическом векторном пространстве с равномерно малой разностью (скажем, не превосходящей точности измерений) между образом произведения и произведением образов, и если не существует “достаточно близких” обычных представлений группы симметрий в том же топологическом векторном пространстве, то интерпретация эксперимента может оказаться более сложной, чем в случае, когда близкое представление по тем или иным причинам заведомо существует, и это может потребовать тщательного различения истинных симметрий (связанных с “законами природы”) и “квазисимметрий”.

Но опыт надолго опередил понимание. Дедекиннд, готовя к изданию тексты Римана в семидесятые годы XIX века, вычислил то, что теперь называется суммами или символом Дедекиннда [1]. В 1932 г. Радемахер [2] придал результату другую форму и явно указал, что построенное им отображение Φ группы $SL(2, \mathbb{Z})$ в группу целых чисел $\mathbb{Z}$, равноценное символу Дедекиннда (“символ Радемахера”, участвующий в формуле для действия модулярной группы на логарифм η -функции Дедекиннда), почти аддитивно (а именно, выполняется неравенство $|\Phi(g_1 g_2) - \Phi(g_1) - \Phi(g_2)| \leq 3$, $g_1, g_2 \in SL(2, \mathbb{Z})$). Отсутствие ненулевых аддитивных гомоморфизмов $SL(2, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ было уже общеизвестно, но явной реакции на открытие не последовало. С конца 30-х и начала 40-х годов Д. Хайерс и С. М. Улам и их последователи интересовались аддитивной задачей (см., например, [3]–[12]) – возможно, Хайерса и Улама стимулировала находка Радемахера – и получили ряд условий существования аддитивного отображения нормированных пространств, близкого к данному почти аддитивному отображению. В 1942 г. родственная задача об условиях близости к обычным матричным единицам приближенного решения уравнений в матрицах, выражающих соотношения между матричными единицами конечномерной алгебры матриц, рассматривалась фон Нейманом [13] (см. русский перевод в [14]), готовившим технические средства для изучения гиперфинитных факторов (влияние этой работы на последующие исследования в этом направлении обсуждается в комментариях А. М. Вершика [15] к книге [14]), а Д. Монтгомери и Л. Циппин [16] доказали теорему о тривиальности малых возмущений компактных подгрупп групп Ли. Положительные результаты в задачах Хайерса, Улама и фон Неймана привели к полному забвению результата Радемахера, но он был почти переоткрыт в 1972 г., когда Б. Э. Джонсон [17] построил отображение f свободной группы с двумя образующими F_2 в $\mathbb{R}$, родственное символу Радемахера (это видно из вычислений в [9] и [18]), удовлетворяющее условию $|f(g_1 g_2) - f(g_1) - f(g_2)| \leq 6$, $g_1, g_2 \in F_2$, и не являющееся ограниченным возмущением обычного аддитивного гомоморфизма (а затем практически этот же контрпример был переоткрыт Р. Бруксом [19] в 1978 г. при занятиях ограничен-

ными когомологиями), но алгебраический смысл таких отображений оставался неясным до 1983 г., когда было введено понятие псевдохарактера [20].

Оказалось, что некоторые группы имеют даже одномерные нетривиальные квазипредставления (причем ограничение такого отображения на любую аменабельную подгруппу может быть представлением этой подгруппы). Исторически первыми (и простейшими) объектами этого рода были их одномерные вещественные аналоги – псевдохарактеры. Напомним, что вещественная функция f на группе G называется (*вещественным*) *квазихарактером* на этой группе [7], [18], если числовое множество $\{f(gh) - f(g) - f(h) \mid g, h \in G\}$ ограничено, и квазихарактер f называется *псевдохарактером* на G , если $f(g^n) = nf(g)$ для любых $g \in G$ и $n \in \mathbb{Z}$. В 1987 г. В. А. Файзиев, в то время мой аспирант, по моему заданию вычислил псевдохарактеры свободных групп и полугрупп и некоторых групповых конструкций [21], [22]. Понятие псевдохарактера (применявшееся с 1988 г. в ряде работ под названием однородного квазиморфизма [23]–[25]) оказалось весьма продуктивным в теории ограниченных когомологий [26]–[39], в теории групп диффеоморфизмов [40], [41], в симплектической геометрии [42]–[48], в комбинаторной теории групп (см. [29], [30], [32], [33], [38], а также работу [28], хотя ссылки в ней неточны, а изложение истории вопроса небрежно) и в теории представлений групп [49]–[52] и заслужило популярность, достаточную для отдельной пояснительной публикации в Notices of AMS [53]. Псевдохарактерам и их приложениям посвящен § II.3 ниже.

В семидесятые годы появились и первые работы, посвященные не обязательно одномерным объектам, которые теперь называются почти представлениями и квазипредставлениями (в зависимости от того, выполняется условие близости образа произведения и произведения образов элементов на множестве образующих или равномерно на всей группе). К. Грове, Г. Кархер и Э. Ру [54] доказали в 1974 г., что непрерывное отображение T компактной топологической группы G в пространство $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ ограниченных операторов в банаховом пространстве E , удовлетворяющее условию $\|T(gh) - T(g)T(h)\| \leq \varepsilon$ для всех $g, h \in G$, является малым возмущением обычного непрерывного представления группы G и величина возмущения зависит от ε (интересное приложение результата Грове, Кархера и Ру к строению компактных групп автоморфизмов n -мерных комплексных многообразий указано в [55]). В 1977 г. П. де ла Гарп и М. Каруби [56] получили этот результат другим способом с более точной количественной оценкой. В 1982 г. появилась статья Д. Каждана [57], в которой был приведен вопрос, который Каждан приписал В. Мильману: верно ли, что для любого (не обязательно непрерывного) отображения одной ортогональной группы в другую с равномерно малой разностью между образом произведения и произведением образов существует равномерно близкий обычный гомоморфизм? Автор рассматривал только случай непрерывных отображений и повторил результат Грове, Кархера и Ру [54]; в статье рассматривался также соответствующий вопрос для аменабельных групп, но, как было отмечено в уже упомянутой заметке Файзиева [21], Каждан полагал, что применение инвариантного среднего к непрерывной функции двух переменных по одному из переменных дает непрерывную функцию одного переменного, что не так даже для почти периодических функций. (Как отмечено в [58], эта операция

взятия среднего даже не всегда переводит непрерывную функцию в борелевскую.) Кроме того, метод де ла Гарпа и Каруби не допускал непосредственного распространения на аменабельный случай (за пределы праворавномерно непрерывных отображений), и задача о структуре квазипредставлений общих аменабельных локально компактных групп казалась очень трудной.

Исключительно важную роль сыграла возможность перехода к языку групповых алгебр. Еще в 1972 г. Б. Э. Джонсон [17] ввел аменабельные банаховы алгебры (банахова алгебра A называется *аменабельной*, если любое дифференцирование D из A в дуальный банахов A -модуль X^* имеет вид $D(a) = ax - xa$ для некоторого x из X^*) и доказал, что локально компактная группа аменабельна тогда и только тогда, когда ее групповая алгебра $L^1(G)$ аменабельна [17], а в 1986–87 гг. ввел “аппроксимативно мультипликативные” функционалы и отображения банаховых алгебр и, в частности, доказал, что для любого аппроксимативно мультипликативного отображения аменабельной банаховой алгебры в банахову алгебру, являющуюся дуальным банаховым пространством, существует близкий гомоморфизм ([59], [60], см. также [61], [62]). В частности, отсюда следует утверждение о существовании представлений, близких к данному почти представлению аменабельной локально компактной группы в сопряженном банаховом пространстве. Условия существования гомоморфизмов, близких к данному квазигомоморфизму, изучались также с 40-х годов с различных точек зрения в [3]–[18], [20]–[22], [28]–[39], [41], [47], [54], [63]–[116]. Родственным задачам, в том числе – разделяющим отображениям, посвящены статьи [40], [117]–[122].

Более широкая постановка задачи возникла в работах А. Конна и Н. Хигсона [123], [124] и М. Громова [30] (см. также [29], [102], [125], [126]). В них речь идет об отображениях, удовлетворяющих условию ограниченности или малости не на всей группе, а на некотором компакте (в частности, на множестве образующих конечно порожденной дискретной группы). Эта точка зрения оказалась чрезвычайно продуктивной в K -теории, в частности, в различных вариантах K -теории для C^* -алгебр [67], [68], [84]–[101], [114]–[116], [127]–[140]. Недавно Конном и Хигсоном [124] было введено понятие аппроксимативного представления, которое затем было развито и эффективно использовано в указанных выше работах В. М. Мануйлова, А. С. Мищенко и К. Томсена по фредгольмовым представлениям дискретных групп и теории расширений C^* -алгебр. А именно, аппроксимативный гомоморфизм – это семейство почти представлений в смысле Громова–Конна со стремящимся к нулю отклонением нормы разности между образом произведения и произведением образов на всех элементах некоторого семейства, порождающего рассматриваемую группу [89], [91], [93]–[101], [114], [115], [139]. Некоторые приложения понятия аппроксимативного гомоморфизма к физике частиц указаны в [140].

В теории отображений, близких к представлениям (почти представлений, аппроксимативных представлений, квазипредставлений, псевдопредставлений и т. д.) за последние 25–30 лет достигнуты значительные результаты и созданы технические приемы, имеющие нетривиальные приложения в алгебре и топологии – от ограниченных когомологий до симплектической геометрии. Этот материал нелегко организовать, и непосредственным поводом осуществить это

предприятие явилась дополнительная возможность структурирования текста, предоставленная полным (положительным) решением упомянутой выше задачи Мильмана–Каждана 1982 г. любое (не обязательно непрерывное) отображение одной ортогональной группы в другую с равномерно малой разностью между образом произведения и произведением образов равномерно близко к обычному (и тем самым непрерывному) гомоморфизму одной группы в другую (напомним, что для непрерывных отображений задача была положительно решена еще Грове, Кархером и Ру в 1974 г.). Средства, используемые при решении общей задачи, весьма богаты, и это позволяет изложить значительную часть теории вокруг доказательства основной “теоремы тривиальности”: *любое (не обязательно непрерывное) конечномерное унитарное квазипредставление полупростой компактной группы Ли близко к обычному (непрерывному) представлению этой группы*. Кроме того, указаны необходимые и достаточные условия справедливости аналога теоремы Ван дер Вардена (т.е. условия автоматической непрерывности всех локально ограниченных конечномерных представлений) для данной связной группы Ли и дано описание структуры всех конечномерных локально ограниченных квазипредставлений произвольных связных полупростых групп Ли. Ввиду недостатка места автору пришлось ограничиться главным образом вопросами, связанными с теорией квазипредставлений и псевдопредставлений групп, и лишь упомянуть многие результаты, связанные с другими направлениями исследований по теории отображений, близких к представлениям, и их приложениями к теории групп и геометрии.

По всем вопросам, касающимся топологических векторных пространств, мы отсылаем читателя к [141]. Для ссылок по теории представлений групп мы используем книги [142] и [143], по теории инвариантных средних – [144], [145] и [146], по общей топологии – [147], по теории C^* -алгебр – [148], по теории W^* -алгебр – [149], по теории топологических групп и гармоническому анализу – [150] и [151], по геометрической теории групп – [152], по теории гомологий и когомологий групп и алгебр – [137], [153], [154] и [155], по теории полупростых групп Ли – [156] и по теории нормированных линейных пространств – [157].

Перейдем к изложению содержания статьи.

Глава I посвящена изложению некоторых общих вопросов теории возмущений и когомологий банаховых алгебр и элементам теории аменабельных алгебр по Джонсону. В §1.1 излагается необходимая информация о банаховых бимодулях, дуальных бимодулях и умножении Аренса. В §1.2 вводятся аменабельные банаховы алгебры и строится аппроксимативная диагональ в аменабельной банаховой алгебре. В §1.3 обсуждаются различные когомологические теории для банаховых алгебр и их связь с деформациями умножения и отображениями, близкими к представлениям и гомоморфизмам, и вводятся АМNM-алгебры. В §1.4 приводится теорема Джонсона, утверждающая, что для любого аппроксимативно мультипликативного отображения аменабельной банаховой алгебры в банахову алгебру, являющуюся дуальным банаховым пространством, существует близкий гомоморфизм. В §1.5 приводится утверждение, дополняющее теорему Джонсона и утверждающее подобие близких представлений аменабельной банаховой алгебры в гильбертовом пространстве. В §1.6 обсуждаются теоремы об автоматической тривиальности коциклов с коэффициентами в представлениях.

Глава II посвящена квазипредставлениям групп и их связям с почти представлениями групповых алгебр. В § II.1 приводятся основные определения и обсуждаются простейшие свойства квазипредставлений групп. В частности, устанавливается связь между ограниченными измеримыми квазипредставлениями локально компактной группы и непрерывными почти представлениями ее групповой алгебры. В § II.2 вводятся классы квазипредставлений с особыми алгебраическими свойствами – так называемые псевдопредставления и чистые псевдопредставления, представляющие особый интерес для свободных групп и односвязных групп Ли, формулируется теорема аппроксимации для псевдопредставлений (“для любого квазипредставления существует близкое псевдопредставление”) и цитируются примеры квазипредставлений некоторых дискретных групп и групп Ли, показывающие, что условия, накладываемые на класс псевдопредставлений, существенны для справедливости теоремы аппроксимации. В § II.3 приводится краткий обзор теории одномерных псевдопредставлений и псевдохарактеров на группах и полугруппах и их приложений (в теории ограниченных когомологий, к финслеровым метрикам, к инварианту Калаби в симплектической геометрии) и некоторые родственные результаты. В частности, приводится результат Полтеровича о псевдохарактерах модулярной группы и теорема автора об ограниченности коцикла Гипарде–Вигнера на любой эрмитово симметрической полупростой группе Ли. В § II.4 описана структура конечномерных квазипредставлений групп в терминах ограниченных квазипредставлений.

В главе III доказывается “теорема тривиальности” для конечномерных унитарных квазипредставлений компактных групп с достаточно малым дефектом. Ее доказательство использует не только аппарат первых двух глав, но и некоторые другие технические средства, которые напоминаются в первых двух параграфах главы III, а именно, в § III.1 приводятся некоторые условия автоматической непрерывности представлений топологических групп, а в § III.2 напоминаются свойства коммутаторов в простых компактных группах Ли. В § III.3 приводится доказательство “теоремы тривиальности” и формулируются следствия этой теоремы, включающие аналог “теоремы тривиальности” для конечномерных квазипредставлений полупростых групп Ли, не содержащих нетривиальных эрмитово симметрических факторов. В § III.4 указаны некоторые следствия и высказан ряд замечаний; в частности, дается доказательство критерия аменабельности связных локально компактных групп в терминах квазипредставлений, приводится обзор аналогов и обобщений теоремы Ван дер Вардена о непрерывности, указывается доказательство гипотезы Мищенко о колебании в точке разрывных представлений связных групп Ли и описываются локально ограниченные конечномерные квазипредставления простых групп Ли.

В заключительной главе IV обсуждаются результаты, связанные с некоторыми другими направлениями исследований по теории отображений, близких к представлениям. В § IV.1 приведены результаты о деформациях и лифтингах представлений групп в классе псевдопредставлений, свидетельствующие о богатстве класса чистых псевдопредставлений. В § IV.2 кратко обсуждается аддитивная задача. В § IV.3 высказывается ряд замечаний и отмечаются нерешенные задачи.

Некоторые результаты статьи докладывались на Международном конгрессе математиков в Берлине в 1998 г., на конференции по геометрии на острове Юзедом в 1999 г. и на конференции, организованной Jangjeon Mathematical Society, в г. Майсур в Индии в 2003 г. Значительная часть результатов автора, отраженных в настоящем обзоре, была изложена в ряде докладов на семинаре А. С. Мищенко, В. М. Мануйлова и Е. В. Троицкого в МГУ. Автор признателен руководителям и участникам семинара за доброжелательное внимание. Автор также искренне благодарен рецензенту за замечания, позволившие обогатить и улучшить изложение.

Глава I. Отображения, близкие к представлениям банаховых алгебр, и аменабельные банаховы алгебры

Конечно, все существенные характеристики отображения, сохраняющего ту или иную структуру – например, гомоморфизма, представления или линейного оператора, – могут быть подвергнуты модификации с помощью введения класса отображений, “не слишком сильно нарушающих” рассматриваемую структуру. Применение методов теории возмущений требует некоторых средств линейного анализа, и мы напомним нужные нам понятия.

§ I.1. Банаховы бимодули, дуальные бимодули и умножения Аренса

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I.1.1 (см. [137], [155], [158]). Пусть A – банахова алгебра. Банахово пространство X называется банаховым A -бимодулем, если пространство X снабжено совместно непрерывными (по норме) билинейными отображениями $(a, x) \mapsto ax$ и $(a, x) \mapsto xa$ из $A \times X$ в X (т.е. существует такая постоянная $C > 0$, что $\|xa\| \leq C\|a\| \|x\|$ и $\|ax\| \leq C\|a\| \|x\|$ для всех $a \in A$ и $x \in X$), определяющими левое и правое действия A на X (т.е. произведению элементов алгебры A отвечает композиция соответствующих операторов на пространстве X в соответствующем порядке).

Банахов A -модуль X называется *дуальным*, если X – банахово пространство, дуальное к банахову пространству некоторого банахова A -бимодуля X_* , причем операции в X накрест сопряжены операциям в X_* , т.е. $\langle fa, x \rangle = \langle f, ax \rangle$ и $\langle af, x \rangle = \langle f, xa \rangle$ для всех $a \in A$, $x \in X$, $f \in X_*$, где $\langle f, x \rangle = x(f)$ для всех $x \in X$ и $f \in X_*$. В частности, если A^* – пространство, сопряженное к A , то A^* можно снабдить структурой банахова A -бимодуля, определяя fa и af формулами $\langle fa, b \rangle = \langle f, ab \rangle$ и $\langle af, b \rangle = \langle f, ba \rangle$ ($b \in A$) для всех $f \in A^*$ и $a \in A$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означает естественное спаривание между пространствами A^* и A .

В свою очередь, второе сопряженное пространство A^{**} банаховой алгебры A допускает два произведения, превращающих A^{**} в банахову алгебру, так называемое первое (левое) и второе (правое) произведения Аренса, которые мы обозначим через $\square$ и $\triangle$ соответственно. В частности, первое (левое) произведение Аренса элементов $m, n \in A^{**}$ определяется формулой $\langle m \square n, f \rangle = \langle m, nf \rangle$ ($f \in A^*$), где $nf \in A^*$ определяется формулой $\langle nf, a \rangle = \langle n, fa \rangle$ ($a \in A$), а fa определено выше. По отношению к каждому из произведений $\square$ и $\triangle$ каноническое вложение исходной банаховой алгебры A в A^{**} является гомоморфизмом.

Произведения $\square$ и $\triangle$ имеют специфические свойства непрерывности. В частности, если $n \in A^{**}$, то отображение $m \rightarrow m \square n$ непрерывно из слабой* топологии в слабую*. Как обычно, мы здесь отождествляем A с его каноническим образом в A^{**} .

Напомним теперь определение проективного тензорного произведения банаховых пространств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I.1.2. Пусть E и F – банаховы пространства. Алгебраическое тензорное произведение $E \otimes F$ пространств E и F можно снабдить *проективной тензорной нормой* $\|x\|_\gamma = \inf \{ \sum_{i=1}^n \|x_{1,i}\| \|x_{2,i}\| \}$, где нижняя грань берется по всем представлениям элемента x в виде $x = \sum_{i=1}^n x_{1,i} \otimes x_{2,i}$. Пополнение пространства $E \otimes F$ по норме $\|\cdot\|_\gamma$ называется *проективным тензорным произведением* пространств E и F и обозначается $E \hat{\otimes} F$.

Если E и F – банаховы алгебры, то банахово пространство проективного тензорного произведения естественно наделяется структурой банаховой алгебры. Более подробные сведения о проективных тензорных произведениях банаховых пространств и банаховых алгебр можно найти в [137], [149], [155].

§ I.2. Аменабельные банаховы алгебры

Все банаховы алгебры в дальнейшем предполагаются комплексными.

Следующее определение принадлежит Б. Э. Джонсону [17].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I.2.1. Банахова алгебра A называется *аменабельной* (слабо аменабельной), если любое дифференцирование D из A в дуальный банахов A -бимодуль X^* (в A^*), т.е. такое отображение $D: A \rightarrow X^*$ ($D: A \rightarrow A^*$), что $D(ab) = D(a)b + aD(b)$ для любых $a, b \in A$, имеет вид $D(a) = ax - xa$, $a \in A$, для некоторого x из X^* (из A^* соответственно).

Очевидно, что любая аменабельная алгебра слабо аменабельна.

Есть несколько равносильных определений понятия аменабельности банаховой алгебры, среди которых мы выделим два условия, введенные в [61] (см. также [59], [60], [62], [76]–[82]). Согласно [61], банахова алгебра A аменабельна тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих двух условий (и тем самым оба условия):

- (а) A имеет *аппроксимативную диагональ*, т.е. такую ограниченную сеть $(m_i) \in A \hat{\otimes} A$, что для любого $x \in A$ выполняются соотношения $m_i x - x m_i \rightarrow 0$ и $\pi(m_i)x \rightarrow x$;
- (б) A имеет *виртуальную диагональ*, т.е. существует такой элемент $M \in (A \hat{\otimes} A)^{**}$, что $xM = Mx$ и $(\pi^{**}M)x = x$ для любого $x \in A$.

Символом $\pi: A \hat{\otimes} A \rightarrow A$ здесь обозначено отображение, определяемое умножением в A .

Некоторые операции над аменабельными банаховыми алгебрами сохраняют свойство аменабельности [159]. Например, замкнутый левый идеал в аменабельной банаховой алгебре аменабелен тогда и только тогда, когда он имеет ограниченную (двустороннюю) аппроксимативную единицу, а замкнутый двусторонний идеал в аменабельной банаховой алгебре аменабелен тогда и только

тогда, когда он слабо дополняем. Если замыкание банаховой алгебры конечномерных линейных операторов в $(X \oplus Y)$ аменабельно, то хотя бы одна из соответствующих алгебр в X и Y тоже аменабельна.

Отметим, что условия аменабельности банаховой алгебры компактных операторов $\mathcal{K}(X)$ (или хотя бы алгебры аппроксимируемых операторов $\mathcal{F}(X)$) в банаховом пространстве X отнюдь не просты [159]. В частности, если $\mathcal{K}(X)$ аменабельна, то X^* имеет свойство ограниченной компактной аппроксимации, а если $\mathcal{F}(X)$ аменабельна, то X^* имеет свойство ограниченной аппроксимации. (Напомним, что банахово пространство X называется имеющим свойство *ограниченной компактной (ограниченной) аппроксимации*, если существует такое $C > 0$, что для любого компактного множества $K \subset X$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такой оператор $T \in \mathcal{K}(X)$ (непрерывный конечномерный оператор T), что $\|T\| \leq C$ и $\|Tx - x\| < \varepsilon$ для всех $x \in K$.) Коммутативная радикальная слабо аменабельная, но не аменабельная банахова алгебра построена в [138], а коммутативная радикальная аменабельная банахова алгебра – в [160].

Роль аменабельных банаховых алгебр в дальнейшем изложении определяется прямой связью между аменабельностью локально компактной группы и ее групповой алгебры $L^1(G)$, построенной по левоинвариантной мере Хаара. Напомним следующее определение (см. [144], [145]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I.2.2. Топологическая группа называется *аменабельной* (точнее, *левоаменабельной*), если на банаховом пространстве $\text{CB}_{\mathbb{R}}(G)$ всех ограниченных непрерывных вещественнозначных функций на G существует (лево)инвариантное среднее, т.е. инвариантный относительно левых сдвигов функционал m с единичной нормой, равный единице на функции, тождественно равной единице ($m \in \text{CB}_{\mathbb{R}}(G)^*$, $m(gf) = m(f)$ для всех $f \in \text{CB}_{\mathbb{R}}(G)$ и $g \in G$, где $gf(h) = f(gh)$ для всех $f \in \text{CB}_{\mathbb{R}}(G)$ и $g, h \in G$, и $m(\mathbf{1}) = 1$, где $\mathbf{1}(g) = 1$ для всех $g \in G$).

Класс аменабельных групп содержит абелевы группы и компактные группы и замкнут относительно расширений, так что содержит и все разрешимые группы. Вообще говоря, класс аменабельных групп далеко не исчерпывается этими “элементарными аменабельными” группами. Впрочем, связная локально компактная группа аменабельна тогда и только тогда, когда факторгруппа этой группы по радикалу (наибольшему связному разрешимому нормальному делителю) компактна [145], [161].

Следующая ключевая теорема принадлежит Б. Э. Джонсону.

ЛЕММА I.2.3 [17]. *Локально компактная группа аменабельна тогда и только тогда, когда ее групповая алгебра аменабельна как банахова алгебра.*

В то время как условия аменабельности локально компактной группы и ее групповой алгебры равносильны, связь между условиями аменабельности для локально компактной группы и других связанных с ней алгебр более сложна. Например [79], алгебра Фурье $A(G)$ (см. [162]) локально компактной группы, как правило, не является аменабельной банаховой алгеброй. В частности, если

G – произведение конечных групп, среди которых бесконечно много некоммутативных групп, то алгебра Фурье $A(G)$ не аменабельна. Если G – неискривная компактная группа, семейство попарно неэквивалентных неприводимых представлений которой конечно в каждой конечной размерности, то $A(G)$ тоже не является аменабельной банаховой алгеброй. (Впрочем, если размерности неприводимых представлений группы G ограничены, т.е. группа G есть конечное расширение компактной коммутативной группы, то банахова алгебра $A(G)$ аменабельна.) Интересно, что $A(G)$ является слабо аменабельной тогда и только тогда, когда она не имеет ненулевых точечных дифференцирований и, в частности, алгебра Фурье группы трехмерных вращений не слабо аменабельна.

Банахова алгебра называется *симметрически аменабельной*, если она имеет ограниченную аппроксимативную диагональ, состоящую из симметричных элементов тензорного произведения. Алгебры Кунца O_n (порожденные $n \geq 2$ ненулевыми изометриями $S_1, \dots, S_n$ на бесконечномерном гильбертовом пространстве H , удовлетворяющими условию $S_1 S_1^* + \dots + S_n S_n^* = 1_H$) не являются симметрически аменабельными при любом $n \geq 2$. Оказывается, групповая алгебра $L^1(G)$ любой локально компактной группы G симметрически аменабельна [80].

Унитарное представление π группы G в гильбертовом пространстве H называется *аменабельным*, если на алгебре $\mathcal{L}(H)$ всех ограниченных линейных операторов в H существует G -инвариантное состояние. В [163] показано, что унитарное представление π группы G в гильбертовом пространстве H аменабельно тогда и только тогда, когда пространство ограниченных равномерно непрерывных функций на единичной сфере пространства H имеет G -инвариантное среднее, а также тогда и только тогда, когда либо представление π имеет конечномерное подпредставление, либо любое конечное покрытие единичной сферы S_H пространства H содержит так называемое *существенное* множество относительно $\pi(G)$, т.е. для любого окружения V диагонали в $S_H \times S_H$ и любого конечного семейства операторов $\pi(g_1), \dots, \pi(g_n)$ представления π пересечение множеств $\pi(g_i)V[A]$ непусто, где $V[A] = \{x \in X \mid (a, x) \in V \text{ для некоторого } a \in A\}$ есть V -окрестность множества A .

Многие алгебры, связанные с локально компактными группами (и даже с более общими топологическими группами) можно рассматривать как операторные пространства, т.е. они могут быть *-изометрично вложены как замкнутые симметричные подпространства либо в некоторую C^* -алгебру, либо в ее двойственное пространство, либо в тензорное произведение таких объектов (подробности см. в [164]). Отображение операторных пространств определяет поэлементное отображение пространств матриц любого конечного порядка над прообразом и образом, и эти пространства естественно снабжаются нормами. Отображение называется *вполне ограниченным*, если все эти отображения ограничены в совокупности, и алгебра рассматриваемого типа называется *операторно (слабо операторно) аменабельной*, если все вполне ограниченные дифференцирования D из A в дуальный банахов A -бимодуль X^* (в A^*) имеют вид $D(a) = ax - xa$, $a \in A$, для некоторого x из X^* (из A^* соответственно). Оказывается, если G – локально компактная группа, то групповая алгебра $L^1(G)$

всегда слабо аменабельна [17], [61], алгебра Фурье $A(G)$ [162] всегда операторно слабо аменабельна [165] и, кроме того, слабо аменабельна для любой вполне несвязной локально компактной группы G , алгебра мультипликаторов алгебры $A(G)$ канонически изоморфна алгебре Фурье–Стилтьеса $B(G)$ [162] тогда и только тогда, когда G аменабельна, алгебра Фурье–Стилтьеса $B(G)$ аменабельна тогда и только тогда, когда группа G компактна и содержит коммутативный нормальный делитель конечного индекса [166], а алгебра мер $M(G)$ слабо аменабельна тогда и только тогда, когда G дискретна (т.е. $M(G) = L^1(G)$) [167].

Понятие аменабельности представления допускает обобщения, в том числе на случай действий. *Асимптотическая размерность* метрического пространства – это такое наименьшее целое n , что для любого $r > 0$ существует такое равномерно ограниченное покрытие $C = \{U_i\}_{i \in I}$ метрического пространства, для которого r -кратность покрытия C не превосходит $n + 1$ (т.е. никакой шар радиуса r в метрическом пространстве не пересекается с более чем $n + 1$ множествами покрытия C). Пусть Γ – конечно порожденная группа, классифицирующее пространство которой $B\Gamma$ имеет гомотопический тип конечного CW -комплекса. Оказывается, если Γ имеет конечную асимптотическую размерность как метрическое пространство относительно метрики, определяемой длиной слов относительно некоторой системы образующих, то для группы Γ справедлива гипотеза Новикова о высших сигнатурах [139].

Кроме того, в [135] показано, что конечно порожденная группа допускает равномерное вложение в гильбертово пространство тогда и только тогда, когда действие левыми сдвигами на стоун-чеховской компактификации топологически аменабельно (это условие сходно с вышеприведенным условием аменабельности представлений). Согласно [139], для таких групп справедлива гипотеза Новикова о высших сигнатурах.

Более общим образом, если A – банахова алгебра с единицей и A^* – ее дуальное пространство, то может оказаться, что условия аменабельности и виртуальные диагонали могут быть использованы не для всех отображений, связанных с дуальными банаховыми A -бимодулями, а для конструкций над некоторыми подпространствами пространства A^* (одна из этих конструкций, кратко описанная ниже, в § I.3, приводит к нормальным когомологиям алгебр фон Неймана). В [168] показано, что существование Φ -виртуальной диагонали для некоторого подпространства Φ пространства A^* приводит к богатой некоммутативной дифференциально-геометрической теории для представлений алгебры A .

Некоторые дополнительные характеристики аменабельных групп, представлений и действий и приложения этих понятий можно найти в [7], [9], [35], [37], [54], [66], [79], [80], [108]–[112], [135], [138], [146], [163], [165] и [168]–[170].

§ I.3. Деформации умножения, отображения, близкие к представлениям и гомоморфизмам, и когомологии банаховых алгебр

Пусть A – банахова алгебра относительно умножения $\circ$. *Возмущением* (или *ε -деформацией*) банаховой алгебры $(A, \circ)$ (или умножения $\circ$) мы называем другое (тоже ассоциативное) умножение $\triangle$ на том же банаховом пространстве A ,

удовлетворяющее условию $\|a \circ b - a\Delta b\| \leq \varepsilon \|a\| \|b\|$ для всех $a, b \in A$. Согласно [171], есть три естественные задачи: (1) охарактеризовать устойчивые банаховы алгебры, т.е. такие алгебры, что при некотором $\varepsilon_0 > 0$ банаховы алгебры $(A, \circ)$ и (A, Δ) изоморфны для любой ε -деформации с $\varepsilon < \varepsilon_0$, (2) охарактеризовать устойчивые свойства (сохраняющиеся при любой ε -деформации с $\varepsilon < \varepsilon_0$), (3) охарактеризовать непрерывные или дифференцируемые структуры на пространстве всех малых деформаций. В частности, риманово многообразие Ω' называется *малой деформацией риманова многообразия* Ω , если алгебра $A_{\Omega'}$ аналитических функций на Ω' изоморфна некоторой малой деформации (A_{Ω}, Δ) алгебры A_{Ω} аналитических функций на Ω . Для одномерного Ω эта ситуация приводит к изучению квазиконформных деформаций.

Информацию о малых деформациях банаховых алгебр можно найти в работах Р. Рохберга [172], Б.Э. Джонсона [60], [78], К. Яроша [69]–[74] и других авторов. Вопросы деформации алгебр Фреше затронуты в [171]. Например, банаховы алгебры $C(X)$, $A(D)$ и $H^{\infty}(D)$ устойчивы (X – компакт, а D – единичный диск), в отличие от алгебр аналитических функций на неодносвязных компактах.

Для некоммутативных алгебр и, в первую очередь, для операторных алгебр вопросы о близких алгебрах допускают естественную модификацию. В частности, один из давно изучаемых вопросов – верно ли, что достаточно близкие операторные алгебры унитарно эквивалентны, и если да, то верно ли, что оператор эквивалентности можно выбрать близким к единице. Известен ряд примеров, показывающих, что как угодно близкие C^* -алгебры, вообще говоря, не являются унитарно эквивалентными, в то время как аналогичные задачи для алгебр фон Неймана часто решаются положительно [78], [82], [173]–[175]. Чтобы описать эти результаты, напомним чисто алгебраическую теорию кохомологий Хохшильда для ассоциативных линейных алгебр над произвольным полем в применении к ассоциативной комплексной линейной алгебре A с единичным элементом I . Пусть X – A -бимодуль (т.е. X – комплексное векторное пространство, снабженное билинейными отображениями $(a, x) \mapsto ax$ и $(a, x) \mapsto xa$ из $A \times X$ в X (определяющими левое и правое действия A на X), причем все тройные произведения a_1a_2x , a_1xa_2 и xa_1a_2 ассоциативны). Пусть $L^n = L^n(A, X)$, $n \in \mathbb{N}$, – комплексное векторное пространство всех полилинейных отображений $\xi: A \times \cdots \times A (= A^n) \rightarrow X$. Элементы $L^n(A, X)$ называются n -коцепями. Пусть $L^0(A, X) = X$. Кограничный оператор – это последовательность $X = L^0 \xrightarrow{\Delta_0} L^1 \xrightarrow{\Delta_1} L^2 \xrightarrow{\Delta_2} L^3 \xrightarrow{\Delta_3} \cdots$ линейных отображений $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \dots$, определенных формулами $(\Delta_0 x)(a) = ax - xa$, $(\Delta_1 \xi_1)(a, b) = a\xi_1(b) - \xi_1(ab) + \xi_1(a)b$, $(\Delta_2 \xi_2)(a, b, c) = a\xi_2(b, c) - \xi_2(ab, c) + \xi_2(a, bc) - \xi_2(a, b)c$ и т.д., если $x \in X = L^0$, $\xi_j \in L^j$ и $a, b, c, \dots \in A$. Общее определение отображения $\Delta_n: L^n \rightarrow L^{n+1}$ дает формула

$$(\Delta_n \xi)(a_0, a_1, \dots, a_n) = a_0 \xi(a_1, \dots, a_n) + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{j+1} \xi(a_0, \dots, a_{j-1}, a_j a_{j+1}, a_{j+2}, \dots, a_n) + (-1)^{n+1} \xi(a_0, \dots, a_{n-1}) a_n$$

при $\xi \in L^n$ и $a_0, a_1, \dots, a_n \in A$.

При $n = 1, 2, 3, \dots$ образ отображения $\Delta_{n-1}: L^{n-1} \rightarrow L^n$ обозначается через $B^n (= B^n(A, X))$, а его элементы называются n -кограницами; обозначим ядро отображения $\Delta_n: L^n \rightarrow L^{n+1}$ через $Z^n (= Z^n(A, X))$, его элементы называются n -коциклами. Нетрудно видеть, что $\Delta^n \Delta^{n-1} = 0$, так что $B^n \subseteq Z^n$. Векторное факторпространство Z^n/B^n называется n -мерной группой когомологий (Хохшильда) алгебры A с коэффициентами в X и обозначается через $H^n(A, X)$ или H^n . В частности, из формул для операторов Δ_1 и Δ_0 следует, что 1-коциклы – это дифференцирования из A в X , а 1-кограницы – это внутренние дифференцирования, так что группа $H^1(A, X)$ есть факторгруппа группы всех дифференцирований из A в X по подпространству внутренних дифференцирований.

Чтобы получить с помощью этой схемы непрерывные по норме когомологии банаховой алгебры A , нужно ограничиться банаховыми A -бимодулями X ; тогда кограничный оператор $\{\Delta_n\}$ в цепочке $X = L_c^0 \xrightarrow{\Delta_0} L_c^1 \xrightarrow{\Delta_1} L_c^2 \xrightarrow{\Delta_2} L_c^3 \xrightarrow{\Delta_3} \dots$ определяется теми же формулами, что и выше, что приводит к подпространствам B_c^n и Z_c^n непрерывных по норме n -кограниц и n -коциклов в банаховом пространстве L_c^n . Подпространство Z_c^n всегда замкнуто, но этого нельзя сказать о подпространстве B_c^n , и поэтому соответствующая группа когомологий $H_c^n (= Z_c^n/B_c^n)$ определена как векторное пространство но, вообще говоря, не как нормированное пространство.

Если A – C^* -алгебра операторов в гильбертовом пространстве H , так что на алгебре A корректно определена, в частности, ультраслабая топология, то естественно ввести и нормальные когомологии алгебры A , связанные с дуальными нормальными A -бимодулями X (т.е. банаховыми A -бимодулями X , сопряженными как банаховы пространства, в которых ограниченные билинейные отображения $(a, x) \mapsto ax$ и $(a, x) \mapsto xa: A \times X \rightarrow X$, определяющие левое и правое действия A на X , раздельно непрерывны в слабой* топологии на X и ультраслабой топологии на A). Пространства $L_w^n (= L_w^n(A, X))$ нормальных n -коцепей состоят из всех ограниченных и раздельно слабо непрерывных n -линейных отображений из A^n в X , где L_w^0 есть X . Кограничный оператор $\{\Delta_n\}$ определяется той же формулой, что и выше. В теории когомологий C^* -алгебр представляет интерес связь между (непрерывными по норме) когомологиями C^* -алгебры в гильбертовом пространстве и (нормальными) когомологиями ее слабого замыкания. В этой связи существенна информация об условиях тривиальности когомологий алгебр фон Неймана и связанных с этими условиями нерешенных задачах (см., например, [176]). Поскольку все дифференцирования любой алгебры фон Неймана M в себя являются внутренними, то $H^1(M, M) = 0$. Если $H^n(M, X) \neq 0$ для $n \geq 1$ и некоторого дуального нормального банахова M -бимодуля X , например, при $X = M$ (или $X = \mathcal{L}(H)$, если M реализована в гильбертовом пространстве H), то эта группа – инвариант алгебры фон Неймана M , но во всех известных случаях эти группы тривиальны (в частности, в [174] показано, что $H^k(M, B(H)) = 0$ для любого $k \in \mathbb{N}$ и для многих алгебр фон Неймана M , в том числе, если M – собственно бесконечная алгебра фон Неймана типа Π_1 , удовлетворяющая условию $M \cong M \otimes R$, где R – гиперфинитный фактор типа Π_1). Иногда полезно пользоваться группами с произвольными дуальными нормальными банаховыми M -бимодулями X

(например, алгебра фон Неймана M инъективна тогда и только тогда, когда $H^n(M, X) = 0$ для всех $n \geq 1$ и всех дуальных нормальных банаховых M -бимодулей X). В [175] показано, что малые возмущения умножения в банаховой алгебре A , удовлетворяющей условию $H^2(A, A) = H^3(A, A) = 0$, приводят к алгебре, $*$ -изоморфной исходной алгебре, и указаны приложения к подобию алгебр фон Неймана.

Особый интерес представляют когомологии $H_{cb}^n(M, X)$, связанные с вполне ограниченными полилинейными отображениями $\phi: M^n \rightarrow X$ [174], поскольку эти отображения могут быть представлены в виде

$$\varphi(a_1, \dots, a_n) = V_1 \pi_1(a_1) V_2 \pi_2(a_2) \dots V_n \pi_n(a_n) V_{n+1},$$

где π_i – представления алгебры фон Неймана M в гильбертовых пространствах и V_i – непрерывные отображения гильбертовых пространств друг в друга. Как показано в [174], группы $H_{cb}^n(M, M)$ и $H_{cb}^n(M, B(H))$ тоже всегда тривиальны.

Существенную роль в изучении возмущений банаховых алгебр и смежных вопросов сыграли работы Яроша (см. [69]–[74]). Напомним, что *расстоянием Банаха–Мазура* между изоморфными банаховыми пространствами X и Y называется величина $d_{BM}(X, Y) = \inf \{ \|T\| \cdot \|T^{-1}\| \mid T: X \rightarrow Y \text{ — изоморфизм} \}$. *Алгеброй функций* называется любая коммутативная комплексная банахова алгебра B с единицей, удовлетворяющая условию $\|f^2\|_B \equiv \|f\|_B^2$ для всех $f \in B$. Алгебра функций B называется ε -возмущением алгебры функций A , если расстояние Банаха–Мазура между банаховыми пространствами A и B не превосходит $1 + \varepsilon$. Возмущения алгебр функций изучались в [71], [172], [175], [177]. В частности (см. [71]), если ε достаточно мало, то любое ε -возмущение B алгебры функций A индуцирует гомеоморфизм границ Шоке алгебр функций A и B .

Инъективное тензорное произведение $X \check{\otimes} Y$ банаховых пространств X и Y определяется введением нормы $\|\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i\|_\lambda = \sup \{ |\sum_{i=1}^n f(x_i)g(y_i)| \mid f \in X^*, \|f\| \leq 1, g \in Y^*, \|g\| \leq 1 \}$ и пополнением по этой норме. Пусть $X, \tilde{X}, Y, \tilde{Y}$ – банаховы пространства. Любая пара сюръективных изометрий $\varphi: X \rightarrow Y$ и $\psi: \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ (или $\varphi: X \rightarrow \tilde{Y}$ и $\psi: \tilde{X} \rightarrow Y$) определяет изометрию между инъективными тензорными произведениями $X \check{\otimes} \tilde{X}$, при некоторых естественных предположениях других изометрий между этими пространствами нет, а в [69] показано, что аналогичное утверждение верно и для изоморфизмов T , если произведение $\|T\| \|T^{-1}\|$ близко к единице (для алгебр непрерывных функций это утверждение было получено ранее в [178]). В частности, если расстояние Банаха–Мазура между двумя строго выпуклыми пространствами со строго выпуклыми сопряженными пространствами мало, то банаховы алгебры компактных операторов в этих пространствах изоморфны.

Если A и B – банаховы алгебры, то, с одной стороны, можно называть B малым возмущением A , если существует почти изометрический линейный эпиморфизм $T: A \rightarrow B$, т.е. $(1 - \varepsilon)\|a\| \leq \|Ta\| \leq (1 + \varepsilon)\|a\|$ для всех $a \in A$ и для некоторого малого $\varepsilon > 0$. С другой стороны, можно требовать от “возмущения”, чтобы существовало отображение T , почти сохраняющее мультипликативную структуру, т.е. выполнялось бы соотношение $\|T(a_1 a_2) - (Ta_1)(Ta_2)\| \leq \varepsilon \|a_1\| \|a_2\|$ для

всех $a_1, a_2 \in A$ и некоторого малого $\varepsilon > 0$. Основные задачи теории возмущений (называемой также теорией деформаций) банаховых алгебр состоят в изучении соотношений между этими и подобными им определениями возмущения и в выявлении общих свойств, которые должны иметь банаховы алгебры, одна из которых получена малым возмущением другой.

Ряд общих вопросов теории возмущений для алгебр функций рассмотрен в [70]. В частности, показано, что эквивалентность поставленных выше задач для алгебр функций является одним из вариантов теоремы Банаха–Стоуна (утверждающей, что алгебры непрерывных функций на компакте линейно изометричны тогда и только тогда, когда они алгебраически изоморфны). Более общие классы банаховых алгебр рассматривались в [172] и [175], где, в частности, показано, что если A – такая равномерная алгебра, что ее граница Шилова совпадает с границей Шоке, то границы Шилова алгебры A и ее возмущенной алгебры гомеоморфны для любого достаточно малого возмущения. Аналоги теоремы Банаха–Стоуна для алгебр компактных операторов в банаховом пространстве X получены в [70] в предположении, что X равномерно выпукло.

Свойство P называется *стабильным*, если из того, что банахова алгебра A имеет свойство P , а B – малое возмущение A , следует, что B имеет свойство P . Алгебра A называется *стабильной*, если свойство алгебры быть изометрически изоморфной A стабильно. Алгебра непрерывных функций на компакте и алгебра диска стабильны (см., в частности, [75], [172] и книгу [70]), что можно рассматривать как банахово-алгебраический вариант теоремы Римана об отображении областей. Число связных компонент пространства максимальных идеалов – стабильное свойство, а алгебра ограниченных аналитических функций на неодносвязной области не является стабильной [70]. Случай алгебры функций на полидиске рассматривался в [72].

Ряд работ по теории возмущений алгебр относится к изучению разделяющих отображений, т.е. отображений, переводящих элементы с нулевым произведением в элементы с нулевым произведением. В частности, в [122] показано, что разделяющее отображение A одной алгебры $C(T)$ непрерывных функций на компакте T в другую, $C(S)$, определяет разбиение пространства S в дизъюнктную сумму трех множеств S_1 , S_2 и S_3 , где S_3 замкнуто, а S_2 открыто, и такое непрерывное отображение $\varphi: S_1 \cup S_2 \rightarrow T$, что $Af(s) = h(s)f(\varphi(s))$ для всех $s \in S_1$ (h – непрерывная функция на S_1), $Af(s) = 0$ для всех $s \in S_3$, а $\varphi(S_2)$ конечно, и для всех $s \in S_2$ отображение $s \mapsto Af(s)$ разрывно. В частности, любой разделяющий изоморфизм автоматически непрерывен. Родственным темам посвящена статья [118] о строении неограниченных функционалов, сохраняющих дизъюнктность, и статья [119] о функциях и мерах, удовлетворяющих условию аддитивности или мультипликативности на ортогональных элементах, в связи с различными условиями непрерывности и измеримости.

Теории почти мультипликативных функционалов посвящены обзоры [73] и [74]. В этих обзорах алгебры, которые в [59] названы AMNM-алгебрами (от слов “almost multiplicative” и “nearly multiplicative,” см. определение I.4.1 ниже), называются *функционально стабильными* алгебрами. Таким образом, линейный функционал F на банаховой алгебре A называется *почти мультипликативным* или *AM-функционалом*, если формула $(a, b) \mapsto F(ab) - F(a)F(b)$,

$a, b \in A$, определяет билинейный функционал $A \rightarrow \mathbb{C}$ с малой нормой (меньшей δ для малой постоянной δ ; эта норма называется *дефектом* функционала F), и банахова алгебра A называется *функционально стабильной* алгеброй [74] или *AMNM-алгеброй* [59], если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого почти мультипликативного функционала с нормой, не превосходящей δ , существует такой мультипликативный функционал G , что $\|F - G\| \leq \varepsilon$ (т.е. F близок к мультипликативному функционалу). Алгебры непрерывных функций на компактах и ряд других алгебр, часто используемых в анализе, функционально стабильны [59]. Случай алгебр гладких функций рассматривался в [177]. Пример алгебры функций, не являющейся функционально стабильной, приведен в [59], а пример равномерной алгебры, не являющейся функционально стабильной – в [105].

§ I.4. Теория Джонсона

Б.Э. Джонсон [17] связал вопросы теории возмущений банаховых алгебр с условием аменабельности. Эта связь между возмущениями умножений и гомоморфизмов в банаховых алгебрах и свойствами когомологий Хохшильда этих алгебр была развита в последующих работах [59]–[62], [75]–[82].

Следующее определение Джонсона [77], во многом обязанное своим появлением его предыдущим работам [17], [59], [61], [75], [76], вводит так называемые AMNM-пары банаховых алгебр, т.е. пары, для которых любое отображение A в B , для которого образ произведения мало отличается от произведения образов, близко к обычному гомоморфизму.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I.4.1 (см. [77]). Пусть A и B – банаховы алгебры. Пара (A, B) называется *AMNM-парой*, если для любых $\varepsilon > 0$ и $C > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого ограниченного линейного оператора $T: A \rightarrow B$, удовлетворяющего условиям $\|T\| \leq C$ и $\|T(aa_1) - T(a)T(a_1)\| \leq \delta\|a\|\|a_1\|$ при любых $(a, a_1 \in A)$, существует такой ограниченный гомоморфизм $S: A \rightarrow B$, что $\|T - S\| \leq \varepsilon$. Банахова алгебра A называется *AMNM-алгеброй* [59], если $(A, \mathbb{C})$ есть AMNM-пара.

Например, как показано в [77], любая конечномерная пара банаховых алгебр есть AMNM-пара.

Теорема Джонсона утверждает, что для любого аппроксимативно мультипликативного отображения аменабельной банаховой алгебры в банахову алгебру, являющуюся дуальным банаховым пространством, существует близкий гомоморфизм, если дефект этого отображения мал. Приведем точную формулировку этого утверждения ([77]; ср. [62], [78]–[80]), которое является одним из важнейших инструментов, используемых ниже в § III.3.

ТЕОРЕМА I.4.2 [77]. *Если A – аменабельная банахова алгебра и B – банахова алгебра, являющаяся дуальным банаховым B -бимодулем, то (A, B) – AMNM-пара.*

Условия автоматической непрерывности отображений, удовлетворяющих условию теоремы Джонсона, рассматривались, например, в [65], [122].

Кроме того, в работе [77] показано, что если A – жесткая равномерная алгебра (т.е. существует такое $\varepsilon > 0$, что любое умножение ρ с $\|\pi(x, y) - \rho(x, y)\| \leq \varepsilon \|x\| \|y\|$ ($x, y \in A$) имеет вид $\rho(a, b) = W^{-1}(\pi(Wa, Wb))$ для некоторого обратимого линейного оператора $W: A \rightarrow A$, где π – умножение в A), но не строго жесткая (где строгая жесткость A означает, что для любого $\delta > 0$ существует такое $\varepsilon > 0$, что соответствующий оператор W можно считать δ -близким к единице, $\|W - I\| < \delta$), то пара (A, A) не является AMNM-парой.

Класс алгебр с инволюцией, устроенных существенно сложнее, чем операторные алгебры в гильбертовом пространстве, образуют групповые алгебры локально компактных групп. Если $T: L^1(G_1) \rightarrow L^1(G_2)$ – изоморфизм групповых алгебр локально компактных групп G_1 и G_2 , то группы изоморфны, если T – изометрия или если норма T мало отличается от единицы, например, если $\|T\| < (1 + \sqrt{3})/2$ (а если G_1 и G_2 абелевы или связны, то для изоморфности групп G_1 и G_2 достаточно выполнения условия $\|T\| < \sqrt{2}$). Неизвестно, всегда ли это неравенство достаточно для изоморфизма групп (есть примеры, когда $\|T\| = \sqrt{2}$, но группы G_1 и G_2 не изоморфны), но если T – *-изоморфизм, $\|T\| < \sqrt{2}$ и коммутатор одной из групп G_1 и G_2 не содержит ни одного центрального элемента порядка 2, то группы G_1 и G_2 изоморфны, см. [179].

Теория возмущений для несамосопряженных алгебр делает лишь первые шаги, но в ней есть существенные результаты об изоморфизме и подобии таких алгебр. Например, рефлексивные алгебры (т.е. алгебры операторов в гильбертовом пространстве, содержащие каждый оператор, сохраняющий каждое подпространство, инвариантное относительно данной алгебры) с коммутативными решетками подпространств, допускающие линейное отображение (одна на другую), близкое к единичному оператору, изоморфны с помощью оператора, близкого к унитарному, а если они близки в смысле хаусдорфова расстояния между единичными шарами, то в некоторых дополнительных предположениях эти алгебры подобны [180].

§ I.5. Утверждение, дополняющее теорему Джонсона

Чтобы не загромождать изложение, мы ограничимся здесь простейшим гильбертовым случаем и заметим, что любое представление банаховой алгебры A в гильбертовом пространстве H снабжает полную матричную алгебру $\mathcal{L}(H)$ (всех непрерывных линейных операторов в H) естественной структурой дуального A -модуля и преддвойственным пространством служит пространство операторов со следом с естественной модульной структурой [149].

ЛЕММА I.5.1. *Любое билинейное отображение $R: A \times A \rightarrow \mathcal{L}(H)$ можно естественно отождествить с соответствующим линейным отображением $A \hat{\otimes} A \rightarrow \mathcal{L}(H)$, которое мы снова обозначим через R . Пусть M – виртуальная диагональ в $A \hat{\otimes} A$. Положим $\gamma R = \iota^* R^{**}(M) \in \mathcal{L}(H)$, где ι – каноническое вложение пространства ядерных операторов $(\mathcal{L}(H))^* = \mathcal{T}(H)$ в $(\mathcal{L}(H))^* = \mathcal{T}(H)^{**}$. Пусть $m_\alpha = \sum_j a_{\alpha j} \otimes b_{\alpha j} \in \mathcal{L}(H) \otimes \mathcal{L}(H)$ – аппроксимативная диагональ. Тогда предельное соотношение $\lim_\alpha \sum_j R(a_{\alpha j}, b_{\alpha j}) = \gamma R$ выполняется в слабой* топологии на $\mathcal{L}(H)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это утверждение фактически установлено в доказательстве основной теоремы 3.1 в [77].

ТЕОРЕМА I.5.2. *Близкие представления аменабельной банаховой алгебры в гильбертовом пространстве подобны. Более точно, пусть A – аменабельная банахова алгебра, H – гильбертово пространство, π и ρ – представления аменабельной банаховой алгебры A в H . Для любых $\varepsilon > 0$ и $C > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из условий $\varepsilon C < 1$, $\|\pi(a) - \rho(a)\| \leq \varepsilon\|a\|$, $\|\rho(a)\| \leq C\|a\|$ и $\|\pi(a)\| \leq C\|a\|$ для всех $a \in A$ следует, что представления π и ρ подобны, т.е. существует такой непрерывный линейный оператор $S \in \mathcal{L}(H)$, что $\pi(a)S = S\rho(a)$ для всех $a \in A$, причем $\|S - 1_H\| \leq C\varepsilon$, где 1_E – единичный оператор в E .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в доказательстве теоремы 3.1 в [77], мы можем считать, что алгебра A унитарна, а отображения π и ρ переводят единицу в единичный оператор. Положим $R(a, b) = \pi(a)\rho(b)$, $a, b \in A$, и применим построение леммы I.5.1. Тогда $S = \gamma R$ – непрерывный линейный оператор в H , и из соотношений $\sum_j a_{\alpha j} b_{\alpha j} \rightarrow 1_A$ (по норме) и $\sum_j a_{\alpha j} b_{\alpha j} a - a a_{\alpha j} b_{\alpha j} \rightarrow 0$ (по норме) следует, что $\sum_j \pi(a_{\alpha j} b_{\alpha j}) \rightarrow 1_H$, $\sum_j \rho(a_{\alpha j} b_{\alpha j}) \rightarrow 1_H$ и $\pi(a)\gamma R = \gamma R\rho(a)$, а неравенство $\|\gamma R - 1_H\| \leq C\varepsilon$ связано с тем, что R близок, скажем, к отображению $R_\pi(a, b) = \pi(a)\pi(b)$, $a, b \in A$, для которого, как мы только что видели, $\gamma R_\pi = 1_H$.

§ I.6. Теоремы об автоматической тривиальности коциклов с коэффициентами в представлениях

Этот пункт добавлен в основной текст по предложению рецензента. Чтобы упростить изложение, мы не вводим комплекса когомологий с коэффициентами в представлении и ограничимся 1-коциклами и 1-кограницами. Напомним общеизвестное определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I.6.1. Пусть G – топологическая группа, E – банахово пространство, π – ограниченное слабо непрерывное представление группы G в E . Слабо непрерывное отображение b группы G в E , удовлетворяющее условию $b(gh) = b(g) + \pi(g)b(h)$, $g, h \in G$, называется 1-коциклом с коэффициентами в π и 1-коцикл b называется тривиальным или 1-кограницей с коэффициентами в π , если существует такой вектор $\xi \in E$, что $b(g) = \pi(g)\xi - \xi$ для всех $g \in G$.

Приведем одну из современных форм теоремы об автоматической тривиальности 1-коциклов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.6.2 (см. [181; предложение 2.2.9]). Пусть π – ортогональное слабо непрерывное представление топологической группы G в гильбертовом пространстве H . Если b – 1-коцикл с коэффициентами в π , то b является 1-кограницей тогда и только тогда, когда он ограничен.

Это утверждение было (в несколько более общей форме) доказано А. М. Вершиком и С. И. Карпушевым в 1982 г. в [182]. Еще более общее утверждение (для ограниченных 1-коциклов со значениями в рефлексивных банаховых пространствах) было доказано Б. Э. Джонсоном в 1972 г. в [17]. Используя

теорему о разностях для векторнозначных слабо почти периодических функций (см., например, [183]), нетрудно видеть, что любой ограниченный 1-коцикл со значениями в рефлексивном банаховом пространстве слабо почти периодичен. С другой стороны, любая векторнозначная слабо почти периодическая функция допускает однозначно определенное инвариантное среднее (см., например, [183]). Поэтому следующее утверждение является обобщением теорем об автоматической тривиальности 1-коциклов, приведенных в [17], [181] и [182].

ТЕОРЕМА I.6.3. *Пусть π – ограниченное слабо непрерывное представление топологической группы G в банаховом пространстве E . Пусть b – ограниченный 1-коцикл с коэффициентами в π . Если b допускает инвариантное среднее значение (т.е. на замкнутом в равномерной норме векторном подпространстве L_b в пространстве $BWC(G, E)$ ограниченных слабо непрерывных E -значных функций на G , порожденном функцией b , существует отображение, переводящее L_b в себя, инвариантное относительно сдвигов и значение которого на каждой функции принадлежит замкнутой выпуклой оболочке значений этой функции), то b является 1-кограницей.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применение инвариантного среднего к ограниченной векторнозначной функции перестановочно с непрерывными линейными операторами (см., например, [183]). Поэтому мы можем применить левоинвариантное среднее по переменному $h \in G$ к формуле $b(gh) = b(g) + \pi(g)b(h)$, $g, h \in G$. Обозначим среднее значение функции b через $\eta \in E$. Ввиду левой инвариантности среднего мы получаем равенство $\eta = b(g) + \pi(g)\eta$, $g \in G$, и формула для кограницы получается для $\xi = -\eta$.

СЛЕДСТВИЕ I.6.4. *В частности, утверждение теоремы I.6.3 справедливо для почти периодических и слабо почти периодических 1-коциклов.*

Глава II. Квазипредставления групп и их связь с почти представлениями групповых алгебр

§ II.1. Основные определения и свойства квазипредставлений групп

II.1.1. Определение квазипредставления. Основные свойства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ II.1.1 ([7], [9], [109], [112]). Пусть S – полугруппа, E – топологическое векторное пространство. Отображение T полугруппы S в алгебру $L(E)$ непрерывных линейных операторов в E называется *квазипредставлением* (точнее, *U -квазипредставлением*, где U – данное равностепенно непрерывное семейство в $L(E)$) полугруппы S в E , если семейство $U(T)$, определяемое равенством $U(T) = \{T(s_1 s_2) - T(s_1)T(s_2) \mid s_1, s_2 \in S\}$, равностепенно непрерывно (соответственно, если $U(T)$ содержится в U).

Если локально выпуклое пространство E метризуемо и d – некоторая метрика в E , а $\varepsilon > 0$, то отображение T называется ε -квазипредставлением относительно метрики d , если $d(T(s_1 s_2)x, T(s_1)T(s_2)x) \leq \varepsilon d(x, 0)$, $s_1, s_2 \in S$, $x \in E$, а число ε называется *дефектом* или *точностью* квазипредставления T .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ II.1.2. Пусть G – топологическая группа, e – единичный элемент в G , B – банахово пространство, $\mathcal{L}(B)$ – алгебра ограниченных линейных операторов в B , 1_B – единичный оператор в B . Группа G называется *устойчиво представимой* в B , если для любых $\varepsilon > 0$ и $C > 0$ существует число $\delta > 0$, обладающее следующим свойством: если T – слабо непрерывное δ -квазипредставление группы G в B обратимыми операторами, удовлетворяющее условиям $T(e) = 1_B$, $T(g)^{-1} = T(g^{-1})$ и $\|T(g)\| \leq C$ для всех $g \in G$, то существует такое слабо* непрерывное представление R группы G в B^* , что $\|T(g)^* - R(g)\| \leq \varepsilon$ для всех $g \in G$, т.е. отображение T^* является ε -возмущением обычного (слабо* непрерывного) представления группы G .

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА II.1.3 [9]. Любая аменабельная локально компактная группа устойчиво представима в любом банаховом пространстве.

Основное отличие результата П. де ла Гарпа и М. Каруби [56] от теоремы II.1.3 состоит в том, что для ограниченных квазипредставлений компактных групп нет необходимости в переходе к сопряженному модулю. А именно, справедливо следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ II.1.4 (см. [56]). Пусть A – комплексная банахова алгебра с единицей и M – унитарный правый банахов A -модуль. Пусть $\|vx\|_M \leq \|v\|_M \|x\|_A$ для всех $v \in M$ и $x \in A$. Если $0 \leq \varepsilon \leq 2^{-6}$, $K \geq 1$, G – компактная топологическая группа, π – такой δ -квазигомоморфизм группы G в группу G_M обратимых A -модульных отображений банахова модуля M в себя, что $\|\pi(g)\| \leq K$ и $\|\pi(g)^{-1}\| \leq K$ для всех $g \in G$ (т.е. $\|\pi(g)\pi(h) - \pi(gh)\| \leq \delta$ для всех $g, h \in G$) при $\delta \leq \varepsilon(2K)^{-9}$, то существует гомоморфизм ρ группы G в G_M , удовлетворяющий условию $\|\rho(g) - \pi(g)\| \leq \varepsilon$ для всех $g \in G$.

Приведем некоторые другие достаточные условия того, что данное квазипредставление аменабельной группы есть ограниченное (и даже малое) возмущение обычного представления. Характеризация локально компактных групп, аменабельных как дискретные группы, приведена в [184]. Связная локально компактная группа аменабельна как дискретная группа тогда и только тогда, когда она разрешима [145].

ТЕОРЕМА II.1.5 (см. [112]). Пусть G – аменабельная дискретная группа и T – (вообще говоря, неограниченное) δ -квазипредставление группы G в сопряженном банаховом пространстве E , $\delta < 1/2$. Предположим дополнительно, что $T(e) = 1_E$ и $T(g)^{-1} = T(g^{-1})$ для всех $g \in G$. Существует (обычное) представление S группы G в E такое, что $\|S(g) - T(g)\| \leq \varepsilon$ для всех $g \in G$, где $\varepsilon = f(\delta)$ с $f(t) = 1/(2 - 4t)$, $t \in [0, 1/2)$.

Это свойство сильнее свойства устойчивой представимости, поскольку, в частности, в отличие от условия устойчивой представимости (см. определение II.1.2), даже если T ограничено, величина δ не зависит здесь от величины C .

ТЕОРЕМА II.1.6 (см. [112]). Пусть G – аменабельная топологическая группа, E – сопряженное банахово пространство, F – замкнутое векторное подпространство в E , а θ – такое слабо непрерывное δ -квазипредставление топологической группы G в E , что $\theta(g)F \subset F$ для любых $g \in G$. Предположим, что θ локально равномерно ограничено, $\theta(e) = 1_E$ и $\theta(g^{-1}) = \theta(g)^{-1}$ для всех $g \in G$. Предположим также, что и ограничение представления θ на F и отображение, определяемое отображением θ в факторпространстве E/F , являются обычными представлениями. Тогда существует такое слабо непрерывное представление π группы G в E , что $\|\pi(g) - \theta(g)\| \leq \delta$ для всех $g \in G$, и представления, определяемые представлением π в F и E/F , совпадают с представлениями, определяемыми квазипредставлением E в F и E/F соответственно.

Обозначим через I применение левоинвариантного среднего на группе и будем отмечать в индексе переменную, по которой берется среднее. Следующее утверждение нетривиально в связи с возможным несохранением непрерывности при взятии среднего, отмеченным во введении.

СЛЕДСТВИЕ II.1.7 (см. [112]). Пусть G – аменабельная топологическая группа, E – сопряженное банахово пространство, F – замкнутое векторное подпространство в E , а θ – такое слабо непрерывное δ -квазипредставление топологической группы G в E , что $\theta(g)F \subset F$ для любых $g \in G$. Предположим, что $\theta(e) = 1_E$, θ локально равномерно ограничено и соотношения $\theta(g^{-1}) = \theta(g)^{-1}$ выполнены для всех $g \in G$. Предположим также, что ограничение представления θ на F и отображение, определяемое отображением θ в E/F , являются обычными представлениями. Тогда функция $g \mapsto I_h(\theta(gh)\theta(h^{-1}))$, $g \in G$, слабо непрерывна как функция со значениями в непрерывных линейных операторах в E .

В лемме II.1.8 собраны некоторые элементарные сведения о неограниченных квазипредставлениях групп.

ЛЕММА II.1.8 (см. [112]). Пусть G – группа, T – ее неограниченное квазипредставление в банаховом пространстве $E = E_T$.

1) Квазипредставление T имеет хотя бы одну неограниченную орбиту.

2) T -орбита вектора $(T(gh) - T(g)T(h))x$ ограничена для любых $g, h \in G$ и любого вектора $x \in E$. В частности, если все ненулевые T -орбиты неограничены, то T – обычное представление.

3) Пусть L – векторное подпространство E , образованное всеми элементами $x \in E$ такими, что орбита $O_T(x) = \{T(g)x, g \in G\}$ ограничена. Снабдим L нормой $\|x\|_L = \sup_{g \in G} \|T(g)x\|$, $x \in E$, где $\|\cdot\| = \|\cdot\|_E$. Тогда тождественное отображение $j: L \rightarrow E$ непрерывно и L полно относительно нормы $\|\cdot\|_L$. Векторное подпространство $L \subset E$ инвариантно относительно всех операторов $T(g)$, $g \in G$, и соотношения $\|T(g)x\|_L \leq \|x\|_L + \varepsilon\|x\|$ и $\|(T(k)T(l) - T(kl))x\|_L \leq \varepsilon\|T(l)x\| + 2\varepsilon\|x\|$, $g, k, l \in G$, $x \in E$, выполняются для всех $g, k, l \in G$; в частности, $\|T(k)T(l) - T(kl)\|_L \leq 3\varepsilon$ для всех $k, l \in G$.

4) Пусть S – квазипредставление группы G , являющееся ограниченным возмущением квазипредставления T , т.е. отображение $S - T: G \rightarrow \mathcal{L}(E)$ имеет

ограниченный образ. Тогда образ оператора $S(g) - T(g)$ содержится в подпространстве $L \subset E$ для любого $g \in G$. В частности, если все ненулевые T -орбиты в E неограничены (так что T – обычное представление, см. утверждение 2)), то T жестко в том смысле, что если ограниченное возмущение S квазипредставления T является квазипредставлением, то S совпадает с T .

Как отмечено в [112], при доказательстве существования обычного представления, близкого к неограниченному непрерывному квазипредставлению с малым дефектом, нельзя непосредственно воспользоваться аменабельностью групповой алгебры. Может показаться возможным использовать аменабельность групповых алгебр с весом. Аменабельность таких алгебр действительно имеет место для некоторых аменабельных локально компактных групп и некоторых весов, но класс аменабельных алгебр с весом невелик. В частности, в [169] показано, что если G – локально компактная группа и неотрицательный непрерывный вес ω на G субмультипликативен (т.е. $\omega(st) \leq \omega(s)\omega(t)$, $s, t \in G$), то банахова алгебра $L^1(G, \omega)$ аменабельна тогда и только тогда, когда группа G аменабельна и $\sup\{\omega(g)\omega(g^{-1}) \mid g \in G\} < \infty$, и в этом случае банахова алгебра $L^1(G, \omega)$ изоморфна групповой алгебре $L^1(G)$ [170].

II.1.2. Другие операции над ε -квазипредставлениями. Для ε -квазипредставлений естественным образом определена операция прямой суммы (в подходящей прямой сумме пространств ε -квазипредставлений), а для ограниченных ε -квазипредставлений в нормированных пространствах (т.е. ε -квазипредставлений T , удовлетворяющих для некоторого $C > 0$ условиям $\|T(s)\| \leq C$ для всех $s \in S$) естественно определена и операция тензорного произведения (в подходящем тензорном произведении пространств ε -квазипредставлений), и тензорное произведение ε -квазипредставления и δ -квазипредставления в гильбертовых пространствах (с образами в шарах радиусов C_ε и C_δ соответственно) является σ -квазипредставлением, где $\sigma = \delta C_\varepsilon + \varepsilon C_\delta + \varepsilon \delta$, и его образ содержится в шаре радиуса $C_\varepsilon C_\delta$.

Далее, если X – некоторое множество, Ω – некоторая σ -алгебра его подмножеств, μ – мера на σ -алгебре Ω , $(H(x), x \in X)$ – измеримое поле сепарабельных гильбертовых пространств (см., например, [148]) и $(T(x), x \in X)$ – измеримое равномерно ограниченное поле ε -квазипредставлений (т.е. $T(x)$ – ε -квазипредставление группы G в гильбертовом пространстве $H(x)$ при каждом $x \in X$ и для любого $g \in G$ операторное поле $(T(x)(g), x \in X)$ равномерно ограничено и измеримо), то в прямом интеграле гильбертовых пространств $\mathcal{H} = \int_X H(x) d\mu(x)$ семейство операторов $\{T(g), g \in G\}$, определяемых как прямые интегралы $T(g) = \int_X T(x)(g) d\mu(x)$, определяет ε -квазипредставление (более точно, σ -квазипредставление, где $\sigma = \text{ess sup } E \leq \varepsilon$, а измеримая функция E определяется формулой $E(x) = \sup\{\|T(x)(gh) - T(x)(g)T(x)(h)\| \mid g, h \in G\}$ для $x \in X$).

Очевидно, что ограничение ε -квазипредставления на подгруппу является δ -квазипредставлением с некоторым $\delta \leq \varepsilon$.

Кроме того, если G – сепарабельная локально компактная группа, H – ее замкнутая подгруппа и T – ε -квазипредставление группы H в нормированном

пространстве E , то в пространстве $L^2(H \setminus G)$ измеримых E -значных вектор-функций на однородном пространстве $H \setminus G$ с суммируемым квадратом относительно квазиинвариантной меры ν на $H \setminus G$ действует ε -квазипредставление V^T группы G , определяемое формулой $V^T(g)f(x) = T(h(x, g))\theta(x, g)f(x(g))$, $f \in L^2(H \setminus G)$, $g \in G$, $x \in H \setminus G$, где $x(g)$ – точка однородного пространства $H \setminus G$, в которую переходит точка $x \in H \setminus G$ при правом действии элемента $g \in G$, $\theta(x, g) \geq 0$ – квадратный корень из производной Радона–Никодима образа квазиинвариантной меры $d\nu(x)$ при действии элемента $g \in G$ на $H \setminus G$ по исходной мере $d\nu(x)$, а множитель $T(h(x, g))$ определяется с помощью формулы $X(x)g = h(x, g)X(x(g))$, где $X: H \setminus G \rightarrow G$ – некоторое борелевское сечение такое, что образ элемента $X(x)$ при каноническом отображении G на $H \setminus G$ равен x для всех $x \in H \setminus G$ [185]. Эту операцию естественно называть операцией *квазииндуцирования*, а ε -квазипредставление V^T – ε -квазипредставлением группы G , квазииндуцированным ε -квазипредставлением T подгруппы H группы G .

II.1.3. Почти гомоморфизмы групповых алгебр и ограниченные измеримые ε -квазипредставления локально компактных групп.

ТЕОРЕМА II.1.9. Семейство ограниченных измеримых ε -квазипредставлений локально компактной группы в сепарабельных банаховых пространствах связано с введенным Джонсоном семейством почти гомоморфизмов (или обобщенных гомоморфизмов), см. [17], [59]–[61], [76], [77], групповой алгебры этой локально компактной группы с помощью интегрального соотношения, связывающего ограниченные представления этой группы и ее групповой алгебры в банаховых пространствах.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если T – скалярно измеримое и существенно ограниченное (т.е. удовлетворяющее условию $\|T(g)\| \leq C$ для почти всех $g \in G$ по мере Хаара и для некоторого $C > 0$) существенное ε -квазипредставление локально компактной группы G в сепарабельном банаховом пространстве E (естественно, отображение T локально компактной группы G в пространство ограниченных линейных операторов в банаховом пространстве называется *существенным ε -квазипредставлением*, если соотношение $\|T(g_1 g_2) - T(g_1)T(g_2)\| \leq \varepsilon$ выполняется для почти всех $g_1, g_2 \in G$) и если $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ – алгебра ограниченных линейных операторов в E , то формула $T(f) = \int_G f(g)T(g)dg$, $f \in L_1(G)$, где dg – левоинвариантная мера Хаара на G , определяет LMNM-отображение групповой алгебры $L_1(G)$, т.е. такое линейное отображение $T: L_1(G) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{E})$, которое близко к мультипликативному отображению, а именно, $\|T(f_1 * f_2) - T(f_1)T(f_2)\| \leq \varepsilon \|f_1\| \|f_2\|$ для всех $f_1, f_2 \in L_1(G)$. Справедливость этого неравенства следует из очевидной оценки

$$\begin{aligned} & \|T(f_1 * f_2) - T(f_1)T(f_2)\| \\ &= \left\| \int_G (f_1 * f_2)(g)T(g)dg - \int_G f_1(g_1)T(g_1)dg_1 \int_G f_2(g_2)T(g_2)dg_2 \right\| \\ &= \left\| \int_G \int_G (f_1(h)f_2(h^{-1}g)dh)T(g)dg - \int_G f_1(g_1)T(g_1)dg_1 \int_G f_2(g_2)T(g_2)dg_2 \right\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| \int_G \int_G f_1(g_1) f_2(g_2) (T(g_1 g_2) - T(g_1) T(g_2)) dg_1 dg_2 \right\| \\
&\leq \int_G \int_G |f_1(g_1)| |f_2(g_2)| \|T(g_1 g_2) - T(g_1) T(g_2)\| dg_1 dg_2,
\end{aligned}$$

где вычисление оправдывается неравенством между нормой интеграла и интегралом нормы [186]. (Напомним, что пространство E предполагается сепарабельным, и поэтому слабая измеримость отображения T равносильна сильной измеримости, и функция $g \mapsto \|T(g)\|$, $g \in G$, автоматически оказывается измеримой как верхняя грань последовательности измеримых функций [186].)

Обратно, пусть S – ε -почти гомоморфизм групповой алгебры $L_1(G)$ сепарабельной локально компактной группы G в алгебру $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ ограниченных линейных операторов в банаховом пространстве E , которое является сопряженным к некоторому банахову пространству E_* (вообще говоря, не определенному однозначно), т.е. предположим, что отображение S линейно, непрерывно и удовлетворяет условию $\|S(f_1 * f_2) - S(f_1)S(f_2)\| \leq \varepsilon \|f_1\| \|f_2\|$ для некоторого $\varepsilon > 0$ и всех $f_1, f_2 \in L_1(G)$.

Так как S непрерывно, то образ отображения S сепарабелен. Поэтому [186; следствие VI.8.7] существует такое отображение T группы G в пространство $L(E)$, что для любых $\xi \in E$ и $\eta \in E^*$ функция $g \mapsto (T(g)\xi, \eta)$, $g \in G$, измерима и существенно ограничена, причем $(S(f)\xi, \eta) = \int_G f(g)(T(g)\xi, \eta) dg$ для $\xi \in E$ и $\eta \in E^*$, а норма отображения T равна существенной верхней грани функции $g \mapsto \|T(g)\|$, $g \in G$ (что следует из [186; теорема VI.8.2] с учетом того, что банахово пространство $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ изометрично банахову пространству, сопряженному проективному тензорному произведению E_* и E , ср. [149; III.2.3]). Тогда соотношение $\|S(f_1 * f_2) - S(f_1)S(f_2)\| \leq \varepsilon \|f_1\| \|f_2\|$ принимает вид неравенства

$$\begin{aligned}
&\sup \left\{ |(S(f_1 * f_2) - S(f_1)S(f_2))\xi, \eta| \mid \xi, \eta \in E, \|\xi\| \leq 1, \|\eta\| \leq 1 \right\} \\
&= \sup \left\{ \left| \int_G \int_G f_1(g) f_2(h) ((T(gh) - T(g)T(h))\xi, \eta) dg dh \right| \mid \|\xi\|, \|\eta\| \leq 1 \right\} \\
&\leq \varepsilon \|f_1\| \|f_2\|,
\end{aligned}$$

из которого следует, что для любых $\xi, \eta \in E$ существенная верхняя грань функции $\{g, h\} \mapsto |((T(gh) - T(g)T(h))\xi, \eta)|$ не превосходит $\varepsilon \|\xi\| \|\eta\|$, так что $\text{ess sup}_{g, h \in G} \|T(gh) - T(g)T(h)\| \leq \varepsilon$.

§ II.2. Псевдопредставления групп. Чистые псевдопредставления. Примеры

Теорема об устойчивой представимости для аменабельных групп показывает, что ограничение любого ограниченного квазипредставления с малым дефектом на аменабельную подгруппу – в частности, на подгруппу, порожденную одним элементом, – допускает аппроксимацию обычным ограниченным представлением подгруппы. Конечно, аппроксимирующее представление, вообще говоря, не определено однозначно (в [9] приведен пример двумерного квазипредставления группы $\mathbb{Z}$, для которого аналог явной формулы из [56] приводит к представлению, зависящему от выбора инвариантного среднего на $\mathbb{Z}$), но близкие

представления аменабельной группы подобны с помощью оператора, близкого к единице. Этот факт позволяет ввести следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ II.2.1 ([7], [9], [109], [112]). Пусть G – группа, π – ε -квази-представление группы G в банаховом пространстве E . Отображение π называется ε -псевдопредставлением, если $\pi(g)^{-1} = \pi(g^{-1})$ для всех $g \in G$ и для всех $g \in G$ и всех $n \in \mathbb{Z}$ существует такой линейный оператор $A(n, g)$ в $L(E^*)$, что $\|A(n, g) - \mathbf{1}_{E^*}\| \leq \varepsilon$ и $\pi(g^n)^* = A(n, g)(T(g)^*)^n A(n, g)^{-1}$ для всех $g \in G$ и всех $n \in \mathbb{Z}$, где $\|\cdot\|$ – операторная норма в $L(E^*)$, а $\mathbf{1}_{E^*}$ – единичный оператор в E^* .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ II.2.2 [9]. Пусть G – группа, E – банахово пространство. Группа G называется устойчиво псевдопредставимой в банаховом пространстве E , если для любых $\varepsilon > 0$ и $C > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если π – δ -квазипредставление группы G в E обратимыми операторами, удовлетворяющее условиям $\|\pi(g)\| \leq C$, $\|\pi(g)^{-1}\| \leq C$ для всех $g \in G$, то существует такое ε -псевдопредставление ρ группы G в E^* , что $\|\pi(g)^* - \rho(g)\| \leq \varepsilon$ для всех $g \in G$.

“Подкручивание” A существенно в определении II.2.2, как показывает пример II.3.6 ниже.

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА II.2.3 [9]. Любая группа устойчиво псевдопредставима в любом банаховом пространстве.

Основной дефект определения псевдопредставления состоит в отсутствии естественной процедуры типа усреднения, оставляющей данное псевдопредставление на месте. Этого дефекта лишено следующее понятие, выделяющее важный узкий класс псевдопредставлений, для которого $A \equiv 1$. Этот класс представляет особый интерес для свободных групп и односвязных групп Ли. Как мы увидим в § IV.1, этот класс псевдопредставлений полупростых групп Ли достаточно богат для решения некоторых задач лифтинга и деформации представлений групп (см. [7], [9], [109] и [112]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ II.2.4. Квазипредставление π группы G называется *чистым псевдопредставлением*, если ограничение π на любую аменабельную подгруппу H группы G является обычным унитарным представлением группы H .

§ II.3. Структура одномерных квазипредставлений групп. Квазихарактеры и псевдохарактеры

В этом параграфе мы приводим краткий обзор современного состояния теории псевдохарактеров на группах и полугруппах и ее приложений, а также некоторые родственные результаты.

II.3.1. Определение и основные свойства. Для одномерных квазипредставлений “подкручивание” A в определении II.2.1 не влияет на результат, и поэтому аппроксимирующий объект определен однозначно и является одномерным чистым псевдопредставлением. Простейшая форма такого отображения – экспонента от отображения, переводящего произведение элементов группы “почти” в сумму образов этих элементов. Приведем соответствующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ II.3.1. Пусть S – полугруппа. Вещественная функция f на S называется (вещественным) квазихарактером на S , если множество $\{f(st) - f(s) - f(t) \mid s, t \in S\}$ ограничено. Вещественный квазихарактер f на S называется (вещественным) псевдохарактером на S , если $f(x^n) = nf(x)$ для всех $x \in S$ и всех $n \in \mathbb{N}$.

ТЕОРЕМА II.3.2 (см. [9]). Пусть S – полугруппа, f – вещественный квазихарактер на S .

- (a) Для любого $s \in S$ существует предел $\varphi(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}f(s^n)$, и если $|f(st) - f(s) - f(t)| \leq C$ для всех $s, t \in S$, то $|f(s) - \varphi(s)| \leq C$ для всех $s \in S$ и $|\varphi(st) - \varphi(s) - \varphi(t)| \leq 4C$ для всех $s, t \in S$.
- (b) Если R – односторонне аменабельная подполугруппа в S , то ограничение φ на R есть аддитивный характер R , т.е. $\varphi(st) = \varphi(s) + \varphi(t)$ для всех $s, t \in R$. Кроме того, величина $\varphi(s)$, $s \in R$, может быть определена как общее значение всех односторонних инвариантных средних на соответствующей ограниченной функции $t \mapsto f(ts) - f(t)$, $t \in R$, или $t \mapsto f(st) - f(t)$, $t \in R$.
- (c) $\varphi(xy) = \varphi(yx)$ для всех $x, y \in S$.
- (d) Если $S = G$ – группа, N – нормальный делитель в G , π – канонический эпиморфизм G на G/N и псевдохарактер φ обращается в нуль на N , то существует такой псевдохарактер ψ группы G/N , что $\varphi = \psi \circ \pi$. Если G – локально компактная группа, N замкнут и φ непрерывен, то ψ непрерывен.

СЛЕДСТВИЕ II.3.3 (см. [9]).

- (a) Ограниченный псевдохарактер (в частности, псевдохарактер на полугруппе с нулем) равен нулю.
- (b) Для любого квазихарактера f на полугруппе S существует единственный псевдохарактер φ на S , для которого разность $f - \varphi$ ограничена, причем для всех $s \in S$ предел $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}f(s^n)$ существует и равен $\varphi(s)$. Отображение $f \mapsto \varphi$, сопоставляющее квазихарактеру f связанный с ним псевдохарактер, линейно и является проектором. Если $\|df\|$ – дефект квазихарактера f (определяемый как квазинорма в пространстве квазихарактеров, определяемая условием, что $\|df\|$ есть радиус наименьшего замкнутого шара с центром в нуле, содержащего множество $\{f(st) - f(s) - f(t) \mid s, t \in S\}$), то отображение $f \mapsto \varphi$ непрерывно.

ПРИМЕР II.3.4 (см. [9]). Приведем пример нетривиального псевдохарактера. Пусть M – группа, и пусть в M можно выделить такие подмножества M^+ и M^- , что $e \notin M^+$, $M^+ \cap M^- = \emptyset$, $M^- = (M^+)^{-1}$, $M = M^+ \cup M^- \cup \{e\}$. Введем отображение $\text{sign}: M \rightarrow \mathbb{Z}$, полагая $\text{sign}(m)$ равным 1 при $m \in M^+$, -1 при $m \in M^-$ и $\text{sign}(e) = 0$. Пусть N – группа, $N \neq \{e\}$. Определим функцию f на свободном произведении $G = M * N$, полагая $f(g) = \sum_{i=1}^{k+1} \text{sign}(m_i)$ для $g = m_1 n_1 m_2 n_2 \cdots m_k n_k m_{k+1}$, где $m_i \in M$, $n_i \in N$, $n_i \neq e$ для всех $i = 1, \dots, k$ и $m_i \neq e$ для $i = 2, \dots, k$. Функция f есть квазихарактер на G , принимающий целые значения, и $|f(g_1 g_2) - f(g_1) - f(g_2)| \leq 3$ для всех $g_1, g_2 \in G$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В статье [57] построен пример конечномерного (но не одномерного) квазипредставления фундаментальной группы римановой поверхности, не близкого к обычным представлениям. С другой стороны, экспонента от квазихарактера, построенного в примере II.3.4, – это *одномерное* квазипредставление, не близкое к характерам.

ПРИМЕР II.3.5 (продолжение примера II.3.4; частные случаи).

(а) *Свободная группа*. Пусть $M \neq \{e\}$ – подгруппа группы $\mathbb{R}$, $M^+ = \{x \mid x \in M, x > 0\}$, и пусть sign есть ограничение обычного знака на M^+ . Тогда приведенная выше конструкция дает нетривиальный псевдохарактер на свободном произведении $M * N$ для любой группы $N \neq \{e\}$. В частности, на любой свободной группе существует нетривиальный псевдохарактер.

(b) *Группа $\text{PSL}(2, \mathbb{Z}) = \text{SL}(2, \mathbb{Z})/\{e, -e\} = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$* . Пусть N – образ в $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ подгруппы группы $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$, порожденной элементом $a = (a_{ij})$, $i, j = 1, 2$, $a_{11} = a_{22} = 0$, $a_{12} = -a_{21} = 1$; пусть M – образ подгруппы, порожденной элементом $b = (b_{ij})$, $i, j = 1, 2$, где $b_{11} = b_{12} = 1$, $b_{21} = -1$, $b_{22} = 0$. Если A и B – образы элементов a и b в $G = \text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ соответственно, то $A^2 = B^3 = 1_G$ в G , причем G есть свободное произведение своих циклических подгрупп N и M , порожденных элементами A и B , соответственно. Положим $M^+ = B$, $M^- = B^2$; тогда, очевидно, все условия примера (а) будут выполнены, что определяет квазихарактер на G (и потому также и связанный с ним псевдохарактер на G).

Таким образом, свободные группы (с более чем одной образующей) и свободные произведения на бесконечные циклические группы и циклические группы нечетного порядка имеют нетривиальные псевдохарактеры. Как указано во введении, их описание приведено в [21] и [22].

(с) *Псевдохарактер Радемахера*. Пусть η – эта-функция Дедекинда на верхней полуплоскости $\mathbb{C}^+$, т.е. $\eta(\tau) = e^{\pi i \tau / 12} h(e^{2\pi i \tau})$, где функция h есть произведение $h(x) = \prod_{m=1}^{\infty} (1 - x^m)$, $x = e^{2\pi i \tau}$, $\text{Im } \tau > 0$. Воспользуемся известными формулами для логарифма η -функции: если выбрать ветвь логарифма с $\text{Im } \ln(i) \in (0, \pi)$, то $\ln \eta(\tau') = \ln \eta(\tau) + ((\text{sgn } c)^2 \ln(c\tau + d))/2 - (\pi i/4)(\text{sgn } c) + (\pi i/12)\Phi(g)$, где $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$, $\tau' = (a\tau + b)/(c\tau + d)$, а Φ – символ Радемахера [2], отображение группы $G = \text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ в $\mathbb{R}$, удовлетворяющее соотношению $\Phi(gg') = \Phi(g) + \Phi(g') - 3 \text{sgn}(cc'c'')$ для всех $g, g' \in G$, где g, g', g'' – образы в $G = \text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$, соответственно, так что Φ – квазихарактер на G , принимающий значения в $\mathbb{Z}$. Соответствующий псевдохарактер на группе $\text{PSL}(2, \mathbb{Z}) = \text{SL}(2, \mathbb{Z})/\{\pm e\}$ (или на группе $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$) мы назовем *псевдохарактером Радемахера* (подробности см. в [9], [18]). Этот квазихарактер был позже указан в [41] с помощью вычислений и наблюдений, проведенных в [187].

Следующий пример поясняет необходимость “подкручивания” в определении псевдопредставления (см. определение II.2.1).

ПРИМЕР II.3.6. Пусть $G = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$. Пусть a, b, c – образующие сомножителей. Циклическая подгруппа, порожденная элементом ab , изоморфна $\mathbb{Z}$, и

подгруппа H в G , порожденная элементами ab и c , изоморфна свободному произведению $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$. Пусть f – квазихарактер на H , построенный в примере II.3.4 с $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$, и пусть F – соответствующий ему псевдохарактер. Пусть $\alpha \neq 0$. Как показано в [9], при малых $\alpha \neq 0$ квазипредставление группы G , квазииндуцированное псевдопредставлением $h \mapsto \exp(i\alpha F(h))$, $h \in H$, подгруппы H , не аппроксимируется никаким квазипредставлением группы G с $A(n, g) \equiv 1$ (ср. определение II.2.1).

Следующие результаты Л. Полтеровича и З. Рудника [46] содержат важную информацию о связях между псевдохарактерами на $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ и $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ и другими свойствами модулярной группы. Напомним, что *дефектом* квазихарактера φ называется величина $\|d\varphi\| = \sup_{g_1, g_2 \in G} |\varphi(g_1 g_2) - \varphi(g_1) - \varphi(g_2)|$ (ср. следствие II.3.3).

ТЕОРЕМА II.3.7 [46]. *Пусть ненулевой вещественный псевдохарактер φ группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ обращается в нуль на всех параболических элементах. Тогда существует такое положительное число α , что для любого ненулевого целочисленного вектора-строки $v \in \mathbb{Z}^2$ и любого $f \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ имеем $\|vf\| \geq \alpha \exp(|\varphi(f)|/\|d\varphi\|)/\|v\|$.*

ТЕОРЕМА II.3.8 [46]. *Пусть $h \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ – гиперболический элемент, не сопряженный своему обратному. Тогда существует такой псевдохарактер φ на $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$, что $\varphi(h) = 1$ и φ обращается в нуль на всех параболических элементах в $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$.*

Это – частный случай следующей “теоремы отделимости”.

ТЕОРЕМА II.3.9 [46]. *Пусть G – дискретная подгруппа группы $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ и $h \in G$ – примитивный элемент бесконечного порядка, не сопряженный в G своему обратному элементу. Тогда для любого конечного множества элементов $g_1, \dots, g_M \in G$, не сопряженных никаким степеням элемента h , существует такой псевдохарактер r на G , что $r(h) \neq 0$ и $r(g_1) = \dots = r(g_M) = 0$.*

Кроме того, в [46] показано, что неравенство $|\mathrm{trace}(f)| \geq (2\sqrt{5})^{|\varphi(f)|/\|d\varphi\|}$ выполняется для всех гиперболических элементов $f \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ и любого псевдохарактера φ , аннулирующего все параболические элементы в $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$. В частности, для любого нетривиального псевдохарактера (с ненулевым дефектом) модуль значения псевдохарактера сублогарифмически растет с ростом следа на гиперболических элементах.

II.3.2. Ограниченность коциклов Гишарде–Вигнера. Теория псевдохарактеров, развитие которой началось в 1983 г. [20], оказалась глубоко связанной с теорией группы двумерных ограниченных когомологий с вещественными коэффициентами для дискретных групп [24]. Это соответствие между пространствами псевдохарактеров и когомологиями было продолжено до соответствия между введенными М. Громовым [29] непрерывными ограниченными когомологиями – точнее, группой двумерных ограниченных вещественных непрерывных когомологий $\check{H}^2(G)$ локально компактной группы G – и пространством непрерывных вещественных псевдохарактеров на этой группе. Пусть $H^n(G)$

есть n -я группа когомологий комплекса

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{d^0=0} C^1(G) \xrightarrow{d^1} C^2(G) \longrightarrow \dots, \quad (1)$$

где $C^n(G)$ – вещественное векторное пространство всех непрерывных вещественных функций f на группе G^n , $f: (g_1, \dots, g_n) \mapsto f(g_1, \dots, g_n) \in \mathbb{R}$, $g_i \in G$, а

$$\begin{aligned} d^n f(g_1, \dots, g_n) &= f(g_2, \dots, g_n) + \sum_{i=1}^n (-1)^i f(g_1, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_{n+1}) \\ &\quad + (-1)^{n+1} f(g_1, \dots, g_n) \end{aligned} \quad (2)$$

(см. [154]; ср. также [153], где эти группы называются *ванэстовскими* группами вещественных когомологий, соответствующими тривиальному действию группы G на $\mathbb{R}$). Группы $\hat{H}^n(G)$ ограниченных вещественных непрерывных когомологий группы G определяются аналогично с помощью формул (1) и (2), в которых пространства $C^n(G)$ заменены пространствами $CB^n(G)$ ограниченных непрерывных функций на G^n .

Естественное отображение $\hat{H}^n(G) \rightarrow H^n(G)$ определяется рассмотрением ограниченных непрерывных коциклов как непрерывных коциклов без условия ограниченности цепей. Упомянутая выше связь между группой двумерных ограниченных вещественных непрерывных когомологий $\hat{H}^2(G)$ локально компактной группы G и пространством непрерывных вещественных псевдохарактеров на этой группе состоит в том, что при $n = 2$ ядро $\hat{H}^2(G)$ отображения $\hat{H}^2(G) \rightarrow H^2(G)$ естественно изоморфно (векторному) факторпространству $QP(G)$ пространства $P(G)$ всех непрерывных псевдохарактеров на G по векторному подпространству (обычных) непрерывных (вещественных) характеров группы G (см. [35]–[39]).

Особую роль в строении группы $\hat{H}^2(G)$ играет компонента единицы данной локально компактной группы G . Этот феномен имеет место и для хорошо изученных ванэстовских групп $H^n(G)$ (см. [153], [154]), поскольку группа $H^n(G)$ естественно изоморфна группе $H^n(G/K)$, где K – такой компактный нормальный делитель в G , что компонента единицы факторгруппы G/K является группой Ли (аналогичное рассуждение позволяет доказать, что группа $H^n(G)$ конечномерна для любой почти связной группы G). Строение группы $\hat{H}^2(G)$ определяется ее образом в $H^2(G)$ и упомянутым выше ядром $\tilde{H}(G)$ отображения $\hat{H}^2(G) \rightarrow H^2(G)$, которое может быть описано с помощью псевдохарактеров на G .

В [38] для данной локально компактной группы G строится такой “достаточно большой” нормальный делитель N в G , что компонента единицы в группе G/N является группой Ли, причем векторные пространства $\hat{H}^2(G)$ и $\hat{H}^2(G/N)$ естественно изоморфны. Это наблюдение приводит к описанию пространств $QP(G)$ и $\hat{H}^2(G)$ для любой связной локально компактной группы G и доказательству конечномерности факторпространства $QP(G)$ нетривиальных непрерывных вещественных псевдохарактеров по подпространству обычных характеров и пространства $\hat{H}^2(G)$ для любой почти связной локально компактной группы G .

Примем введенные выше обозначения для групп когомологий. Пусть G – простая группа Ли с конечным центром, а K – максимальная компактная

подгруппа группы G . Напомним результаты Гишарде–Вигнера о вещественных непрерывных 2-коциклах на G и укажем связь между этими коциклами и псевдохарактером $\varphi_{GW}: g \mapsto z(k(g))$, где $g \in G$, $k(g) \in K$, $z(k(g)) \in \mathcal{Z}(K)$. Обозначим через $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{k}$ алгебры Ли групп G и K соответственно и начнем с определений и общих фактов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ II.3.10 (см. [156]). Простая группа Ли называется *эрмитово симметрической*, если центр ее универсальной накрывающей группы бесконечен.

ТЕОРЕМА II.3.11 (см. [156; гл. VIII, IX]). Если G – простая группа Ли, то условие $H^2(G) \neq 0$ выполняется тогда и только тогда, когда центр $\mathcal{Z}(\mathfrak{k})$ алгебры Ли $\mathfrak{k}$ нетривиален, а также тогда и только тогда, когда пространство гомоморфизмов Ли $\text{Hom}(\mathfrak{k}, \mathbb{R})$ отлично от нуля. Если эти условия выполнены (в этом случае пространство G/K естественно снабжено G -инвариантной комплексной структурой, относительно которой оно является эрмитово симметрическим), то $\dim H^2(G) = \dim \mathcal{Z}(\mathfrak{k}) = \dim \text{Hom}(\mathfrak{k}, \mathbb{R}) = 1$. С точностью до локального изоморфизма, группа G совпадает с одной из следующих групп:

- (i) $\text{SU}(p, q)$, $p, q \in \mathbb{N}$,
- (ii) $\text{SO}_0(2, q)$, где $q \in \mathbb{N}$, $q \neq 2$ (напомним, что $\text{SO}_0(2, 2)$ не является простой группой Ли),
- (iii) $\text{Sp}(n, \mathbb{R})$, $n \in \mathbb{R}$,
- (iv) $\text{SO}^*(2n)$, $n > 1$ (напомним, что $\text{SO}^*(2)$ не является простой группой Ли),
- (v) вещественная форма комплексной простой группы Ли типа E_6 с $\dim \mathfrak{k} = 46$,
- (vi) вещественная форма комплексной простой группы Ли типа E_7 с $\dim \mathfrak{k} = 79$.

Приведем теперь результат Гишарде и Вигнера [188]. Пусть G – простая группа Ли и $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ – разложение Картана, связанное с компактной подалгеброй Ли $\mathfrak{k}$. Обозначим через $\exp$ экспоненциальное отображение алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в G .

ТЕОРЕМА II.3.12 [188]. Пусть v – такая бесконечно дифференцируемая функция на G со значениями в $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, что ограничение v на K – нетривиальный гомеоморфизм K на одномерный тор $\mathbb{T}$, ограничение v на $\exp \mathfrak{p}$ строго положительно и K -инвариантно, а формула $v(k \exp p) = v(k)v(\exp p)$ справедлива для любых $k \in K$ и $p \in \mathfrak{p}$. Тогда функция

$$f(g_1, g_2) = (2\pi)^{-1} \text{Arg}(v(g_1)v(g_2)v(g_1g_2)^{-1}), \quad f(e, e) = 0, \quad (3)$$

допускает непрерывную ветвь на $G \times G$, определяющую вещественный дифференцируемый 2-коцикл на G .

Следующее утверждение устанавливает связь между ограниченными и обычными 2-когомологиями простых групп Ли.

ТЕОРЕМА II.3.13. *Для любой простой группы Ли G , универсальная накрывающая которой имеет бесконечный центр, любая функция f вида (3) ограничена на $G \times G$.*

Напомним следующее наблюдение, известное еще по докладу Ж. Бессона 1988 г. в Лионе [24].

ТЕОРЕМА II.3.14. *Пусть G – группа, φ – псевдохарактер на G . Формула $\psi(g_1, g_2) = \varphi(g_1 g_2) - \varphi(g_1) - \varphi(g_2)$, $g_1, g_2 \in G$, определяет ограниченный 2-коцикл ψ на группе G . Коцикл ψ тривиален как ограниченный коцикл (т.е. является кограницей ограниченной цепи) тогда и только тогда, когда квазихарактер φ является ограниченным возмущением обычного аддитивного вещественного характера группы G .*

Введем теперь псевдохарактер Гишарде–Вигнера на эрмитово симметрической простой группе Ли.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ II.3.15 (см. [35]–[39]). Пусть G – связная односвязная полупростая группа Ли, центр которой бесконечен (и, таким образом, соответствующее симметрическое пространство является эрмитово симметрическим; см. теорему II.3.11), и пусть K – аналитическая подгруппа группы G , отвечающая максимальной компактной подалгебре Ли алгебры Ли группы Ли G . Осуществим изоморфное отождествление центра Z_K аналитической группы K с полем вещественных чисел $\mathbb{R}$ (например, с помощью натурального параметра на однопараметрической подгруппе, определяемой подгруппой Z_K). Рассмотрим разложение Ивасава $G = KAN$, связанное с группой K . Отображение $g \mapsto k(g)$, переводящее каждый элемент $g \in G$ в “компактную” компоненту $k(g) \in K$ его разложения Ивасава $g = k(g)an$, $k(g) \in K$, $a \in A$, $n \in N$, является непрерывным. Рассмотрим композицию отображения $g \mapsto k(g)$, $g \in G$, и непрерывной проекции, отображающей каждый элемент $k \in K$ в его центральную составляющую $z(k) \in Z_K$. Эта композиция определяет некоторый квазихарактер на G . Псевдохарактер, соответствующий этому квазихарактеру, называется *псевдохарактером Гишарде–Вигнера*.

Существует непосредственная связь между псевдохарактером Гишарде–Вигнера на универсальной накрывающей простой группы Ли и коциклом Гишарде–Вигнера на этой группе (и на всех ее факторгруппах с конечным центром); явный вид этой связи установлен в [36]–[39]. Для группы $SL(2, \mathbb{R})$ ограниченность коцикла f , определяемого формулой (3), доказана в [35], где вычислен и соответствующий псевдохарактер (причем $|f(g)| < \pi/2$, $g \in SL(2, \mathbb{R})$); см. также [36]. Оценки для всех коциклов Гишарде–Вигнера приведены в [36] и [37]. Описание псевдохарактеров на всех эрмитово симметрических простых группах Ли с бесконечным центром было приведено ранее в препринте [35]. В 2001 г. доказательство полноты этого описания [36] было получено с помощью исследования каждого из перечисленных выше классов групп отдельно. (Возможно, формула Гишарде, выражающая коцикл Гишарде–Вигнера через интеграл от стандартной дифференциальной 2-формы по геодезическому треугольнику, и оценки соответствующих объемов могут привести к унифицированному доказательству.) Частные результаты о псевдохарактерах на группах Ли были опубликованы также Э. Гизом в 2001 г. [41] (для группы $SL(2, \mathbb{R})$) и позже

М. Ентовым [43] (для группы $\widehat{\mathrm{Sp}}(2n, \mathbb{R})$ – универсальной накрывающей соответствующей матричной группы) в связи с изучением финслеровой псевдометрики на симплектической группе.

В работе Н. Монода 2001 г. по непрерывным ограниченным когомологиям локально компактных групп [32] (как и в более поздних работах [33], [189]–[191]) нет ни доказательства ограниченности коциклов Гишарде–Вигнера, ни даже правильной постановки задачи. Хотя соответствующее утверждение и высказано в начале стр. 125 в [32] (пример 9.3.3), но (нетривиальная) проверка этого утверждения заменена неверным замечанием о компактности подгруппы Ли, отвечающей максимальной компактной подалгебре Ли эрмитово симметрической группы Ли, что безоговорочно ошибочно, поскольку для случая односвязной группы, как раз и отвечающего нетривиальному псевдохарактеру, максимальная компактная подалгебра Ли содержит одномерный центр, и поэтому соответствующая подгруппа тоже содержит одномерный центр, изоморфный числовой прямой.

II.3.3. Дополнительные сведения о псевдохарактерах. Пусть (S, h_0) – связная ориентируемая C^∞ -поверхность без края, снабженная гиперболической метрикой h_0 без вершин. Пусть фундаментальная группа Γ поверхности S конечно порождена. Интерпретация ядра естественного отображения $H_b^2(\Gamma, \mathbb{R}) \rightarrow H^2(\Gamma, \mathbb{R})$ группы ограниченных двумерных когомологий в группу обычных двумерных непрерывных когомологий группы Γ [24] (это ядро – бесконечномерное банахово пространство конечной коразмерности в $H_b^2(\Gamma, \mathbb{R})$) с помощью объектов, определенных на границе универсальной накрывающей поверхности S , получена в [34], где также указаны приложения к интерпретации некоторых когомологических классов свободных групп и компактных поверхностей.

Пусть G – группа, φ – нетривиальный псевдохарактер на G . В [31] показано, как определить “множество концов” группы G относительно φ и показать, что если пространство концов достаточно сложно, то G содержит неабелеву свободную подгруппу, а также построить квазидействие (см. § IV.3 ниже) группы G на дереве, пространство концов которого совпадает с пространством концов группы G относительно φ , что приводит к примерам “экзотических” квазидействий. С другой стороны, еще в [66] показано (в других терминах), что группа G аменабельна тогда и только тогда, когда для любого n и любых квазихарактеров $f_1, f_2, \dots, f_n$ на G существуют такие (аддитивные) характеры $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ группы G , что разности $f_i - \psi_i$ ограничены на G для всех i и $H(g_1, g_2, \dots, g_n) \leq \sum_{i=1}^n \{\psi_i(g_i) - f_i(g_i)\} \leq K(g_1, g_2, \dots, g_n)$, где $H(g_1, g_2, \dots, g_n) = \inf_{y \in G} \sum_{i=1}^n \{f_i(x_i y) - f_i(x_i) - f_i(y)\}$ и $K(g_1, g_2, \dots, g_n) = \sup_{y \in G} \sum_{i=1}^n \{f_i(x_i y) - f_i(x_i) - f_i(y)\}$.

В качестве содержательных примеров псевдохарактеров на не локально компактных группах мы приведем примеры, связанные с группами диффеоморфизмов и группами симплектических преобразований.

Пусть M – гладкое связное многообразие четной вещественной размерности $2n$. Тогда 2-форма ω на M называется *симплектической структурой*, если она замкнута ($d\omega = 0$) и невырождена ($\omega^n \neq 0$ всюду и, таким образом, форма ω^n является ненулевым кратным формы объема); пара (M, ω) называется

симплектическим многообразием. Связная компонента единицы в группе всех “симплектоморфизмов” $\text{Aut}(M, \omega)$ симплектического многообразия (M, ω) (автоморфизмов, сохраняющих форму ω) содержит некоторую линейно связную подгруппу $\text{Ham}(M, \omega) \subset \text{Symp}_0(M, \omega)$, состоящую из гамильтоновых симплектоморфизмов, которые могут быть естественно определены в терминах векторных полей и порожденных ими потоков [44]–[46] (произведение гамильтоновых потоков определяет соответствующую операцию для гамильтоновых функций, порождающих эти потоки). Как известно [192],

$$\widetilde{\text{Ham}}(M, \omega) = [\widetilde{\text{Ham}}(M, \omega), \widetilde{\text{Ham}}(M, \omega)] = [\widetilde{\text{Symp}}_0(M, \omega), \widetilde{\text{Symp}}_0(M, \omega)].$$

В частности, любой аддитивный характер на группе $G = \text{Ham}(M, \omega)$ равен нулю.

Пусть связное симплектическое многообразие M^{2n} замкнуто. Группа $G = \text{Ham}(M, \omega)$ содержит семейство подгрупп G_U , связанных с непустыми открытыми множествами $U \subset M$, а именно, подгруппа G_U состоит из всех элементов $f \in G$, порожденных зависящими от времени гамильтонианами $F_t: M \rightarrow \mathbb{R}$, $t \in [0, 1]$, с $\text{support}(F_t) \subset U$ для всех t . Отображение $\text{Cal}_U: G_U \rightarrow \mathbb{R}$, определенное формулой $f \mapsto \int_0^1 \int_M F_t \omega^n$, если $\{F_t\}$ порождает f , является аддитивным вещественным гомоморфизмом, если форма ω точна на U . Это – так называемый гомоморфизм Калаби ([42], [44], [47], [193]). Как показано в [42] и [44], для некоторых симплектических многообразий рода 1 семейство (автоматически согласованных) гомоморфизмов Калаби допускает продолжение до псевдохарактера на группе G , так называемого псевдохарактера Калаби на соответствующем симплектическом многообразии. Эта конструкция была развита в [47], где аналогичный характер построен на группе гамильтоновых диффеоморфизмов замкнутой ориентированной поверхности рода > 1 (и тоже продолжает характеры Калаби на дисках и кольцах в этой поверхности) и введен квазихарактер на универсальной накрывающей группы гамильтоновых диффеоморфизмов симплектического многообразия, для которого класс когомологий симплектической формы является кратным первого класса Чженя.

Другой пример связан с группой $\text{Homeo}^+(S^1)$ сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов окружности S^1 . Обозначим через $\widetilde{\text{Homeo}}^+(S^1)$ группу гомеоморфизмов $\tilde{f}$ числовой прямой $\mathbb{R}$, удовлетворяющих условию $\tilde{f}(x+1) = \tilde{f}(x) + 1$ для всех $x \in \mathbb{R}$ (т.е. перестановочных с целочисленными сдвигами). Любой элемент группы $\widetilde{\text{Homeo}}^+(S^1)$ определяет сохраняющий ориентацию гомеоморфизм окружности, так что определен гомоморфизм p группы $\widetilde{\text{Homeo}}^+(S^1)$ в $\text{Homeo}^+(S^1)$. Ядро гомоморфизма p состоит из целочисленных сдвигов на прямой. Кроме того, p – эпиморфизм, поскольку любой сохраняющий ориентацию гомеоморфизм окружности может быть поднят до гомеоморфизма его универсального накрывающего пространства, т.е. прямой $\mathbb{R}$, перестановочного с целочисленными сдвигами. Получаем точную последовательность

$$0 \rightarrow Z \rightarrow \widetilde{\text{Homeo}}^+(S^1) \rightarrow \text{Homeo}^+(S^1) \rightarrow 1.$$

Таким образом, группа $\widetilde{\text{Homeo}}^+(S^1)$ является центральным расширением группы $\text{Homeo}^+(S^1)$.

Воспользуемся инвариантом гомеоморфизмов окружности, введенным Пуанкаре [194]. Пусть $\tilde{f} \in \widetilde{\text{Homeo}}^+(S^1)$. Если $x, x' \in \mathbb{R}$ и модуль их разности не больше 1, то это свойство сохраняется для их f -образов. Поэтому для любых двух точек $x, x' \in \mathbb{R}$ числа $f(x) - x$ и $f(x') - x'$ отличаются не больше, чем на единицу. Положим $T(f) = f(0)$. Если $f_1, f_2 \in \widetilde{\text{Homeo}}^+(S^1)$, то

$$T(f_1 f_2) = (f_1(f_2(0)) - f_2(0)) + (f_2(0) - 0),$$

так что

$$|T(f_1 f_2) - T(f_1) - T(f_2)| \leq 1.$$

Согласно теореме II.3.2 и следствию II.3.3, ограничение квазихарактера T на циклическую подгруппу, порожденную элементом f , является ограниченным возмущением некоторого однозначно определенного вещественного характера $n \mapsto \alpha n$ группы $\mathbb{Z}$, и число α называется числом сдвига отображения f . Отображение $f \mapsto \alpha$ определяет псевдохарактер, отвечающий квазихарактеру T . Любой псевдохарактер на группе $\widetilde{\text{Homeo}}^+(S^1)$ кратен псевдохарактеру, определенному числом сдвига.

Напомним, что любая неэлементарная гиперболическая группа имеет нетривиальные квазихарактеры (см., например, [30]), поскольку ее обычная группа вторых кохомологий конечномерна, группа ограниченных вторых кохомологий бесконечномерна, а ответственность за различие несут псевдохарактеры (см. п. II.3.2).

Другие результаты по теории одномерных квазипредставлений, одномерных псевдопредставлений, квазихарактеров и псевдохарактеров и и некоторые приложения этой теории можно найти в [7], [9], [10]–[12], [18]–[24], [28]–[59], [63], [66], [73], [74], [106]–[110], [113], [118], [133], [139], [188]–[191], [193], [196], [197].

§ II.4. Структура конечномерных квазипредставлений групп

Конечномерные квазипредставления групп устроены следующим образом.

ТЕОРЕМА II.4.1 ([7], [9], [112], [200]). Пусть G – группа, T – квазипредставление группы G в конечномерном векторном пространстве E_T . Пусть E_T^* – пространство, сопряженное к E_T . Пусть L – множество таких векторов $\xi \in E_T$, что орбита $\{T(g)\xi \mid g \in G\}$ ограничена; пусть M – множество таких функционалов $f \in E_T^*$, что орбита $\{T(g)^* f \mid g \in G\}$ ограничена в E_T^* ; тогда L и аннулятор $M^\perp$ – векторные подпространства в E_T , инвариантные относительно T . Рассмотрим направленный по возрастанию набор подпространств $\{0\}, L \cap M^\perp, M^\perp, L + M^\perp, E = E_T$ и запишем матрицу $t(g)$ оператора $T(g)$, $g \in G$, в блочной форме, отвечающей разложению пространства E в прямую сумму подпространств $L \cap M^\perp, M^\perp \setminus (L \cap M^\perp), L \setminus (L \cap M^\perp)$

и $E \setminus (L + M^\perp)$, где символ “ $\setminus$ ” означает взятие дополнительного подпространства:

$$t(g) = \begin{pmatrix} \alpha(g) & \varphi(g) & \sigma(g) & \tau(g) \\ 0 & \beta(g) & 0 & \rho(g) \\ 0 & 0 & \gamma(g) & \chi(g) \\ 0 & 0 & 0 & \delta(g) \end{pmatrix}, \quad g \in G.$$

(Здесь $t_{23}(g) = 0$, так как L инвариантно относительно T .) Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) отображения $\alpha, \delta, \gamma, \sigma$ и χ ограничены;
- 2) отображения t_1 и t_2 , определяемые равенствами $t_1(g) = \begin{pmatrix} \alpha(g) & \varphi(g) \\ 0 & \beta(g) \end{pmatrix}$ и $t_2(g) = \begin{pmatrix} \beta(g) & \rho(g) \\ 0 & \delta(g) \end{pmatrix}$, являются представлениями группы G ;
- 3) отображение τ является квазикоциклом относительно представлений t_1 и t_2 , т.е. отображение $(g, h) \mapsto \tau(gh) - \alpha(g)\tau(h) - \varphi(g)\rho(h) - \tau(g)\delta(h)$, $g, h \in G$, ограничено.

Таким образом, изучение конечномерных квазипредставлений групп в основном сводится к изучению обычных представлений, квазипредставлений с ограниченными орбитами и квазикоциклов. Результаты, полученные в [63], [83] и [106], являются частными случаями теоремы II.4.1, так что обзор [11] не отражает современного ему состояния вопроса. Некоторые результаты, родственные теореме II.4.1, получены (для одномерных отображений) в [12].

Приведем некоторые следствия “теоремы тривиальности”, включающие ее аналог для конечномерных квазипредставлений полупростых групп Ли, не содержащих нетривиальных эрмитово симметрических факторов.

ТЕОРЕМА II.4.2 (см. [112; теорема 2.2]). Пусть G – аменабельная топологическая группа.

- 1) Любое конечномерное ε -квазипредставление группы G есть ограниченное возмущение обычного представления.
- 2) Радиус шара, содержащего все операторы этого ограниченного возмущения, определяется числом ε и нормами ограниченных компонент квазипредставления, упомянутыми в теореме II.4.1, и стремится к нулю при равномерно ограниченных нормах ограниченных компонент и при $\varepsilon \rightarrow 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В частности, при достаточно малом $\varepsilon > 0$ любое конечномерное ε -квазипредставление разрешимой группы аппроксимируется обычным представлением с точностью, определяемой числом ε и оценками для указанных выше норм.

Непосредственным следствием теоремы II.4.1 о квазипредставлениях с ограниченными орбитами является следующая теорема.

ТЕОРЕМА II.4.3. Если конечномерное неприводимое квазипредставление некоторой группы неограничено, то оно является обычным представлением этой группы.

Следующий пример квазикоцикла представляет особый интерес.

ПРИМЕР II.4.4. Пусть G – группа $SL(2, \mathbb{R})$, τ – псевдохарактер Радемахера на G (см. пример II.3.5, (b)), и пусть $g \mapsto \begin{pmatrix} 1 & \tau(g) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $g \in G$, – отображение группы G в группу матриц второго порядка. В терминах предыдущей теоремы имеем $\alpha = 1$ и $\delta = 1$, а подпространство $L = M^\perp$ натянуто на первый вектор.

Этот пример показывает, что отображение τ в условиях теоремы не обязано быть ни коциклом, ни ограниченным возмущением коцикла.

Ряд других следствий теоремы II.4.1 указан в п. III.4.4.

Глава III. Тривиальность конечномерных квазипредставлений компактных групп с малым дефектом

§ III.1. Некоторые условия автоматической непрерывности представлений топологических групп

Кроме необходимых ниже сведений об условиях непрерывности (не обязательно измеримых) конечномерных представлений произвольной почти связной локально компактной группы, мы приведем и несколько более общие утверждения. В изложении используются результаты статей [161], [198], [201]–[205]. Сначала мы перечислим некоторые результаты, позволяющие извлечь непрерывность блочно-треугольных представлений и квазипредставлений из условия непрерывности их диагональных блоков.

ТЕОРЕМА III.1.1. Пусть G – топологическая группа, E – бочечное локально выпуклое пространство, F – замкнутое векторное подпространство в E , $\mathcal{L}(E)$ – алгебра всех непрерывных линейных операторов в E , а π – такое слабо непрерывное представление G в E , что $\pi(g)F \subset F$ для любых $g \in G$. Предположим, что π локально слабо ограничено (т.е. образ $\pi(U)$ некоторой окрестности U единицы e в G слабо ограничен в $\mathcal{L}(E)$) и что представления группы G в подпространстве F и в факторпространстве E/F , определяемые представлением π , слабо непрерывны. Тогда π – слабо непрерывное представление группы G в E .

ТЕОРЕМА III.1.2. Пусть G – аменабельная топологическая группа, E – сопряженное банахово пространство, F – замкнутое векторное подпространство в E , а θ – такое слабо непрерывное δ -квазипредставление топологической группы G в E , что $\theta(g)F \subset F$ для любых $g \in G$. Предположим, что θ локально равномерно ограничено, $\theta(e) = 1_E$ и $\theta(g^{-1}) = \theta(g)^{-1}$ для всех $g \in G$. Предположим также, что и ограничение представления θ на F и отображение, определяемое отображением θ в E/F , являются обычными представлениями. Тогда существует такое слабо непрерывное представление π группы G в E , что $\|\pi(g) - \theta(g)\| \leq \delta$ для всех $g \in G$, и представления, определяемые представлением π в F и E/F , совпадают с представлениями, определяемыми квазипредставлением E в F и E/F соответственно.

Обозначим через I применение левоинвариантного среднего на группе (индекс – переменная, по которой берется среднее). Напомним (см. введение), что

среднее от непрерывной функции двух переменных, взятое по одной из этих переменных, не обязано быть непрерывной функцией другой переменной.

СЛЕДСТВИЕ III.1.3. Пусть G – аменабельная топологическая группа, E – сопряженное банахово пространство, F – замкнутое векторное подпространство в E , а θ – такое слабо непрерывное δ -квазипредставление топологической группы G в E , что $\theta(g)F \subset F$ для любых $g \in G$. Предположим, что $\theta(e) = 1_E$, θ локально равномерно ограничено и соотношения $\theta(g^{-1}) = \theta(g)^{-1}$ выполнены для всех $g \in G$. Предположим также, что ограничение представления θ на F и отображение, определяемое отображением θ в E/F , являются обычными представлениями. Тогда функция $g \mapsto I_h(\theta(gh)\theta(h^{-1}))$, $g \in G$, слабо непрерывна как функция со значениями в непрерывных линейных операторах в E .

Ниже нам понадобятся условия непрерывности представлений групп в терминах их колебаний в единице группы. Введем соответствующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ III.1.4 [161]. Пусть G – топологическая группа, S – ее (не обязательно непрерывное) представление в нормированном пространстве E над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Пусть E^* – пространство, сопряженное к E . Введем слабую вариацию (или слабое колебание $\omega(S) \geq 0$) представления S в единичном элементе e группы G (или, кратко, слабую вариацию представления S), полагая $\omega(S) = \sup\{\inf_{U \ni e} \sup_{g \in U} |f(S(g)\xi - \xi)| \mid \xi \in E, \|\xi\| \leq 1; f \in E^*, \|f\| \leq 1\}$.

Известен следующий критерий слабой непрерывности представлений топологических групп ограниченными линейными операторами в произвольном банаховом пространстве. Сначала напомним определение локальной ограниченности представлений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ III.1.5. Пусть G – топологическая группа, S – ее (алгебраическое) представление в нормированном пространстве E . Мы будем говорить, что S локально равномерно ограничено, если существуют окрестность V единичного элемента e в G и постоянная C , удовлетворяющие условию $\|S(g)\| \leq C$ для любого $g \in V$.

ТЕОРЕМА III.1.6 [161]. Пусть G – топологическая группа, E – банахово пространство, S – (не обязательно непрерывное) локально равномерно ограниченное представление группы G в банаховом пространстве E непрерывными линейными операторами. Представление S непрерывно в слабой операторной топологии тогда и только тогда, когда $\omega(S) < 1$.

Таким образом, если слабое колебание $\omega(S)$ представления S топологической группы в банаховом пространстве меньше единицы, то это колебание равно нулю и представление слабо непрерывно. Тем самым в классе представлений групп оказывается возможной финитная проверка инфинитезимального условия непрерывности. В конечномерном случае утверждение может быть уточнено. Например, справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА III.1.7 [201]. Пусть G – связная локально компактная группа. Тогда любое конечномерное представление S группы G , удовлетворяющее условию $\omega(S) < 2$, непрерывно.

Приведем и более общее утверждение.

ТЕОРЕМА III.1.8 [203]. Пусть G – топологическая группа, в которой каждая окрестность единицы содержит открытый нормальный делитель. Следующие условия равносильны.

- 1) Любое (не обязательно непрерывное) представление S любого открытого нормального делителя O группы G в конечномерном нормированном пространстве, удовлетворяющее условию $\omega(S) < 2$, непрерывно.
- 2) Любой нормальный делитель N (конечного) нечетного индекса в любом открытом нормальном делителе O в G замкнут (и поэтому открыт).

Отметим следствие последней теоремы. Напомним известную проблему Серра (положительное решение которой было недавно дано Н. Николовым и Д. Сигалом [206]): верно ли, что любая подгруппа конечного индекса в топологически конечно порожденной компактной вполне несвязной группе замкнута? Применение теоремы III.1.8 приводит к следующему результату, в условии которого топологическая конечная порожденность, участвующая в постановке проблемы Серра, заменена алгебраической порожденностью счетным набором топологически однопорожденных групп.

ТЕОРЕМА III.1.9. Пусть G – компактная вполне несвязная метризуемая топологическая группа, пусть $\{g_n\}$, $n \in I$, $I \subset \mathbb{N}$, – конечный или счетный набор элементов группы G , пусть G_n – подгруппа группы G , топологически порожденная элементом g_n , $n \in I$, и пусть группа G алгебраически порождена набором подгрупп G_n . Тогда любая подгруппа $N \subset G$ (конечного) нечетного индекса замкнута в G (и поэтому открыта в G).

§ III.2. Коммутаторы в компактных группах Ли

В этом параграфе напоминаются свойства коммутаторов в банаховых алгебрах и компактных группах Ли.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ III.2.1 (см. [207]). Пусть A – банахова алгебра с единичным элементом e , пусть A^{-1} – множество обратимых элементов A , пусть $B_1(e)$ – открытый шар единичного радиуса с центром в e , пусть $\exp: A \rightarrow A^{-1}$ – отображение, определенное формулой $\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{-1} x^n$, $x \in A$, пусть $\ln: B_1(e) \rightarrow A$ – отображение, определенное формулой $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-1} x^n$, $x \in B_1(e)$, и пусть D – множество всех пар $(x, y) \in A \times A$, удовлетворяющих условию $\exp x \exp y \in B_1(e)$. Отображение $D \rightarrow A$, определяемое формулой $(x, y) \mapsto x * y = \ln(\exp x \exp y)$, $(x, y) \in D$, называется *СН-умножением* (или *умножением Бейкера–Кемпбелла–Хаусдорфа–Дынкина*) на A .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ III.2.2. 1) Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли, $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$. Обозначим через $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ линейную оболочку элементов $[a, b]$, $a \in \mathfrak{a}$, $b \in \mathfrak{b}$. Пусть $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ – так называемый коммутаторный идеал в $\mathfrak{g}$.

2) Пусть G – группа, $A, B \subset G$, $a \in A$, $b \in B$. Положим $\text{comm}(a, b) = aba^{-1}b^{-1}$. Обозначим через $\text{comm}(A, B)$ подгруппу, порожденную всеми элементами вида $\text{comm}(a, b)$, $a \in A$, $b \in B$, и положим $G' = \text{comm}(G, G)$. Отметим, что построение $(A, B) \rightarrow \text{comm}(A, B)$ не содержит операции замыкания.

ЛЕММА III.2.3 (предложение 5.59, [207]). Пусть A – банахова алгебра, $\mathfrak{g}$ – замкнутая конечномерная подалгебра Ли в A , а B – такой открытый шар с центром в 0, что произведение $B * B * B * B$ определено и содержится в шаре радиуса π .¹ Пусть размерность коммутаторной алгебры $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ равна n . Положим $\text{comm}_*(x, y) = x * y * (-x) * (-y)$, $x, y \in \mathfrak{g} \cap B$. Тогда

- 1) $\text{comm}_*(x, y) \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ для любых $x, y \in \mathfrak{g} \cap B$;
- 2) существуют такие элементы $X_j, Y_j \in \mathfrak{g}$, $j = 1, \dots, n = \dim \mathfrak{g}'$, что для любого набора $(r_1, \dots, r_n)$ вещественных чисел, удовлетворяющих условию $0 < |r_j| < 1$ для всех $j = 1, \dots, n$, существует такое $\varepsilon > 0$, что функция $\varphi: (-\varepsilon, \varepsilon)^n \rightarrow B \cap \mathfrak{g}$, определяемая формулой

$$\begin{aligned} \varphi(s_1, \dots, s_n) &= (r_1 \cdot X_1 * s_1 \cdot Y_1 * (-r_1) \cdot X_1 * (-s_1) \cdot Y_1) * \dots \\ &\quad * (r_n \cdot X_n * s_n \cdot Y_n * (-r_n) \cdot X_n * (-s_n) \cdot Y_n) \\ &= \text{comm}(r_1 \cdot X_1, s_1 \cdot Y_1) * \dots * \text{comm}(r_n \cdot X_n, s_n \cdot Y_n), \end{aligned}$$

является гомеоморфизмом на некоторую окрестность нуля в $\mathfrak{g}'$;

- 3) любой элемент некоторой окрестности нуля в $\mathfrak{g}'$ является $*$ -произведением не более чем n экземпляров $*$ -коммутаторов; в частности, существует такой открытый шар B' с центром в нуле в $\mathfrak{g}'$, что $B' \cap \mathfrak{g}'$ – наименьшая локальная подгруппа относительно B' , содержащая все $*$ -коммутаторы $\text{comm}_*(X, Y) \in B'$, $X, Y \in B'$.

§ III.3. Доказательство основной теоремы

ТЕОРЕМА III.3.1. Пусть G – связная полупростая компактная группа Ли. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого конечномерного унитарного δ -квазипредставления группы G существует непрерывное представление S (в том же векторном пространстве), ε -близкое к T .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть n – размерность алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G . Пусть ε и δ – положительные числа. Условия малости на величины ε и δ будут постепенно наложены в ходе доказательства.

Пусть E – конечномерное гильбертово пространство представления, U – окрестность единицы в группе $U(E)$ унитарных операторов в E . Ввиду непрерывности операции умножения, существует такая окрестность единицы W в $U(E)$, что

$$\text{comm}(\{h_1\} \times U(E)) \dots \text{comm}(\{h_n\} \times U(E)) \subseteq U \quad (4)$$

для любых $h_1, \dots, h_n \in W$ (см. лемму 5.63 в [207]). При этом, согласно утверждению леммы III.2.3, существуют такие векторы $X_j \in \mathfrak{g}$, $j = 1, \dots, n$, что для любого набора $r_1, \dots, r_n$ ненулевых вещественных чисел r_j с $0 < |r_j| < 1$ множество $\text{comm}(\{\exp(r_1 \cdot X_1)\} \times G) \dots \text{comm}(\{\exp(r_n \cdot X_n)\} \times G)$ содержит некоторую окрестность V единицы в группе G . Очевидно, что это свойство сохранится при любом достаточно малом шевелении векторов X_j , $j = 1, \dots, n$, а в результате сколь угодно малого шевеления этих векторов можно добиться того, чтобы семейство этих векторов было линейно независимым.

¹Как известно, достаточно предположить, что $\|x\| < (1/2) \ln(2 - \sqrt{1/2})$ для любого $x \in B$.

Рассмотрим замкнутую однопараметрическую подгруппу G_j в G , порожденную элементом X_j алгебры Ли группы Ли $\mathfrak{g}$. Подгруппа G_j компактна и коммутативна, и поэтому аменабельна. Ограничение T_j отображения T на подгруппу G_j является квазипредставлением подгруппы G_j . Если δ достаточно мало, то, по теореме 1.4.2, примененной к групповой алгебре подгруппы G_j , где G_j рассматривается в дискретной топологии, существует обычное (конечно, не обязательно непрерывное) представление S_j группы G_j в том же пространстве E , равномерно близкое к квазипредставлению $\tilde{T}_j$. Пусть $\sigma > 0$ – такое число, что

$$\|S_j(g) - T_j(g)\| \leq \sigma \quad \text{для всех } g \in G_j \text{ и для всех } j = 1, \dots, n. \quad (5)$$

По той же теореме 1.4.2 мы вправе считать, что число σ мало вместе с δ .

Пусть H_j – образ группы G_j в представлении S_j . Покажем, что для любого j , $j = 1, \dots, n$, существует такое вещественное число r_j , $0 < |r_j| < 1$, что элемент $S_j(\exp(r_j \cdot X_j))$ принадлежит множеству W . Если H_j – единичная группа, то достаточно взять $r_j = \frac{1}{2}$, и тогда $S_j(\exp(r_j \cdot X_j)) = 1 \in W_H$. Пусть теперь группа H_j неединична. По построению, группа H_j – гомоморфный образ безгранично делимой группы $\mathbb{R}$. Поэтому сама группа H_j безгранично делима. По предположению, группа H_j неединична; следовательно, она бесконечна, а потому недискретна в $U(E)$. Но тогда и образ любой проколотой окрестности нуля в группе $\mathbb{R}$ не может быть конечным множеством, поскольку образ каждой проколотой окрестности непуст, а пересечение всех этих образов пусто. Таким образом, множество $M_{1/2} = \{S_j(\exp(r \cdot X_j)), 0 < |r| < 1/2\}$ бесконечно, а потому и недискретно, т.е. имеет точку накопления. Рассматривая отношения двух сколь угодно близких различных элементов коммутативного семейства $M_{1/2}$, мы видим, что множество $M_1 = \{S_j(\exp(r \cdot X_j)), 0 < |r| < 1\}$ содержит неединичные элементы, сколь угодно близкие к единичному элементу $e_H \in H$. Таким образом, в любом случае множество всевозможных элементов вида

$$S(\exp(r_1 \cdot X_1))h_1 S(\exp(-r_1 \cdot X_1))h_1^{-1} \cdots S(\exp(r_n \cdot X_n))h_n S(\exp(-r_n \cdot X_n))h_n^{-1},$$

где $h_1, \dots, h_n$ – любые элементы группы $U(E)$, содержится в выбранной ранее окрестности U единичного элемента в $U(E)$. В частности, и множество всевозможных элементов группы $U(E)$, допускающих представление в виде произведения

$$S(\exp(r_1 \cdot X_1))T(g_1)S(\exp(-r_1 \cdot X_1))T(g_1)^{-1} \cdots \\ \times S(\exp(r_n \cdot X_n))T(g_n)S(\exp(-r_n \cdot X_n))T(g_n)^{-1},$$

где $g_1, \dots, g_n$ – любые элементы группы G , содержится в той же выбранной ранее окрестности U единичного элемента в $U(E)$.

Воспользуемся теперь неравенством

$$\|S(\exp(r_1 \cdot X_1))\tilde{T}(g_1)S(\exp(-r_1 \cdot X_1))\tilde{T}(g_1)^{-1} \cdots \\ \times S(\exp(r_n \cdot X_n))\tilde{T}(g_n)S(\exp(-r_n \cdot X_n))\tilde{T}(g_n)^{-1} \\ - \tilde{T}(\exp(r_1 \cdot X_1))\tilde{T}(g_1)\tilde{T}(\exp(-r_1 \cdot X_1))\tilde{T}(g_1)^{-1} \cdots \\ \times \tilde{T}(\exp(r_n \cdot X_n))\tilde{T}(g_n)\tilde{T}(\exp(-r_n \cdot X_n))\tilde{T}(g_n)^{-1}\| \leq 2n\sigma,$$

которое легко следует индукцией по n из неравенства (5) и унитарности отображений S_j и $\tilde{T}$, и неравенством

$$\begin{aligned} & \|\tilde{T}(\exp(r_1 \cdot X_1)g_1 \exp(-r_1 \cdot X_1)(g_1)^{-1} \cdots \\ & \quad \times \exp(r_n \cdot X_n)g_n \exp(-r_n \cdot X_n)(g_n)^{-1}) \\ & \quad - \tilde{T}(\exp(r_1 \cdot X_1))\tilde{T}(g_1)\tilde{T}(\exp(-r_1 \cdot X_1))\tilde{T}(g_1)^{-1} \cdots \\ & \quad \times \tilde{T}(\exp(r_n \cdot X_n))\tilde{T}(g_n)\tilde{T}(\exp(-r_n \cdot X_n))\tilde{T}(g_n)^{-1}\| \leq 2n\delta, \end{aligned} \quad (6)$$

которое, ввиду унитарности отображения $\tilde{T}$, следует из неравенства

$$\begin{aligned} & \|\tilde{T}(g_1g_2 \cdots g_m) - \tilde{T}(g_1) \cdots \tilde{T}(g_m)\| = \|\tilde{T}(g_1g_2 \cdots g_m) - \tilde{T}(g_1g_2 \cdots g_{m-1})\tilde{T}(g_m) \\ & \quad + \tilde{T}(g_1g_2 \cdots g_{m-1})\tilde{T}(g_m) - \tilde{T}(g_1g_2 \cdots g_{m-2})\tilde{T}(g_{m-1})\tilde{T}(g_m) + \cdots \\ & \quad + \tilde{T}(g_1g_2)\tilde{T}(g_3) \cdots \tilde{T}(g_m) - \tilde{T}(g_1)\tilde{T}(g_2)\tilde{T}(g_3) \cdots \tilde{T}(g_m)\| \\ & \leq \|\tilde{T}(g_1g_2 \cdots g_m) - \tilde{T}(g_1g_2 \cdots g_{m-1})\tilde{T}(g_m)\| + \cdots \\ & \quad + \|\tilde{T}(g_1g_2)\tilde{T}(g_3) \cdots \tilde{T}(g_m) - \tilde{T}(g_1) \cdots \tilde{T}(g_m)\| \leq m\delta, \end{aligned} \quad (7)$$

$$g_i \in G, \quad i = 1, \dots, m, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Пусть окрестность U имеет вид $\{h \in U(E), \|h - 1_E\| \leq \theta\}$ для достаточно малого $\theta > 0$. Объединяя это неравенство и неравенства (5)–(7), получаем, что при всех $g \in G$, допускающих представление в виде произведения (ср. (4))

$$\begin{aligned} & \exp(r_1 \cdot X_1)g_1 \exp(-r_1 \cdot X_1)(g_1)^{-1} \cdots \exp(r_n \cdot X_n)g_n \exp(-r_n \cdot X_n)(g_n)^{-1}, \\ & \quad r_1, \dots, r_n \in \mathbb{R}, \quad g_1, \dots, g_n \in G, \end{aligned}$$

и, в частности, в указанной выше окрестности V единичного элемента группы G , выполняется неравенство

$$\begin{aligned} \|\tilde{T}(g) - 1_E\| &= \|\tilde{T}((\exp(r_1 \cdot X_1))g_1(\exp(-r_1 \cdot X_1))(g_1)^{-1} \cdots \\ & \quad \times (\exp(r_n \cdot X_n))g_n(\exp(-r_n \cdot X_n))(g_n)^{-1}) - 1_E\| \\ &\leq \|\tilde{T}((\exp(r_1 \cdot X_1))g_1(\exp(-r_1 \cdot X_1))(g_1)^{-1} \cdots \\ & \quad \times (\exp(r_n \cdot X_n))g_n(\exp(-r_n \cdot X_n))(g_n)^{-1}) \\ & \quad - \tilde{T}(\exp(r_1 \cdot X_1))\tilde{T}(g_1)\tilde{T}(\exp(-r_1 \cdot X_1))\tilde{T}((g_1)^{-1}) \cdots \\ & \quad \times \tilde{T}(\exp(r_n \cdot X_n))\tilde{T}(g_n)\tilde{T}(\exp(-r_n \cdot X_n))\tilde{T}((g_n)^{-1})\| \\ & \quad + \|\tilde{T}(\exp(r_1 \cdot X_1))\tilde{T}(g_1)\tilde{T}(\exp(-r_1 \cdot X_1))\tilde{T}((g_1)^{-1}) \cdots \\ & \quad \times \tilde{T}(\exp(r_n \cdot X_n))\tilde{T}(g_n)\tilde{T}(\exp(-r_n \cdot X_n))\tilde{T}((g_n)^{-1}) \\ & \quad - S_1(\exp(r_1 \cdot X_1))\tilde{T}(g_1)S_1(\exp(-r_1 \cdot X_1))\tilde{T}((g_1)^{-1}) \cdots \\ & \quad \times S_n(\exp(r_n \cdot X_n))\tilde{T}(g_n)S_n(\exp(-r_n \cdot X_n))\tilde{T}((g_n)^{-1})\| \\ & \quad + \|S_1(\exp(r_1 \cdot X_1))\tilde{T}(g_1)S_1(\exp(-r_1 \cdot X_1))\tilde{T}((g_1)^{-1}) \cdots \\ & \quad \times S_n(\exp(r_n \cdot X_n))\tilde{T}(g_n)S_n(\exp(-r_n \cdot X_n))\tilde{T}((g_n)^{-1}) - 1_E\| \\ &\leq 2n\delta + 2n\sigma + \theta. \end{aligned}$$

Тогда каждое из представлений S_j группы $G_j \subset G$ удовлетворяет условиям $\|S_j(g) - 1_E\| \leq \|S_j(g) - \tilde{T}(g)\| + \|\tilde{T}(g) - 1_E\| \leq 2n\delta + (2n+1)\sigma + \theta$, $g \in V$, и можно считать числа δ , σ и θ столь малыми, что правая часть неравенства меньше числа, меньшего двух. По теореме III.1.7, каждое представление S_j непрерывно.

Напомним, что в соответствии с построением набора элементов $X_1, \dots, X_n$, примененным в [207] в доказательстве утверждения леммы III.2.3 (т.е. предложения 5.69 в [207]), можно считать, что система $X_1, \dots, X_n$ образует базис алгебры Ли группы G . Рассмотрим отображение Φ_1 произведения групп $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ в группу G , определяемое умножением $\{g_1, g_2, \dots, g_n\} \mapsto g_1 g_2 \dots g_n$, $g_i \in G_i$, $i = 1, \dots, n$, и отображение Φ_2 произведения групп $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ в группу H , определяемое формулой $\{g_1, g_2, \dots, g_n\} \mapsto S_1(g_1)S_2(g_2) \dots S_n(g_n)$, $g_i \in G_i$, $i = 1, \dots, n$. Отображения Φ_1 и Φ_2 непрерывны, и, по теореме о неявной функции, отображение Φ_1 является гомеоморфизмом на некоторой окрестности O единичного элемента в произведении групп. Ограничим оба отображения Φ_1 и Φ_2 на эту окрестность. Очевидно, отображение $\rho: \Phi_1(O) \rightarrow \Phi_2(O)$, определенное формулой $\rho(g_1 g_2 \dots g_n) = S_1(g_1)S_2(g_2) \dots S_n(g_n)$, $\{g_1, g_2, \dots, g_n\} \in O$, корректно определено, непрерывно и удовлетворяет условию

$$\begin{aligned} \|\rho(g) - \tilde{T}(g)\| &= \|\rho(g_1 g_2 \dots g_n) - \tilde{T}(g_1 g_2 \dots g_n)\| \\ &= \|S_1(g_1)S_2(g_2) \dots S_n(g_n) - \tilde{T}(g_1 g_2 \dots g_n)\| \\ &= \|S_1(g_1)S_2(g_2) \dots S_n(g_n) - \tilde{T}(g_1)\tilde{T}(g_2) \dots \tilde{T}(g_n) \\ &\quad + \tilde{T}(g_1)\tilde{T}(g_2) \dots \tilde{T}(g_n) - \tilde{T}(g_1 g_2 \dots g_n)\| \\ &\leq \|S_1(g_1)S_2(g_2) \dots S_n(g_n) - \tilde{T}(g_1)\tilde{T}(g_2) \dots \tilde{T}(g_n)\| \\ &\quad + \|\tilde{T}(g_1)\tilde{T}(g_2) \dots \tilde{T}(g_n) - \tilde{T}(g_1 g_2 \dots g_n)\| \leq n\sigma + n\delta, \quad g \in O. \end{aligned}$$

Как обычно, для любого $g_0 \in G$ введем окрестность $O_{g_0} \subset G$ точки g_0 , рассмотрим конечное подпокрытие группы G окрестностями $O_{g_k} \subset G$, $k = 1, \dots, K$, и положим

$$R(g_k g) = T(g_k)\rho(g), \quad g \in g_k^{-1} \left(O(g_k) \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{k-1} O(g_j) \right) \right),$$

где подразумевается, что символ $\bigcup_{j=1}^0 O(g_j)$ означает пустое множество. Очевидно, что R – борелевская операторнозначная функция на G и $\|T(g) - R(g)\| = \|T(g_k w) - T(g_k)\rho(w)\| \leq \|T(g_k w) - T(g_k)T(w)\| + \|T(g_k)T(w) - T(g_k)\rho(w)\| \leq (n+1)\delta + n\sigma$ для любого $g \in G$, если k – такой индекс, что

$$g \in g_k^{-1} \left(O(g_k) \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{k-1} O(g_j) \right) \right),$$

и если $\delta > 0$ (и тем самым и $\sigma > 0$) достаточно мало, то достаточно доказать утверждение теоремы для борелевского (и потому измеримого) отображения R , которое является унитарным квазипредставлением группы G с

$$\begin{aligned} \|R(gg_1) - R(g)R(g_1)\| &\leq \delta + \|R(gg_1) - T(gg_1)\| + \|R(g) - T(g)\| + \|R(g_1) - T(g_1)\| \\ &\leq (3n+4)\delta + 3n\sigma, \quad g, g_1 \in G. \end{aligned}$$

Согласно п. II.1.3, формула $R(f) = \int_G f(g)R(g)dg$, $f \in L^1(G)$, определяет непрерывное квазипредставление групповой алгебры $L^1(G)$ группы G в E . Эта алгебра аменабельна по лемме I.2.3. Тогда, с учетом малости величины σ при малом δ , из теоремы I.4.2 следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$ (в связи с тем, что $(3n + 4)\delta + 3n\sigma$ можно считать достаточно малым при малом δ ; точный смысл условия малости можно найти в соответствующем неравенстве на стр. 299 в [77]), что существует обычное непрерывное представление V групповой алгебры $L^1(G)$ в том же пространстве E , удовлетворяющее условию $\|R(f) - V(f)\| \leq \varepsilon\|f\|$ для всех $f \in L^1(G)$.

В свою очередь, непрерывное представление V групповой алгебры $L^1(G)$ в пространстве E определяет непрерывное представление U группы G в пространстве E , в свою очередь определяющее исходное представление V групповой алгебры $L^1(G)$, и норма разности $R(g) - U(g)$, $g \in G$, существенно ограничена величиной ε . Поскольку топологическая группа G аменабельна, а представление U в конечномерном пространстве E непрерывно, то, не уменьшая общности, можно считать пространство E гильбертовым (вообще говоря, относительно скалярного произведения, которое может отличаться от исходного), а представление U – унитарным относительно этой гильбертовой структуры. Тогда из условия унитарности отображения $\tilde{T}$ относительно “старого” скалярного произведения, равномерной близости квазипредставления $\tilde{T}$ и представления R и унитарности представления R относительно нового скалярного произведения следует (см., например, [8] и [208]), что оператор, осуществляющий изоморфизм гильбертовых пространств относительно этих двух скалярных произведений, мало отличается от единичного оператора (в каждой из норм).

Итак, $\text{ess sup}_{g \in G} \|R(g) - U(g)\| \leq \varepsilon$. Так как на окрестности O разность $R - U$ непрерывна, то функция $g \mapsto \|R(g) - U(g)\|$, $g \in O$, непрерывна на O и поэтому ограничена на O величиной ε . Тогда из построения отображения R следует, что в рассматриваемом нами разбиении можно использовать открытую окрестность с нулевой мерой границы и учитывать только слагаемые, имеющие внутренние точки. Отсюда сразу следует, что норма разности $R(g) - U(g)$ не превосходит ε на всей группе G . Это завершает доказательство теоремы III.3.1.

Теперь мы можем сформулировать и доказать основную теорему.

ТЕОРЕМА III.3.2. Пусть H – компактная группа Ли, а G – связная n -мерная линейная группа Ли, совпадающая со своей коммутаторной подгруппой. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого δ -квазигомоморфизма групп $T: G \rightarrow H$ существует непрерывный гомоморфизм $S: G \rightarrow H$, ε -близкий к T .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и любая компактная группа Ли, группа H допускает точное линейное представление (см., например, [207; теорема XI.8.3.I]), и, тем самым, можно считать группу H компактной подгруппой некоторой унитарной группы $U(E)$. Поэтому, переходя при необходимости от компактной группы Ли H к ее образу в точном непрерывном унитарном представлении,

мы вправе считать, что H – (замкнутая) подгруппа группы унитарных операторов в некотором конечномерном гильбертовом пространстве E и рассматривать квазигомоморфизм T как квазипредставление $\tilde{T}$ группы G в пространстве E .

Напомним следующий результат Д. Монтгомери и Л. Циппина, полученный в 1942 г. в [16] (таким образом, это – один из первых результатов теории возмущений для групп Ли) и приведенный с полным доказательством в [209; теорема V.5.3]. *Если G – группа Ли, K – компактная подгруппа в G , то существует такое открытое множество O в G , содержащее K , что если H – компактная подгруппа в G , содержащаяся в O , то существует элемент $g \in G$, удовлетворяющий условию $g^{-1}Hg \subset K$, и при данной окрестности W единицы в G открытое множество O можно выбрать так, что для любой подгруппы $H \subset O$ элемент g , осуществляющий указанное подобие, можно выбрать в окрестности W .* Выберем число $\varepsilon > 0$ столь малым, что $\varepsilon/3$ -окрестность подгруппы H в $U(E)$ содержится в O . Пусть W – $\varepsilon/3$ -окрестность единичного элемента в $U(E)$.

Воспользуемся результатом предыдущей теоремы и для выбранного ε найдем число δ , удовлетворяющее условию теоремы III.3.1 для числа $\varepsilon/3$. Рассмотрим δ -квазигомоморфизм $T: G \rightarrow H$. Согласно утверждению теоремы III.3.1, существует обычное непрерывное унитарное представление S группы G в пространстве E , $\varepsilon/3$ -близкое к T . Образ $S(G)$ этого отображения является подгруппой группы $U(E)$, содержащейся в O , и, тем самым, по приведенной выше теореме Монтгомери–Циппина [16], существует элемент $a \in W \subset U(E)$, удовлетворяющий условию $a^{-1}S(G)a \subset H$. Поэтому отображение $S': G \rightarrow H$, определенное формулой $g \mapsto a^{-1}S(g)a$, $g \in G$, является непрерывным гомоморфизмом группы G в $U(E)$, и образ этого гомоморфизма содержится в группе, которую мы отождествили с H . Очевидная выкладка показывает, что $\|T(g) - S'(g)\| \leq \varepsilon$ для всех $g \in G$, что завершает доказательство основной теоремы.

§ III.4. Заключительные замечания к главе III

III.4.1. Критерий аменабельности связных локально компактных групп в терминах квазипредставлений. Теорема III.3.1, являющаяся своего рода “теоремой тривиальности”, автоматически дает полное описание конечномерных унитарных квазипредставлений (с малым дефектом) полупростых компактных групп, рассматриваемых в дискретной топологии (это – первый пример описания конечномерных унитарных квазипредставлений с малым дефектом для неаменабельной группы), и показывает, что есть неаменабельные дискретные группы, представляющие собою простые компактные группы Ли в дискретной топологии, для которых все их конечномерные унитарные квазипредставления с малым дефектом являются возмущениями обычных представлений. С другой стороны, в 1994 г. автор высказал следующую гипотезу.

ГИПОТЕЗА III.4.1 (см. [108]). *Локально компактная группа аменабельна тогда и только тогда, когда она устойчиво представима в смысле определения II.1.2, т.е. тогда и только тогда, когда любое ее слабо непрерывное унитарное квазипредставление с достаточно малым дефектом*

является малым возмущением обычного (сильно непрерывного) унитарного представления.

Аналогичный вопрос задал М. Громов в 1995 г. в [30]: существуют ли неаменабельные группы, все квазипредставления которых являются возмущениями обычных представлений?

Теорема III.3.1 показывает, что для проверки справедливости гипотезы III.4.1 необходимо привлекать бесконечномерные унитарные представления группы. Следующее утверждение, часть которого была анонсирована в [108], подкрепляет гипотезу III.4.1.

ТЕОРЕМА III.4.2. *Любая неаменабельная почти связная локально компактная группа не является устойчиво представимой в гильбертовом пространстве, а именно, для любого $\varepsilon > 0$ существует унитарное квазипредставление этой группы с дефектом, меньшим ε , расстояние от некоторого матричного элемента которого до матричных элементов любого унитарного представления не меньше единицы.*

Таким образом, теорема III.4.2 утверждает, что упомянутая выше гипотеза автора справедлива для всех почти связных локально компактных групп (и для этих групп ответ на вопрос Громова отрицателен).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G – почти связная локально компактная группа, не являющаяся аменабельной. Тогда G – проективный предел групп Ли с компонентой единицы конечного индекса, и поэтому достаточно доказать утверждение для связных неаменабельных групп Ли. В свою очередь, для этого достаточно доказать утверждение теоремы для некомпактных простых групп Ли G , каждая из которых содержит замкнутую подгруппу H , локально изоморфную группе $SL(2, \mathbb{R})$, которая, в свою очередь, содержит дискретную подгруппу D , являющуюся полным прообразом группы $SL(2, \mathbb{Z})$ в факторгруппе по центру и поэтому допускающую нетривиальный вещественный псевдохарактер Радемахера χ (см. [18] и п. II.3.1). Для любого $\varepsilon > 0$ рассмотрим одномерное псевдопредставление θ группы D , определяемое формулой вида $d \mapsto \exp(it\chi(d))$, $d \in D$, где t – столь малое вещественное число, что дефект псевдопредставления θ группы D меньше ε . Рассмотрим квазипредставление ρ группы G , квазииндуцированное псевдопредставлением θ группы D (см. п. II.1.2), и обозначим через σ ограничение представления ρ на H . Прямое вычисление показывает, что дефект квазииндуцированного квазипредставления ρ группы G , а потому и ограничения σ отображения ρ на H , тоже не больше ε .

Исходное псевдопредставление группы D (рассматриваемое как комплекснозначная функция на D) является слабой предельной точкой семейства матричных элементов ограничения квазииндуцированного квазипредставления группы G на группу D (это утверждение доказывается аналогично соответствующему утверждению в случае обычных представлений, см. [144] и [148]). Поэтому, если расстояние от любого матричного элемента квазипредставления σ до

матричных элементов всевозможных унитарных представлений меньше некоторого вещественного числа q , $0 \leq q < 1$, то в q -окрестности псевдопредставления θ имеются матричные элементы ограничения на D унитарных представлений группы G , а потому и матричные элементы ограничения на D унитарных представлений группы H .

Заметим, что, по построению, универсальная накрывающая $\hat{H}$ группы H изоморфна универсальной накрывающей группе S группы Ли $SL(2, \mathbb{R})$. Как известно из теории непрерывных унитарных представлений группы S [210], любой матричный элемент любого неприводимого унитарного представления группы H имеет предел на бесконечности. Любой матричный элемент любого непрерывного унитарного представления группы S является прямым интегралом матричных элементов неприводимых непрерывных унитарных представлений группы S ; отсюда, с помощью теоремы Лебега о мажорируемой сходимости, легко следует, что и любой матричный элемент любого унитарного представления группы H имеет предел на бесконечности, так что колебание на бесконечности любого такого матричного элемента равно нулю. То же верно и для группы $\hat{H}$. Поэтому, если расстояние от любого матричного элемента квазипредставления ρ или σ до семейства матричных элементов всевозможных унитарных представлений меньше некоторого вещественного числа q , $0 \leq q < 1$, то колебание на бесконечности любого матричного элемента представления σ , а с ним и функции θ , не может превосходить $2q < 2$, в то время как на самом деле колебание функции θ сколь угодно близко к 2 при значениях t , не соизмеримых с π , так как из явных формул для псевдохарактера Радемахера χ (см. [18]) следует, что он принимает на бесконечности на D все целые значения, так что при малых t величина $\theta(d) = \exp(it\chi(d))$, $d \in D$, оказывается сколь угодно близка и к 1, и к -1 . Таким образом, расстояния от квазипредставлений ρ и σ до семейств унитарных непрерывных представлений соответствующих групп не меньше 1, что доказывает теорему III.4.2.

III.4.2. Теорема Ван дер Вардена и ее обобщения. Для некоторых связных групп Ли теорема III.1.7 может быть существенно усилена. В 1933 г. Б. Л. Ван дер Варден [211] доказал, что любое конечномерное локально ограниченное представление полупростой компактной группы Ли автоматически непрерывно. Смысл утверждения теоремы можно видеть в том, что алгебраическая структура компактных полупростых групп в сочетании с локальной ограниченностью конечномерного представления оказывается достаточным условием непрерывности этого представления и, таким образом, заставляет обратить особое внимание на условие локальной ограниченности (в более общих ситуациях – локальной эквинепрерывности). Это условие появлялось в той или иной, явной или скрытой форме почти во всех работах, посвященных условиям непрерывности представлений. Оказывается, введенное Ван дер Варденом условие локальной ограниченности является критерием непрерывности конечномерных представлений и в более общем случае связных полупростых групп Ли [212] и для некоторых полупрямых произведений [213], в том числе – для группы Пуанкаре и некоторых групп движений. Более того, класс связных групп Ли, любое конечномерное локально ограниченное представление которых автоматически непрерывно, допускает простую характеристику.

Напомним, что группа называется *совершенной*, если она совпадает со своей коммутаторной подгруппой.

ТЕОРЕМА III.4.3 (см. [214]). *Любое локально ограниченное конечномерное представление связной группы Ли непрерывно тогда и только тогда, когда эта группа совершенна.*

III.4.3. Гипотеза Мищенко для связных групп Ли. При обсуждении одного из докладов автора на семинаре А. С. Мищенко, В. М. Мануйлова и Е. В. Троицкого в МГУ, А. С. Мищенко высказал гипотезу, что колебание конечномерного представления связной группы Ли в единице группы, введенное в определении III.1.4, может принимать только три значения – 0, 2 и ∞ . Следующее утверждение доказывает справедливость этой гипотезы.

ТЕОРЕМА III.4.4 (см. [214]). *Пусть G – связная группа Ли, и пусть ρ – конечномерное представление группы G , которое не предполагается непрерывным. Тогда имеет место один из следующих трех взаимно исключающих случаев:*

- 1) *представление ρ непрерывно (и в этом случае $\omega(\rho) = 0$ для любой нормы в пространстве представления),*
- 2) *представление ρ не является локально ограниченным (и в этом случае $\omega(\rho) = \infty$ для любой нормы в пространстве представления),*
- 3) *представление ρ разрывно и локально ограничено (и в этом случае существует норма в пространстве представления ρ , относительно которой имеем $\omega(\rho) = 2$), и этот случай возможен тогда и только тогда, когда группа G не является совершенной.*

Для бесконечномерных представлений и для конечномерных представлений несвязных групп ситуация богаче (см. [161], [198], [200], [203], [204], [215], [216]).

III.4.4. Локально ограниченные конечномерные квазипредставления полупростых групп Ли. В следующей теореме, которая может рассматриваться как свидетельство физической осмысленности понятия неприводимого конечномерного представления простой группы Ли, объединены результаты теорем II.4.1 и III.3.2.

ТЕОРЕМА III.4.5. *Любое неприводимое конечномерное не одномерное чистое псевдопредставление простой группы Ли, удовлетворяющее условию $\omega(S) < 2$, есть обычное непрерывное представление этой группы.*

В отличие от представлений, приводимое непрерывное конечномерное квазипредставление полупростой группы Ли может быть не вполне приводимым. Например, таково отображение $g \mapsto \begin{pmatrix} 1 & \chi(g) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $g \in G$, где G – простая эрмитово симметрическая группа Ли с бесконечным центром, а χ – ее псевдохарактер Гишарде–Вигнера (см. определение II.3.15). Поэтому вопросы непрерывности квазипредставлений связаны с более богатым классом отображений. Отметим сначала более специальные условия непрерывности псевдохарактеров и одномерных псевдопредставлений, не связанные с условием локальной ограниченности.

ТЕОРЕМА III.4.6 [113]. Пусть G – некомпактная простая группа Ли. Любой вещественный псевдохарактер на группе G непрерывен. В частности, если G – эрмитово симметрическая некомпактная простая группа Ли с бесконечным центром, то любой вещественный псевдохарактер на G кратен псевдохарактеру Гишарде–Вигнера, а на остальных простых группах Ли любой вещественный псевдохарактер равен нулю. Любое одномерное унитарное псевдопредставление некомпактной полупростой группы Ли является экспонентой от мнимого кратного некоторого вещественного псевдохарактера.

Пусть G – связная группа Ли, π – ее конечномерное ε -квазипредставление с достаточно малым ε . Переходя к универсальной накрывающей группе, мы вправе считать, что группа G односвязна. Ограничение квазипредставления π на радикал группы G близко к обычному представлению (см. теорему II.4.2 и замечание к ней), поэтому наибольший интерес представляет ограничение квазипредставления на полупростую часть, которая является в рассматриваемом случае прямым произведением связных односвязных простых групп Ли, и квазипредставление полупростой группы определяется ограничениями на эти простые сомножители. Для них, объединяя утверждения теорем II.4.1, III.3.2, III.4.5 и III.4.6, получаем следующее описание конечномерных квазипредставлений связных односвязных простых групп Ли.

ТЕОРЕМА III.4.7. Пусть G – связная односвязная простая группа Ли, π – ее конечномерное ε -квазипредставление с достаточно малым ε .

Если группа G компактна, то π является малым возмущением обычного непрерывного представления группы G (см. теорему III.3.2).

Если группа G некомпактна и не является эрмитово симметрической (см. определение II.3.10), то π является прямой суммой обычного неограниченного представления группы G и малого возмущения представления, кратного единичному представлению группы G .

Если группа G некомпактна и является эрмитово симметрической (см. определение II.3.10), то π является прямой суммой трех отображений: обычного неограниченного представления группы G , малого возмущения унитарного квазипредставления, определяемого прямой суммой экспонент от мнимых кратных псевдохарактера Гишарде–Вигнера группы G , и малого возмущения квазипредставления, имеющего блочную форму $g \mapsto \begin{pmatrix} 1_{E_1} & \chi(g)A \\ 0 & 1_{E_2} \end{pmatrix}$, $g \in G$, в прямой сумме двух подпространств, E_1 и E_2 , где на диагонали стоят единичные операторы в E_1 и E_2 , A – линейный оператор из E_2 в E_1 , а χ – псевдохарактер Гишарде–Вигнера группы G , причем возмущение может быть нетривиальным только в наддиагональном блоке.

Детальное описание структуры конечномерных квазипредставлений связных групп Ли будет дано в отдельной публикации.

Глава IV. Обзор близких результатов

Здесь приведены результаты, связанные с другими направлениями исследований по теории отображений, близких к представлениям.

§ IV.1. Деформации и лифтинги представлений групп в классе чистых псевдопредставлений

Помимо банаховых алгебр, деформации которых рассматривались в § I.3, другим общим объектом, деформации которого представляют интерес и сами по себе, и в многочисленных приложениях, являются представления групп. Один из вопросов современной теории представлений, связанный с деформационной жесткостью, – это свойство T Каждана, которого мы в этом параграфе едва касаемся, поскольку эта тема отражена в многочисленных исследованиях и обзорах (см., например, новую книгу [181]). Один из способов смягчить деформационную жесткость того или иного объекта состоит в расширении области допустимых деформаций. Безусловно, и единичное представление локально компактной группы со свойством T , и унитарные представления дискретной серии локально компактной группы могут оказаться деформируемыми в классе не обязательно унитарных представлений, но иногда естественно пытаться сберечь унитарную структуру. Оказывается, класс чистых псевдопредставлений, введенный в определении II.2.4 и близкий к обычным представлениям, достаточно богат, чтобы допустить нетривиальную деформацию единичного представления и унитарных представлений дискретной серии простых эрмитово симметрических групп Ли.

Опишем это явление. Покажем, что неединичные неприводимые унитарные представления простых эрмитово симметрических групп Ли (в том числе неприводимые унитарные представления дискретной серии для таких групп Ли [143], которые не могут быть непрерывно деформированы в классе унитарных представлений) могут быть непрерывно деформированы в классе чистых унитарных псевдопредставлений. А именно, имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА IV.1.1 ([49], [50]). Пусть G – простая эрмитово симметрическая группа Ли. Для любого (сильно непрерывного) неприводимого унитарного представления σ группы G в некотором гильбертовом пространстве H существует (сильно непрерывное по параметру) однопараметрическое семейство $t \mapsto \pi_t^\sigma$, $t \in \mathbb{R}$, попарно неэквивалентных чистых неприводимых унитарных ε_t -псевдопредставлений группы G в том же пространстве H , удовлетворяющее следующим двум условиям:

- 1) $\varepsilon_t \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$,
- 2) норма $\|\pi_t^\sigma(g) - \sigma(g)\|$ стремится к нулю при $t \rightarrow 0$ для любого $g \in G$.

Приведем явные формулы, относящиеся к модельному случаю $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ или, что эквивалентно, к случаю изоморфной группы $\mathrm{SU}(1, 1)$. Примем обозначения, использованные в [210]. Пусть $\tilde{G}$ – универсальная накрывающая для группы $\mathrm{SU}(1, 1)$. Мы воспользуемся ее стандартной параметризацией: $\tilde{G} = \{(\gamma, \omega) \mid \gamma \in \mathbb{C}, |\gamma| < 1, \omega \in \mathbb{R}\}$; групповая операция имеет вид $(\gamma, \omega)(\gamma', \omega') = (\gamma'', \omega'')$, $(\gamma, \omega), (\gamma', \omega'), (\gamma'', \omega'') \in \tilde{G}$, где

$$\begin{aligned} \gamma'' &= (\gamma + \gamma' \exp(-2i\omega'))(1 + \bar{\gamma}\gamma' \exp(-2i\omega))^{-1}, \\ \omega'' &= \omega + \omega' + \frac{1}{2i} \ln \{ (1 + \bar{\gamma}\gamma' \exp(-2i\omega))(1 + \gamma\bar{\gamma}' \exp(2i\omega))^{-1} \}. \end{aligned}$$

Здесь $\ln$ понимается в смысле главного значения.

Пусть $\mathbb{T}$ – одномерный тор. Определим действие группы $\tilde{G}$ на $\mathbb{T}$ формулой

$$\exp(i\theta) \cdot g = \exp(2i\omega) \left(\frac{\exp(i\theta) + \gamma}{\exp(i\theta)\bar{\gamma} + 1} \right).$$

Напомним определение представлений основной серии группы $\tilde{G}$ [210; (2.2.9)]. Для любых $\rho \in \mathbb{R}$ и $h \in (-1/2, 1/2]$ формула

$$\begin{aligned} (\exp(i\theta)) &= \exp(-2i\omega h) \left(\frac{1 + \exp(i\theta)\bar{\gamma}}{1 + \exp(-i\theta)\gamma} \right)^h \\ &\quad \times |\exp(i\theta)\bar{\beta} + \bar{\alpha}|^{-1-2i\rho} f(\exp(i\theta) \cdot g), \\ f &\in H = L^2(\mathbb{T}), \end{aligned}$$

где $\alpha = \exp(i\omega)(1 - |\gamma|^2)^{-1/2}$ и $\beta = \exp(i\omega)\gamma(1 - |\gamma|^2)^{-1/2}$ являются матричными элементами образа g_0 элемента $g \in \tilde{G}$ в $SU(1, 1)$, а именно, $g_0 = \begin{pmatrix} \alpha & \bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$, определяет неприводимое (за исключением случая $\rho = 0$ и $h = 1/2$) унитарное представление группы $\tilde{G}$ в гильбертовом пространстве H .

Для построения искомой деформации неприводимых унитарных представлений основной серии группы $SU(1, 1)$ мы используем нетривиальный псевдохарактер Гишарде–Вигнера χ на группе $\tilde{G}$ [38], определенный формулой

$$\chi((\gamma, \omega)) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \omega_n, \quad \text{где } (\gamma, \omega)^n = (\gamma_n, \omega_n) \in \tilde{G} \quad \text{при } n \in \mathbb{N}.$$

Явное выражение для псевдохарактера χ вычислено в [37]. В частности, там показано, что функция χ удовлетворяет условиям

$$|\chi((\gamma, \omega)(\gamma', \omega')) - \chi((\gamma, \omega)) - \chi((\gamma', \omega'))| < \pi/2$$

для любых $(\gamma, \omega), (\gamma', \omega') \in \tilde{G}$, и, как для любого псевдохарактера, ограничение функции χ на любую аменабельную подгруппу в $\tilde{G}$ является непрерывным гомоморфизмом этой подгруппы в группу $\mathbb{R}$ (см. теорему II.3.2, (b)). По этой причине формула $\psi_t(g) = \exp(it\chi(g))$, $g \in \tilde{G}$, определяет функцию $\psi_t: \tilde{G} \rightarrow \mathbb{T}$, удовлетворяющую условию

$$|\psi_t(gg') - \psi_t(g)\psi_t(g'')| \leq \sup_{|\phi| < \pi/2} |\exp(it\phi) - 1|, \quad g, g' \in \tilde{G}.$$

При $|t| < 2$ это приводит к неравенству

$$|\psi_t(gg') - \psi_t(g)\psi_t(g')| < |\exp(it\pi/2) - 1|, \quad g, g' \in \tilde{G}.$$

Отсюда следует, что, при данном $\rho \in \mathbb{R}$, формула

$$\pi_h^\rho(g) = \psi_{2h}(g)U_h(g, \rho), \quad g \in \tilde{G}, \quad (8)$$

определяет чистое псевдопредставление группы $\tilde{G}$ унитарными операторами в пространстве $L^2(\mathbb{T})$ для любого $h \in \mathbb{R}$. Неприводимость семейства $\pi_h^\rho(g)$, $g \in \tilde{G}$,

следует из неприводимости представлений основной серии [210]. Центр Z группы $\tilde{G}$ образован элементами вида $(0, n\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$, и, согласно (8), они переходят в единичный оператор: $\pi_h^\rho((0, n\pi)) = 1_{L^2(\mathbb{T})}$. Для любого $g \in \tilde{G}$ подгруппа A_g , порожденная g и Z , аменабельна. Поэтому ограничение чистого псевдопредставления π_h^ρ на эту подгруппу есть обычное унитарное представление группы A_g . Следовательно, $\pi_h^\rho(g(0, n\pi)) = \pi_h^\rho(g)$ для любого $g \in \tilde{G}$. Таким образом, π_h^ρ постоянна на смежных классах по центру и потому определяет чистое псевдопредставление факторгруппы группы $\tilde{G}$ по ее центру (см. теорему II.3.2, (d)). В частности, это отображение определяет чистое псевдопредставление группы $SU(1, 1)$. Ограничение каждого из построенных чистых псевдопредставлений группы $SU(1, 1)$ на максимальную компактную подгруппу диагональных матриц $K \subset SU(1, 1)$ содержит ненулевой K -инвариантный вектор, и соответствующие матричные элементы различны при различных $h \in \mathbb{R}$; следовательно, чистые псевдопредставления π_h^ρ попарно неэквивалентны. Утверждения 1) и 2) теоремы проверяются непосредственно, и, тем самым, формула $h \mapsto \pi_h^\rho$, $h \in \mathbb{R}$, определяет искомую деформацию представлений основной серии π^ρ , отвечающих $h = 0$.

Очевидно, что тем же способом можно построить деформацию неприводимых унитарных представлений второй части основной серии (отвечающих значению $h = 1/2$) и представлений дополнительной серии. Наконец, аналогичные формулы $\pi_t^{\pm, h}(g) = \psi_t(g)U^\pm(g, h)$, $t \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}$, $\pm h > 0$, $g \in \tilde{G}$, определяют деформацию представлений дискретной серии группы $SU(1, 1)$, отвечающих знаку $\pm$ и полужелому числу $\pm\nu$, если $t = h \mp \nu \in \mathbb{R}$, а ν – положительное полуцелое число.

Другой особенностью класса чистых псевдопредставлений вещественных простых эрмитово симметрических групп Ли является следующее свойство.

ТЕОРЕМА IV.1.2 ([51], [52]). Пусть G – простая эрмитово симметрическая группа Ли, Z – ее центр, $G_0 = G/Z$ – соответствующая присоединенная группа. Для любого (сильно непрерывного унитарного) неприводимого проективного представления σ группы G в некотором гильбертовом пространстве H существует (сильно непрерывное) чистое неприводимое унитарное псевдопредставление ρ группы G_0 в том же пространстве H , удовлетворяющее условию $\rho(gZ) \in \sigma(g)$ для любого $g \in G$. Аналогичное утверждение справедливо для представлений универсальной накрывающей группы G .

§ IV.2. Аддитивная задача

Конечно, все существенные характеристики понятия, которое мы называем гомоморфизмом или представлением (или хотя бы изометрическим линейным оператором), могут быть подвергнуты возмущению, и теория возмущений – один из самых естественных подходов к рассматриваемой задаче. По поводу отображений, близких к изометриям, см. [4], [8], [10], [64], а отображения, близкие к аддитивным, рассматривались со времен упомянутых выше работ Хайерса и Улама. Следующее утверждение, относящееся к более общей ситуации, чем отображения в банаховы пространства, дает базовую информацию о структуре аддитивных отображений аменабельных (и близких к ним) групп.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ IV.2.1 [9]. Пусть E – слабо секвенциально полное вещественное локально выпуклое пространство, G – группа, любые два элемента которой содержатся в ее аменабельной подгруппе, f – такое отображение группы G в E , что элемент $f(gh) - f(g) - f(h)$ содержится в некотором ограниченном множестве $O_f \subset E$ для всех $g, h \in G$. Тогда отображение f есть сумма некоторого гомоморфизма $\Phi: G \rightarrow E$ и отображения группы G в уравновешенную выпуклую оболочку множества O_f . Если E – бэровское пространство, а f – непрерывное отображение, то оба слагаемых (Φ и $f - \Phi$) непрерывны.

В некоторых вариантах постановки задачи об аддитивных отображениях результаты не всегда положительны. В частности, функция f на $\mathbb{R}$, заданная формулой $f(x) = x \ln(1 + |x|)$, удовлетворяет условию $|f(x + y) - f(x) - f(y)| \leq c(|x| + |y|)$, но не сублинейна.

Дополнительную информацию об отображениях, близких к аддитивным, можно найти в [3]–[5], [7]–[12].

§ IV.3. Заключительные замечания и нерешенные задачи

Рассматриваемые здесь вопросы теории возмущений и связанные с ними задачи имеют отношение к “топологии равномерной сходимости на группе” для унитарных квазипредставлений и, в частности, для обычных унитарных представлений топологических групп [9]. Для аменабельных групп представления, близкие в этой “топологии”, эквивалентны с помощью оператора, близкого к единице [8], а для неаменабельных групп они могут быть неэквивалентными (доказательство этого факта, приведенное в [9], использует построения работы [217]). Эти свойства заслуживают формализации и дальнейшего изучения.

Не только задачи о квазипредставлениях топологических групп, но и вопросы K -теории топологических алгебр ([115], [127]) связаны с условиями непрерывности представлений и, в частности, сильной непрерывности слабо непрерывных представлений ([205], [208]). Помимо новых результатов [115], представляет интерес метод, примененный П. де ла Гарпом и М. Каруби в 1977 г. для представлений компактных групп с компактными возмущениями [120].

Задачи о квазипредставлениях топологических групп связаны с условиями представимости групп в тех или иных пространствах. Банахову представимость топологических групп установил С. Телеман [218], критерий представимости в рефлексивных банаховых пространствах нашел автор [219] (см. также обсуждение в [183]). Как обнаружил М. Мегрелишвили [220], отвечая на вопрос, поставленный в [219], представимость групп в рефлексивных банаховых пространствах не равносильна их унитарной представимости. В настоящее время критерий унитарной представимости общих топологических групп неизвестен.

Представляет интерес изучение псевдохарактеров на более общих группах диффеоморфизмов. По-видимому, нелинейные представления подгрупп групп диффеоморфизмов, построенные в [221], [222], могут быть связаны с “квазихарактеристиками” этих групп.

В то время как пространство (группа) вторых ограниченных вещественных когомологий группы связано с пространством псевдохарактеров этой группы (см. § II.3), остается до сих пор неясной структура объектов, связанных аналогичным образом с высшими ограниченными когомологиями групп. Мотивацию задачи подкрепляет существование точной последовательности групп ограниченных когомологий, связанной с расширениями дискретных групп [25] (было бы интересно изучить и локально компактный случай), и наличие связи между ограниченными вещественными 2-коциклами на группе и псевдохарактерами на одномерном центральном расширении этой группы [38]. Заметим, что и связь между существованием нетривиальных псевдохарактеров на группе и представимостью элементов группы в виде произведений ограниченного числа коммутаторов ([23], [33], [197]) оказалась продуктивной и требует дополнительного изучения, в особенности для вполне несвязных групп.

Заметим также, что общее доказательство теоремы II.3.13 сводится к очень наглядной задаче из теории матриц: верно ли, что если все собственные значения вещественной матрицы положительны, то ортогональная часть полярного разложения этой матрицы не может иметь собственного значения, равного -1 ? Для 2×2 -матриц таких собственных значений действительно нет, что нетрудно проверить прямым вычислением.

Перечисленные в обзоре явления допускают более широкую точку зрения. *Квазиизометрией* (точнее, (K, C) -квазиизометрией) между метрическими пространствами X и Y называется отображение $f: X \rightarrow Y$, удовлетворяющее условию $K^{-1}d_X(x_1, x_2) - C \leq d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq Kd_X(x_1, x_2) + C$ для некоторых постоянных $K \geq 1$ и $C \geq 0$ и всех $x_1, x_2 \in X$, причем для любого $y \in Y$ существует элемент $x \in X$, удовлетворяющий условию $d_Y(f(x), y) \leq C$. Пусть $\widehat{QI}(X)$ – множество квазиизометрий, снабженное операцией композиции. Элементы $f, g \in \widehat{QI}(X)$ называются *грубо эквивалентными*, если функция $x \mapsto d_X(f(x), g(x))$, $x \in X$, ограничена, и пусть $[f]$ – класс грубой эквивалентности элемента $f \in \widehat{QI}(X)$. Композиция классов грубой эквивалентности определена корректно и превращает множество классов грубой эквивалентности в *группу квазиизометрий* $QI(X)$ на метрическом пространстве X . *Квазидействием* группы G на метрическом пространстве X называется такое отображение $A: G \rightarrow \widehat{QI}(X)$, $g \mapsto A_g$, что для некоторых $K \geq 1$ и $C \geq 0$ любое отображение A_g является (K, C) -квазиизометрией, $d_X(A_{\text{Id}}(x), x) \leq C$ для всех $x \in X$ и $d_X((A_g \circ A_{g'})(x), A_{gg'}(x)) \leq C$ для любых $g, g' \in G$ и для всех $x \in X$. Эти определения приводят к далеко идущим обобщениям “теории возмущений” для представлений и действий и в [103], [104] приводят к содержательным результатам о действиях на деревьях и модельных геометриях. Представляет интерес возможность обобщения приведенных здесь результатов на случай подгрупп (в том числе удовлетворяющих условиям типа конечности, см. [223]) и переноса результатов на случай квазидействий. Отметим, что понятие квазиизометрии играет ключевую роль в книге [152], посвященной теории конечно представимых групп с геометрической точки зрения.

Равномерно близкие одномерные квазипредставления совпадают, а неоднородные не обязаны совпадать, даже если они – обычные представления. Впрочем, близкие представления (точнее, их сопряженные) подобны даже для пред-

ставлений в пространствах Фреше [8] (о близких представлениях аменабельных алгебр см. выше, §1.5). Нетрудно привести примеры двумерных квазипредставлений, для которых результат применения известных конструкций близких представлений по инвариантному среднему [56] действительно зависит от выбора инвариантного среднего.

Ряд других нерешенных задач по теме статьи можно найти в [37], [49], [51], [161], [200], [203], [204] и [217]. В [224] указано еще одно направление, в котором можно развивать результаты статьи [183]; ср. §1.6.

IV.3.1. Дополнение. Группа разрывов относительно компактно-го гомоморфизма топологических групп. Напомним определения относительной компактности и локальной ограниченности гомоморфизмов топологических групп.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ IV.3.1. Пусть G – топологическая группа, π – ее (не обязательно непрерывный) гомоморфизм в топологическую группу H . Мы будем говорить, что π *локально относительно компактен*, или просто *относительно компактен*, если существует такая окрестность V единичного элемента e в G , что замыкание множества $\pi(V)$ является компактным подмножеством топологической группы H . Мы будем говорить, что π *локально вполне ограничен*, или просто *локально ограничен*, если существует такая окрестность V единичного элемента e в G , что множество $\pi(V)$ является вполне ограниченным подмножеством топологической группы H , т.е. для любой окрестности W единичного элемента e в G существует конечное число сдвигов окрестности W , объединение которых покрывает множество $\pi(V)$. Пусть $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_G$ – фильтр окрестностей единицы в G . Для любого локально относительно компактного гомоморфизма π введем обозначение

$$DG(\pi) = \bigcap_{U \in \mathfrak{U}} \overline{\pi(U)}.$$

Здесь и далее черта означает замыкание в соответствующей топологии.

Очевидно, если группа H локально компактна, то локально ограниченный гомоморфизм автоматически является локально относительно компактным. С другой стороны, следующее определение специфично для проективно-лиевых групп.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ IV.3.2. Пусть G – проективно-лиева топологическая группа, π – ее (не обязательно непрерывный) локально относительно компактный гомоморфизм в топологическую группу H . Пусть $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_G$ – фильтр компактных нормальных делителей в G , факторгруппы по которым являются группами Ли (как хорошо известно, $\bigcap_{N \in \mathfrak{N}} N = \{e\}$). Введем обозначение

$$FDG(\pi) = \bigcap_{N \in \mathfrak{N}} \overline{\pi(N)}.$$

ТЕОРЕМА IV.3.3. Пусть G – топологическая группа, а π – относительно компактный гомоморфизм группы G в топологическую группу H . Пусть $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_G$ – фильтр окрестностей единицы в G . Множество $DG(\pi)$ является компактной подгруппой топологической группы E . Подгруппа $DG(\pi)$ является нормальным делителем в замкнутой подгруппе $\pi(G)$ группы H . Кроме

того, базис фильтра $\{\overline{\pi(U)} \mid U \in \mathfrak{U}\}$ сходится к $DG(\pi)$, и гомоморфизм π непрерывен тогда и только тогда, когда $DG(\pi) = \{1_E\}$. Если при этом группа G локально компактна и почти связна, то $FDG(\pi)$ – замкнутый нормальный делитель в группе $\pi(G)$, содержащийся в $DG(\pi)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ IV.3.4. Пусть G – топологическая группа, а π – локально относительно компактный гомоморфизм группы G в топологическую группу H . Компактный нормальный делитель $DG(\pi)$ замыкания образа группы G при гомоморфизме π называется *группой разрывов* гомоморфизма π . Если группа G , кроме того, проективно-лиева, то компактный нормальный делитель $FDG(\pi)$ замыкания образа группы G при гомоморфизме π называется *группой финальных разрывов* гомоморфизма π .

В частности, группа разрывов определена для любого локально ограниченного гомоморфизма в локально компактную группу и тем самым и для любого конечномерного представления топологической группы (в этом частном случае понятие группы разрывов было введено ранее в [214]). Отметим следующий общий факт. Напомним, что топологическая группа называется *локально безгранично делимой*, если операция возведения в p -ю степень открыта в единице группы (т.е. образ любой окрестности единицы содержит окрестность единицы) для любого натурального p . В частности, связные компактные группы, локально связные локально компактные группы и связные коммутативные локально компактные группы локально безгранично делимы, так что наше условие локальной безграничной делимости отличается от условия с тем же названием, введенного в [225].

ТЕОРЕМА IV.3.5. Пусть G – локально безгранично делимая локально компактная группа, а π – локально ограниченное представление группы G в конечномерном векторном пространстве E . Тогда группа разрывов $DG(\pi)$ является компактной связной линейной группой (компактной связной подгруппой группы $GL(E)$).

Любая компактная связная линейная группа может быть группой разрывов и группой финальных разрывов конечномерного локально ограниченного представления компактной топологической группы. Отметим следующее утверждение (ср. [214]).

СЛЕДСТВИЕ IV.3.6. Если G – связная группа Ли, а π – локально ограниченное представление группы G в конечномерном векторном пространстве E , то группа разрывов $DG(\pi)$ является тором. Если G – связная разрешимая локально компактная группа, то любое ее локально ограниченное конечномерное представление непрерывно на коммутаторе этой группы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ IV.3.7. Пусть G – топологическая группа, а π – локально относительно компактный гомоморфизм группы G в топологическую группу H . Гомоморфизм π называется *финально непрерывным*, если $FDG(\pi) = \{e\}$.

ТЕОРЕМА IV.3.8. Пусть G – почти связная локально компактная группа, а π – локально ограниченное представление группы G в конечномерном

векторном пространстве E . Представление π является финально непрерывным тогда и только тогда, когда оно определяется представлением некоторой факторгруппы Ли группы G .

СЛЕДСТВИЕ IV.3.9. Пусть G – связная локально компактная группа. Следующие условия равносильны.

- 1) Все факторгруппы Ли группы G совершенны.
- 2) Группа G совершенна, т.е. совпадает со своим коммутантом.
- 3) Любое финально непрерывное локально ограниченное представление группы G в конечномерном векторном пространстве непрерывно.
- 4) Группа G не имеет нетривиальных коммутативных факторгрупп.

Условие финальной непрерывности в 3) нельзя опустить, как показывает пример прямого произведения счетного числа одинаковых полупростых компактных линейных групп Ли и представления, определяемого применением свободного ультрафильтра по каждому матричному элементу к элементам этого прямого произведения (см. [213] и [214]).

Объединение утверждений теоремы IV.3.3 и основного результата статьи [201] показывает, что гипотеза Мищенко (см. п. III.4.3) справедлива для всех связных локально компактных групп.

Список литературы

- [1] R. Dedekind, “Erläuterungen zu den Fragmenten XXVIII”, B. Riemann, *Collected works (Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlaß)*, Dover, New York, NY, 1953, 466–478.
- [2] H. Rademacher, “Zur Theorie der Modulfunktionen”, *J. Reine Angew. Math.*, **167** (1932), 312–336.
- [3] D. H. Hyers, “On the stability of the linear functional equation”, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **27**:4 (1941), 222–224.
- [4] D. H. Hyers, S. M. Ulam, “On approximate isometries”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **51** (1945), 288–292.
- [5] D. H. Hyers, T. M. Rassias, “Approximate homomorphisms”, *Aequationes Math.*, **44**:2–3 (1992), 125–153.
- [6] С. Улам, *Нерешенные математические задачи*, Наука, М., 1964; пер. с англ.: S. M. Ulam, *A collection of mathematical problems*, Interscience Publishers, New York–London, 1960.
- [7] А. И. Штерн, “Квазипредставления и псевдопредставления”, *Функц. анализ и его прилож.*, **25**:2 (1991), 70–73; англ. пер.: A. I. Shtern, “Quasirepresentations and pseudorepresentations”, *Funct. Anal. Appl.*, **25**:2 (1991), 140–143.
- [8] А. И. Штерн, “Об операторах в пространствах Фреше, подобных изометриям”, *Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех.*, 1991, № 4, 67–70; англ. пер.: A. I. Shtern, “On operators in Fréchet spaces that are similar to isometries”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **46**:4 (1991), 47–48.
- [9] A. I. Shtern, “Quasisymmetry. I”, *Russ. J. Math. Phys.*, **2**:3 (1994), 353–382.
- [10] P. Šemrl, “Hyers–Ulam stability of isometries on Banach spaces”, *Aequationes Math.*, **58**:1–2 (1999), 157–162.
- [11] T. M. Rassias, “The problem of S. M. Ulam for approximately multiplicative mappings”, *J. Math. Anal. Appl.*, **246**:2 (2000), 352–378.
- [12] P. Šemrl, “Almost multiplicative functions and almost linear multiplicative functionals”, *Aequationes Math.*, **63**:1–2 (2002), 180–192.

- [13] J. von Neumann, “Approximative properties of matrices of high finite order”, *Port. Math.*, **3** (1942), 1–62; рус. пер.: Дж. фон Нейман, “Аппроксимативные свойства матриц высокого конечного порядка”, *Избранные труды по функциональному анализу*, т. 1, Наука, М., 1987, 277–328.
- [14] Дж. фон Нейман, *Избранные труды по функциональному анализу*, т. 1, Наука, М., 1987.
- [15] А. М. Вершик, “Комментарии к русскому переводу”, *Дж. фон Нейман, Избранные труды по функциональному анализу*, т. 1, Наука, М., 1987, 372–374.
- [16] D. Montgomery, L. Zippin, “A theorem on Lie groups”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **48** (1942), 448–452.
- [17] B. E. Johnson, *Cohomology in Banach algebras*, Mem. Amer. Math. Soc., **127**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1972.
- [18] А. И. Штерн, “Псевдохарактер, определенный символом Радемахера”, *УМН*, **45:3** (1990), 197–198; англ. пер.: A. I. Shtern, “The pseudocharacter determined by the Rademacher symbol”, *Russian Math. Surveys*, **45:3** (1990), 224–225.
- [19] R. Brooks, “Some remarks on bounded cohomology”, *Riemann surfaces and related topics*, Proceedings of the 1978 Stony Brook conference (State Univ. New York, Stony Brook, NY, 1978), Ann. of Math. Stud., **97**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1981, 53–63.
- [20] А. И. Штерн, *Устойчивость представлений и псевдохарактеры*, Ломоносовские чтения, МГУ, М., 1983.
- [21] В. А. Файзиев, “Псевдохарактеры на свободных произведениях полугрупп”, *Функц. анализ и его прилож.*, **21:1** (1987), 86–87; англ. пер.: V. A. Faiziev, “Pseudocharacters on free products of semigroups”, *Funct. Anal. Appl.*, **21:1** (1987), 77–79.
- [22] В. А. Файзиев, “Псевдохарактеры на свободных группах и некоторых групповых конструкциях”, *УМН*, **43:5** (1988), 225–226; англ. пер.: V. A. Faiziev, “Pseudocharacters on free groups and on certain group constructions”, *Russian Math. Surveys*, **43:5** (1988), 219–220.
- [23] C. Bavard, “Longueur stable des commutateurs”, *Enseign. Math.* (2), **37:1–2** (1991), 109–150.
- [24] G. Besson, *Sur la cohomologie bornée*, Séminaire sur la cohomologie bornée, École Norm. Sup. Lyon, Report, Février 1988.
- [25] A. Bouarich, “Suites exactes en cohomologie bornée réelle des groupes discrets”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **320:11** (1995), 1355–1359.
- [26] J. Barge, É. Ghys, “Surfaces et cohomologie bornée”, *Invent. Math.*, **92:3** (1988), 509–526.
- [27] J. Barge, É. Ghys, “Cocycles d’Euler et de Maslov”, *Math. Ann.*, **294:2** (1992), 235–265.
- [28] R. I. Grigorchuk, “Some results on bounded cohomology”, *Combinatorial and geometric group theory* (Edinburgh, 1993), London Math. Soc. Lecture Note Ser., **204**, eds. A. J. Duncan, N. D. Gilbert, J. Howie, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995, 111–163.
- [29] M. Gromov, “Volume and bounded cohomology”, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, **56** (1982), 5–99.
- [30] M. Gromov, “Positive curvature, macroscopic dimension, spectral gaps and higher signatures”, *Functional analysis on the eve of the 21st century*, vol. II (New Brunswick, NJ, 1993), Progr. Math., **132**, Birkhäuser, Boston, MA, 1996, 1–213.
- [31] J. F. Manning, “Geometry of pseudocharacters”, *Geom. Topol.*, **9** (2005), 1147–1185; *arXiv: math.GR/0303380*.
- [32] N. Monod, *Continuous bounded cohomology of locally compact groups*, Lecture Notes in Math., **1758**, Springer-Verlag, Berlin, 2001.

- [33] N. Monod, B. Rémy, “Boundedly generated groups with pseudocharacter(s)”, Appendix to: J. F. Manning, “Quasi-actions on trees and property (QFA)”, *J. London Math. Soc.* (2), **73**:1 (2006), 104–108.
- [34] J.-C. Picaud, “Cohomologie bornée des surfaces et courants géodésiques”, *Bull. Soc. Math. France*, **125**:1 (1997), 115–142.
- [35] A. I. Shtern, *Remarks on pseudocharacters and the real continuous bounded cohomology of connected locally compact groups*, Sfb 288 Preprint № 289, Technische Universität, Berlin, 1997.
- [36] A. I. Shtern, “Bounded continuous real 2-cocycles on simply connected simple Lie groups and their applications”, *Russ. J. Math. Phys.*, **8**:1 (2001), 122–133.
- [37] A. I. Shtern, “Remarks on pseudocharacters and the real continuous bounded cohomology of connected locally compact groups”, *Ann. Global Anal. Geom.*, **20**:3 (2001), 199–221.
- [38] А. И. Штерн, “Структурные свойства и ограниченные вещественные непрерывные 2-когомологии локально компактных групп”, *Функц. анализ и его прилож.*, **35**:4 (2001), 67–80; англ. пер.: A. I. Shtern, “Structure properties and real continuous bounded 2-cohomology of locally compact groups”, *Funct. Anal. Appl.*, **35**:4 (2001), 294–304.
- [39] A. I. Shtern, “A criterion for the second real continuous bounded cohomology of a locally compact group to be finite-dimensional”, Noncommutative geometry and operator K -theory, *Acta Appl. Math.*, **68**:1–3 (2001), 105–121.
- [40] J.-M. Gambaudo, É. Ghys, “Commutators and diffeomorphisms of surfaces”, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **24**:5 (2004), 1591–1617.
- [41] É. Ghys, “Groups acting on the circle”, *Enseign. Math.* (2), **47**:3–4 (2001), 329–407.
- [42] P. Biran, M. Entov, L. Polterovich, “Calabi quasimorphisms for the symplectic ball”, *Commun. Contemp. Math.*, **6**:5 (2004), 793–802.
- [43] M. Entov, “Commutator length of symplectomorphisms”, *Comment. Math. Helv.*, **79**:1 (2004), 58–104.
- [44] M. Entov, L. Polterovich, “Calabi quasimorphism and quantum homology”, *Int. Math. Res. Not.*, **30** (2003), 1635–1676.
- [45] D. McDuff, “A survey of the topological properties of symplectomorphism groups”, *Topology, geometry and quantum field theory*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **308**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004, 173–193.
- [46] L. Polterovich, Z. Rudnick, “Stable mixing for cat maps and quasi-morphisms of the modular group”, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **24**:2 (2004), 609–619.
- [47] P. Py, “Quasi-morphismes et invariant de Calabi”, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4), **39**:1 (2006), 177–195.
- [48] A. Sambusetti, “Minimal entropy and simplicial volume”, *Manuscripta Math.*, **99**:4 (1999), 541–560.
- [49] А. И. Штерн, “Деформация неприводимых унитарных представлений дискретной серии эрмитово симметрических простых групп Ли в классе чистых псевдопредставлений”, *Матем. заметки*, **73**:3 (2003), 478–480; англ. пер.: A. I. Shtern, “Deformation of irreducible unitary representations of discrete series of Hermitian symmetric simple Lie groups in the class of pure pseudorepresentations”, *Math. Notes*, **73**:3 (2003), 452–454.
- [50] А. И. Штерн, “Деформация неприводимых унитарных представлений дискретной серии эрмитово симметрических простых групп Ли в классе чистых псевдопредставлений”, *Топология, анализ и смежные вопросы*, Соврем. матем. и ее прил., **1**, Ин-т кибернет. АН Грузии, Тбилиси, 2003, 161–176; англ. пер.: A. I. Shtern, “Deformations of irreducible unitary representations of a discrete series of Hermitian-symmetric simple Lie groups in the class of pure pseudo-representations”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **123**:4 (2004), 4324–4339.

- [51] A. I. Shtern, “Projective irreducible unitary representations of Hermitian symmetric simple Lie groups are generated by pure pseudorepresentations”, *Adv. Stud. Contemp. Math. (Kyungshang)*, **9**:1 (2004), 1–6.
- [52] А. И. Штерн, “Проективные представления и чистые псевдопредставления эрмитово симметрических простых групп Ли”, *Матем. заметки*, **78**:1 (2005), 140–146; англ. пер.: A. I. Shtern, “Projective representations and pure pseudorepresentations of Hermitian symmetric simple Lie groups”, *Math. Notes*, **78**:1–2 (2005), 128–133.
- [53] D. Kotschick, “What is ... a quasi-morphism?”, *Notices Amer. Math. Soc.*, **51**:2 (2004), 208–209.
- [54] K. Grove, H. Karcher, E. A. Ruh, “Jacobi fields and Finsler metrics on compact Lie groups with an application to differentiable pinching problems”, *Math. Ann.*, **211**:1 (1974), 7–21.
- [55] D. Ma, “Upper semicontinuity of isotropy and automorphism groups”, *Math. Ann.*, **292**:3 (1992), 533–545.
- [56] P. de la Harpe, M. Karoubi, “Représentations approchées d’un groupe dans une algèbre de Banach”, *Manuscripta Math.*, **22**:3 (1977), 293–310.
- [57] D. Kazhdan, “On ε -representations”, *Israel J. Math.*, **43**:4 (1982), 315–323.
- [58] A. I. Shtern, “Almost convergence and its applications to the Fourier–Stieltjes localization”, *Russ. J. Math. Phys.*, **1**:1 (1993), 115–125.
- [59] B. E. Johnson, “Approximately multiplicative functionals”, *J. London Math. Soc.* (2), **34**:3 (1986), 489–510.
- [60] B. E. Johnson, “Perturbations of multiplication and homomorphisms”, *Deformation theory of algebras and structures and applications* (Il Ciocco, 1986), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., **247**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1988, 565–579.
- [61] B. E. Johnson, “Approximate diagonals and cohomology of certain annihilator Banach algebras”, *Amer. J. Math.*, **94** (1972), 685–698.
- [62] B. E. Johnson, “Derivations from $L^1(G)$ into $L^1(G)$ and $L^\infty(G)$ ”, *Harmonic analysis* (Luxembourg, 1987), Lecture Notes in Math., **1359**, Springer, Berlin, 1988, 191–198.
- [63] J. Baker, F. Lawrence, F. Zorzitto, “The stability of equation $f(x + y) = f(x)f(y)$ ”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **74**:2 (1979), 242–246.
- [64] D. G. Bourgin, “Approximately isometric and multiplicative transformations on continuous function rings”, *Duke Math. J.*, **16** (1949), 385–397.
- [65] H. G. Dales, A. R. Villena, “Continuity of derivations, intertwining maps, and cocycles from Banach algebras”, *J. London Math. Soc.* (2), **63**:1 (2001), 215–225.
- [66] G. L. Forti, “The stability of homomorphisms and amenability, with applications to functional equations”, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **57** (1987), 215–226.
- [67] G. Gong, H. Lin, “Almost multiplicative morphisms and K -theory”, *Internat. J. Math.*, **11**:8 (2000), 983–1000.
- [68] G. Gong, H. Lin, “Almost multiplicative morphisms and almost commuting matrices”, *J. Operator Theory*, **40**:2 (1998), 217–275.
- [69] K. Jarosz, “Small isomorphisms between operator algebras”, *Proc. Edinb. Math. Soc.* (2), **28**:2 (1985), 121–131.
- [70] K. Jarosz, *Perturbations of Banach algebras*, Lecture Notes in Math., **1120**, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [71] K. Jarosz, “Perturbations of function algebras”, *Deformation theory of algebras and structures and applications* (Il Ciocco, 1986), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., **247**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1988, 557–563.
- [72] K. Jarosz, “Small perturbations of algebras of analytic functions on polydiscs”, *Function spaces* (Edwardsville, IL, 1990), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **136**, Dekker, New York, 1992, 223–240.

- [73] K. Jarosz, “Almost multiplicative functionals”, *Studia Math.*, **124**:1 (1997), 37–58.
- [74] K. Jarosz, “When is a linear functional multiplicative?”, *Function spaces* (Edwardsville, IL, 1998), *Contemp. Math.*, **232**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, 201–210.
- [75] B. E. Johnson, “Perturbations of Banach algebras”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **34**:3 (1977), 439–458.
- [76] B. E. Johnson, “Continuity of generalized homomorphisms”, *Bull. London Math. Soc.*, **19**:1 (1987), 67–71.
- [77] B. E. Johnson, “Approximately multiplicative maps between Banach algebras”, *J. London Math. Soc.* (2), **37**:2 (1988), 294–316.
- [78] B. E. Johnson, “Near inclusions for subhomogeneous C^* -algebras”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **68**:2 (1994), 399–422.
- [79] B. E. Johnson, “Non-amenability of the Fourier algebra of a compact group”, *J. London Math. Soc.* (2), **50**:2 (1994), 361–374.
- [80] B. E. Johnson, “Symmetric amenability and the nonexistence of Lie and Jordan derivations”, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **120**:3 (1996), 455–473.
- [81] B. E. Johnson, “The derivation problem for group algebras of connected locally compact groups”, *J. London Math. Soc.* (2), **63**:2 (2001), 441–452.
- [82] B. E. Johnson, “Local derivations on C^* -algebras are derivations”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **353**:1 (2001), 313–325.
- [83] J. Lawrence, “The stability of multiplicative semigroup homomorphisms to real normed algebras, I”, *Aequationes Math.*, **28**:1 (1985), 94–101.
- [84] H. Lin, “Almost multiplicative morphisms and some applications”, *J. Operator Theory*, **37**:1 (1997), 121–154.
- [85] H. Lin, “When almost multiplicative morphisms are close to homomorphisms”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **351**:12 (1999), 5027–5049.
- [86] H. Lin, N. C. Phillips, “Almost multiplicative morphisms and the Cuntz algebra $\mathcal{O}_2$ ”, *Internat. J. Math.*, **6**:4 (1995), 625–643.
- [87] T. A. Loring, “Almost multiplicative maps between C^* -algebras”, *Operator algebras and quantum field theory* (Rome, 1996), *Internat. Press*, Cambridge, MA, 1997, 111–122.
- [88] T. A. Loring, G. K. Pedersen, “Corona extendibility and asymptotic multiplicativity”, *K-Theory*, **11**:1 (1997), 83–102.
- [89] В. М. Мануйлов, “Почти представления и асимптотические представления дискретных групп”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **63**:5 (1999), 159–178; англ. пер.: V. M. Manuilov, “Almost-representations and asymptotic representations of discrete groups”, *Izv. Math.*, **63**:5 (1999), 995–1014.
- [90] В. М. Мануйлов, “О почти представлениях групп $\pi \times \mathbf{Z}$ ”, *Солитоны, геометрия, топология – на перекрестках*, К 60-летию со дня рождения акад. С. П. Новикова, Тр. МИАН, **225**, Наука, М., 1999, 257–263; англ. пер.: V. M. Manuilov, “On almost representations of groups $\pi \times \mathbf{Z}$ ”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **225** (1999), 243–249.
- [91] В. М. Мануйлов, “О C^* -алгебрах, связанных с асимптотическими гомоморфизмами”, *Матем. заметки*, **68**:3 (2000), 377–384; англ. пер.: V. M. Manuilov, “On C^* -algebras associated with asymptotic homomorphisms”, *Math. Notes*, **68**:3–4 (2000), 326–332.
- [92] V. M. Manuilov, “Almost commutativity implies asymptotic commutativity”, *Operator theoretical methods* (Timișoara, 1998), Theta Found., Bucharest, 2000, 257–268.
- [93] В. М. Мануйлов, А. С. Мищенко, “Асимптотические и фредгольмовы представления дискретных групп”, *Матем. сб.*, **189**:10 (1998), 53–74; англ. пер.: V. M. Manuilov, A. S. Mishchenko, “Asymptotic and Fredholm representations of discrete groups”, *Sb. Math.*, **189**:10 (1998), 1485–1504.

- [94] V. M. Manuilov, A. S. Mishchenko, “Almost, asymptotic and Fredholm representations of discrete groups”, *Noncommutative geometry and operator K-theory, Acta Appl. Math.*, **68**:1–3 (2001), 159–210.
- [95] В. М. Мануйлов, К. Томсен, “Асимптотически расщепляющиеся расширения и E -теория”, *Алгебра и анализ*, **12**:5 (2000), 142–157; англ. пер.: V. M. Manuilov, K. Thomsen, “Asymptotically split extensions and E -theory”, *St. Petersburg Math. J.*, **12**:5 (2001), 819–830.
- [96] V. M. Manuilov, K. Thomsen, “Quasidiagonal extensions and sequentially trivial asymptotic homomorphisms”, *Adv. Math.*, **154**:2 (2000), 258–279.
- [97] В. М. Мануйлов, К. Томсен, “Отображение Конна–Хигсона является изоморфизмом”, *УМН*, **56**:4 (2001), 151–152; англ. пер.: V. M. Manuilov, K. Thomsen, “The Connes–Higson map is an isomorphism”, *Russian Math. Surveys*, **56**:4 (2001), 756–757.
- [98] V. Manuilov, K. Thomsen, “ E -theory is a special case of KK -theory”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **88**:2 (2004), 455–478.
- [99] V. Manuilov, K. Thomsen, “The Connes–Higson construction is an isomorphism”, *J. Funct. Anal.*, **213**:1 (2004), 154–175.
- [100] V. Manuilov, K. Thomsen, “Semi-invertible extensions and asymptotic homomorphisms”, *K-Theory*, **32**:2 (2004), 101–138.
- [101] В. М. Мануйлов, К. Томсен, “Трансляционно инвариантные асимптотические гомоморфизмы и расширения C^* -алгебр”, *Функц. анализ и его прилож.*, **39**:3 (2005), 87–91; англ. пер.: V. M. Manuilov, K. Thomsen, “Translation invariant asymptotic homomorphisms and extensions of C^* -algebras”, *Funct. Anal. Appl.*, **39**:3 (2005), 236–239.
- [102] А. С. Мищенко, “О фредгольмовых представлениях дискретных групп”, *Функц. анализ и его прилож.*, **9**:2 (1975), 36–41; англ. пер.: A. S. Mishchenko, “On Fredholm representations of discrete groups”, *Funct. Anal. Appl.*, **9**:2 (1975), 121–125.
- [103] L. Mosher, M. Sageev, K. Whyte, “Maximally symmetric trees”, *Geom. Dedicata*, **92**:1 (2002), 195–233.
- [104] L. Mosher, M. Sageev, K. Whyte, “Quasi-actions on trees. I: Bounded valence”, *Ann. of Math.* (2), **158**:1 (2003), 115–164.
- [105] S. J. Sidney, “Are all uniform algebras AMNM?”, *Bull. London Math. Soc.*, **29**:3 (1997), 327–330.
- [106] А. И. Штерн, “Об устойчивости гомоморфизмов в группу R^* ”, *Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех.*, 1982, № 3, 29–32.
- [107] А. И. Штерн, “О жесткости положительных характеров”, *УМН*, **35**:5 (1980), 218.
- [108] А. И. Штерн, “Характеризации аменабельности в классе связанных локально компактных групп”, *УМН*, **49**:2 (1994), 183–184; англ. пер.: A. I. Shtern, “A characterization of amenability in the class of connected locally compact groups”, *Russian Math. Surveys*, **49**:2 (1994), 174–175.
- [109] A. I. Shtern, “Triviality and continuity of pseudocharacters and pseudorepresentations”, *Russ. J. Math. Phys.*, **5**:1 (1998), 135–138.
- [110] A. I. Shtern, “Almost representations and quasi-symmetry”, *Lie groups and Lie algebras. Their representations, generalizations and applications*, Math. Appl., **433**, eds. B. P. Komrakov et al., Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998, 337–358.
- [111] A. I. Shtern, “Quasi-symmetry and amenability”, *International congress of mathematicians*, vol. II, Abstracts of reports (Berlin, 1998), Berlin, 138.
- [112] А. И. Штерн, “Жесткость и аппроксимация квазипредставлений аменабельных групп”, *Матем. заметки*, **65**:6 (1999), 908–920; англ. пер.: A. I. Shtern, “Roughness and approximation of quasi-representations of amenable groups”, *Math. Notes*, **65**:6 (1999), 760–769.

- [113] A. I. Shtern, “Automatic continuity of pseudocharacters on Hermitian symmetric semisimple Lie groups and some applications”, *Adv. Stud. Contemp. Math. (Kyung-shang)*, **12**:1–8 (2006).
- [114] K. Thomsen, “Asymptotic homomorphisms and equivariant KK -theory”, *J. Funct. Anal.*, **163**:2 (1999), 324–343.
- [115] K. Thomsen, “Nonstable K -theory for operator algebras”, *K-theory*, **4**:3 (1991), 245–267.
- [116] D. Voiculescu, “Asymptotically commuting finite rank unitary operators without commuting approximants”, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **45**:1–4 (1983), 429–431.
- [117] J. Araujo, K. Jarosz, “Separating maps on spaces of continuous functions”, *Function spaces* (Edwardsville, IL, 1998), Contemp. Math., **232**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, 33–37.
- [118] L. G. Brown, N.-C. Wong, “Unbounded disjointness preserving linear functionals”, *Monatsh. Math.*, **141**:1 (2004), 21–32.
- [119] J. Brzdek, “On orthogonally exponential and orthogonally additive mappings”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **125**:7 (1997), 2127–2132.
- [120] P. de la Harpe, M. Karoubi, “Perturbations compactes des représentations d’un groupe dans un espace de Hilbert, II”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **28**:1 (1978), 1–25.
- [121] R. Exel, T. A. Loring, “Invariants of almost commuting unitaries”, *J. Funct. Anal.*, **95**:2 (1991), 364–376.
- [122] K. Jarosz, “Automatic continuity of separating linear isomorphisms”, *Canad. Math. Bull.*, **33**:2 (1990), 139–144.
- [123] A. Connes, N. Higson, *Almost homomorphisms and KK -theory*, <http://www.math.psu.edu/higson/Papers/ch1.pdf>, 1989.
- [124] A. Connes, N. Higson, “Déformations, morphismes asymptotiques et K -théorie bi-variante”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **311**:2 (1990), 101–106.
- [125] A. S. Mishchenko, N. Mohammad, “Asymptotic representation of discrete groups”, *Lie groups and Lie algebras*, Math. Appl., **433**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998, 299–312.
- [126] A. Connes, M. Gromov, H. Moscovici, “Conjecture de Novikov et fibrés presque plats”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **310**:5 (1990), 273–277.
- [127] E. J. Beggs, *Pointwise bounded asymptotic morphisms and Thomsen’s non-stable k -theory*, [arXiv:math.OA/0201051](https://arxiv.org/abs/math.OA/0201051).
- [128] J. Cuntz, “Bivariante K -Theorie für lokalkonvexe Algebren und der Chern-Connes-Charakter”, *Doc. Math.*, **2** (1997), 139–182.
- [129] J. Cuntz, “Bivariant K -theory and the Weyl algebra”, *K-Theory*, **35**:1–2 (2005), 93–137.
- [130] M. Dadarlat, S. Eilers, “Asymptotic unitary equivalence in KK -theory”, *K-Theory*, **23**:4 (2001), 305–322.
- [131] S. Eilers, T. A. Loring, “Computing contingencies for stable relations”, *Internat. J. Math.*, **10**:3 (1999), 301–326.
- [132] G. A. Elliott, Q. Lin, “Cut-down method in the inductive limit decomposition of non-commutative tori”, *J. London Math. Soc. (2)*, **54**:1 (1996), 121–134.
- [133] E. Guentner, N. Higson, J. Trout, “Equivariant E -theory for C^* -algebras”, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **148**:703 (2000).
- [134] N. Higson, “A primer on KK -theory”, *Operator theory: operator algebras and applications*, Part 1 (Durham, NH, 1988), Proc. Sympos. Pure Math., **51**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990, 239–283.
- [135] N. Higson, J. Roe, “Amenable group actions and the Novikov conjecture”, *J. Reine Angew. Math.*, **519** (2000), 143–153.

- [136] Г. Г. Каспаров, “Операторный K -функтор и расширения C^* -алгебр”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **44**:3 (1980), 571–636; англ. пер.: G. G. Kasparov, “The operator K -functor and extensions of C^* -algebras”, *Math. USSR Izv.*, **16**:3 (1981), 513–572.
- [137] А. Я. Хелемский, *Гомология в банаховых и топологических алгебрах*, Изд-во МГУ, М., 1986; англ. пер.: A. Ya. Helemskii, *The homology of Banach and topological algebras*, Math. Appl. (Soviet Ser.), **41**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1989.
- [138] R. J. Loy, C. J. Read, V. Runde, G. A. Willis, “Amenable and weakly amenable Banach algebras with compact multiplication”, *J. Funct. Anal.*, **171**:1 (2000), 78–114.
- [139] G. Yu, “The Novikov conjecture for groups with finite asymptotic dimension”, *Ann. of Math. (2)*, **147**:2 (1998), 325–355.
- [140] N. P. Landsman, “Strict deformation quantization of a particle in external gravitational and Yang–Mills fields”, *J. Geom. Phys.*, **12**:2 (1993), 93–132.
- [141] Х. Шефер, *Топологические векторные пространства*, Мир, М., 1971; пер. с англ.: H. Schaefer, *Topological vector spaces*, The Macmillan Co., New York; Collier–Macmillan Ltd., London, 1966.
- [142] М. А. Наймарк, А. И. Штерн [Shtern], *Theory of group representations*, Grundlehren Math. Wiss., **246**, Springer-Verlag, New York, 1982.
- [143] G. Warner, *Harmonic analysis on semi-simple Lie groups*, I, II, Grundlehren Math. Wiss., **188**, **189**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1972.
- [144] Ф. П. Гринлиф, *Инвариантные средние на топологических группах и их приложения*, Мир, М., 1973; пер. с англ.: F. P. Greenleaf, *Invariant means on topological groups and their applications*, Van Nostrand Mathematical Studies, **16**, Van Nostrand Reinhold Co., London, 1969.
- [145] A. L. T. Paterson, *Amenability*, Math. Surveys Monogr., **29**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.
- [146] A. T. M. Lau, “Amenability of semigroups”, *The analytical and topological theory of semigroups*, de Gruyter Exp. Math., **1**, de Gruyter, Berlin, 1990, 313–334.
- [147] Р. Энгелькинг, *Общая топология*, Мир, М., 1986; пер. с рукописи 2-го изд.: R. Engelking, *General topology*, Sigma Ser. Pure Math., **6**, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.
- [148] Ж. Диксмье, *C^* -алгебры и их представления*, Наука, М., 1974; пер. с фр.: J. Dixmier, *Les C^* -algèbres et leurs représentations*, Gauthier-Villars, Paris, 1969.
- [149] М. Takesaki, *Theory of operator algebras*, I, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1979.
- [150] Э. Хьюитт, К. Росс, *Абстрактный гармонический анализ. Т. I: Структура топологических групп. Теория интегрирования. Представления групп*, Наука, М., 1975; пер. с англ.: E. Hewitt, K. A. Ross, *Abstract harmonic analysis. V. I: Structure of topological groups. Integration theory, group representations*, Grundlehren Math. Wiss., **115**, Academic Press, New York; Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1963.
- [151] K. Iwasawa, “On some types of topological groups”, *Ann. of Math. (2)*, **50**:2 (1949), 507–558.
- [152] P. de la Harpe, *Topics in geometric group theory*, Chicago Lectures in Math., Univ. of Chicago Press, Chicago, IL, 2000.
- [153] Б. Л. Фейгин, Д. Б. Фукс, “Когомологии групп и алгебр Ли”, *Группы Ли и алгебры Ли II*, Итоги науки и техники. Соврем. проблемы матем. Фундам. напр., **21**, ВИНТИ, М., 1988, 121–209; англ. пер.: B. L. Feigin, D. B. Fuchs, “Cohomologies of Lie groups and Lie algebras”, *Lie groups and Lie algebras II*, Encyclopaedia Math. Sci., **21**, Springer, Berlin, 2000, 125–215.

- [154] А. Гипарде, *Когомологии топологических групп и алгебр Ли*, Мир, М., 1984; пер. с фр.: A. Guichardet, *Cohomologie des groupes topologiques et des algèbres de Lie*, CEDIC, Paris, 1980.
- [155] А. Я. Хелемский, *Банаховы и полинормированные алгебры: общая теория, представления, гомологии*, Наука, М., 1989; англ. пер.: A. Ya. Helemskii, *Banach and locally convex algebras*, The Clarendon Press, Oxford Univ. Press, New York, 1993.
- [156] С. Хелгасон, *Дифференциальная геометрия и симметрические пространства*, Мир, М., 1964; пер. с англ.: S. Helgason, *Differential geometry and symmetric spaces*, Pure Appl. Math., **12**, Academic Press, New York–London, 1962.
- [157] М. М. Дэй, *Нормированные линейные пространства*, ИЛ, М., 1961; пер. с англ.: M. M. Day, *Normed linear spaces*, Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1958.
- [158] J. Duncan, S. A. R. Hosseiniun, “The second dual of a Banach algebra”, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, **84**:3–4 (1979), 309–325.
- [159] N. Grønbaek, B. E. Johnson, G. A. Willis, “Amenability of Banach algebras of compact operators”, *Israel J. Math.*, **87**:1–3 (1994), 289–324.
- [160] C. J. Read, “Commutative, radical amenable Banach algebras”, *Studia Math.*, **140**:3 (2000), 199–212.
- [161] А. И. Штерн, “Критерии слабой и сильной непрерывности представлений топологических групп в банаховых пространствах”, *Матем. сб.*, **193**:9 (2002), 139–156; англ. пер.: A. I. Shtern, “Criteria for weak and strong continuity of representations of topological groups in Banach spaces”, *Sb. Math.*, **193**:9 (2002), 1381–1396.
- [162] R. Eymard, “L’algèbre de Fourier d’un groupe localement compact”, *Bull. Soc. Math. France*, **92** (1964), 181–236.
- [163] V. G. Pestov, “Amenable representations and dynamics of the unit sphere in an infinite-dimensional Hilbert space”, *Geom. Funct. Anal.*, **10**:5 (2000), 1171–1201.
- [164] E. G. Effros, Z.-J. Ruan, *Operator spaces*, London Math. Soc. Monogr. (N.S.), **23**, Clarendon Press, Oxford Univ. Press, New York, 2000.
- [165] N. Spronk, “Operator weak amenability of the Fourier algebra”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **130**:12 (2002), 3609–3617.
- [166] B. E. Forrest, V. Runde, “Amenability and weak amenability of the Fourier algebra”, *Math. Z.*, **250**:4 (2005), 731–744.
- [167] H. G. Dales, F. Ghahramani, A. Ya. Helemskii, “The amenability of measure algebras”, *J. London Math. Soc.* (2), **66**:1 (2002), 213–226.
- [168] G. Corach, J. E. Galé, “On amenability and geometry of spaces of bounded representations”, *J. London Math. Soc.* (2), **59**:1 (1999), 311–329.
- [169] N. Grønbaek, “Amenability of weighted convolution algebras on locally compact groups”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **319**:2 (1990), 765–775.
- [170] M. C. White, “Characters on weighted amenable groups”, *Bull. London Math. Soc.*, **23**:4 (1991), 375–380.
- [171] M. Abel, K. Jarosz, “Small deformations of topological algebras”, *Studia Math.*, **156**:3 (2003), 202–226.
- [172] R. Rochberg, “Deformation of uniform algebras”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **39**:1 (1979), 93–118.
- [173] E. Christensen, “Close operator algebras”, *Deformation theory of algebras and structures and applications* (II Ciocco, 1986), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., **247**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1988, 537–556.
- [174] E. Christensen, E. G. Effros, A. Sinclair, “Completely bounded multilinear maps and C^* -algebraic cohomology”, *Invent. Math.*, **90**:2 (1987), 279–296.
- [175] I. Raeburn, J. L. Taylor, “Hochschild cohomology and perturbations of Banach algebras”, *J. Funct. Anal.*, **25**:3 (1977), 258–266.

- [176] A. M. Sinclair, R. R. Smith, *Hochschild cohomology of von Neumann algebras*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **203**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [177] R. A. J. Howey, “Approximately multiplicative functionals on algebras of smooth functions”, *J. London Math. Soc.* (2), **68**:3 (2003), 739–752.
- [178] M. Cambern, “On isomorphisms with small bound”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **18** (1967), 1062–1066.
- [179] G. V. Wood, “Small isomorphisms between group algebras”, *Glasgow Math. J.*, **33**:1 (1991), 21–28.
- [180] D. R. Pitts, “Perturbations of certain reflexive algebras”, *Pacific J. Math.*, **165**:1 (1994), 161–180.
- [181] M. B. Bekka, P. de la Harpe, A. Valette, *Kazhdan’s property (T)*, <http://perso.univ-rennes1.fr/bachir.bekka/KazhdanTotal.pdf>.
- [182] А. М. Вершик, С. И. Карпушев, “Когомологии групп в унитарных представлениях, окрестность единицы и условно положительно определенные функции”, *Матем. сб.*, **119(161)**:4(12) (1982), 521–533; англ. пер.: A. M. Vershik, S. I. Karpushev, “Cohomology of groups in unitary representations, the neighborhood of the identity, and conditionally positive definite functions”, *Math. USSR Sb.*, **47**:2 (1984), 513–526.
- [183] А. И. Штерн, “Почти периодические функции и представления в локально выпуклых пространствах”, *УМН*, **60**:3 (2005), 97–168; англ. пер.: A. I. Shtern, “Almost periodic functions and representations in locally convex spaces”, *Russian Math. Surveys*, **60**:3 (2005), 489–557.
- [184] A. I. Shtern, “Values of invariant means, left averaging, and criteria for a locally compact group to be amenable as discrete group”, *Russ. J. Math. Phys.*, **10**:2 (2003), 185–198.
- [185] G. W. Mackey, “Borel structure in groups and their duals”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **85**:1 (1957), 134–165.
- [186] Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц, *Линейные операторы. Часть I: Общая теория*, ИЛ, М., 1962; пер. с англ.: N. Dunford, J. T. Schwartz, *Linear operators. Part I. General theory*, Pure Appl. Math., **7**, Interscience Publishers, New York–London, 1958.
- [187] M. Atiyah, “The logarithm of the Dedekind η -function”, *Math. Ann.*, **278**:1–4 (1987), 335–380.
- [188] A. Guichardet, D. Wigner, “Sur la cohomologie réelle des groupes de Lie simples réels”, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4), **11**:2 (1978), 277–292.
- [189] M. Burger, A. Iozzi, “Boundary maps in bounded cohomology”, Appendix to: M. Burger, N. Monod, “Continuous bounded cohomology and applications to rigidity theory”, *Geom. Funct. Anal.*, **12**:2 (2002), 281–292.
- [190] M. Burger, N. Monod, “On and around the bounded cohomology of SL_2 ”, *Rigidity in dynamics and geometry* (Cambridge, 2000), Springer, Berlin, 2002, 19–37.
- [191] M. Burger, N. Monod, “Continuous bounded cohomology and applications to rigidity theory”, *Geom. Funct. Anal.*, **12**:2 (2002), 219–280.
- [192] A. Banyaga, “Sur la structure du groupe des difféomorphismes qui préservent une forme symplectique”, *Comment Math. Helv.*, **53**:2 (1978), 174–227.
- [193] E. Calabi, “On the group of automorphisms of a symplectic manifold”, *Problems in analysis*, Lectures at the Symposium in honor of Salomon Bochner (Princeton Univ., Princeton, NJ, 1969), Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1970, 1–26.
- [194] H. Poincaré, “Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle”, *J. Math. Pures Appl.* (3), **8** (1882), 251–296.
- [195] B. Blackadar, E. Kirchberg, “Generalized inductive limits of finite-dimensional C^* -algebras”, *Math. Ann.*, **307**:3 (1997), 343–380.
- [196] T. Bühler, *Gromov’s geodesic flow*, Diplomarbeit, ETZ, Zürich, 2002.

- [197] Y. Shalom, “Bounded generation and Kazhdan’s property (T)”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **90** (1999), 145–168.
- [198] A. I. Shtern, “Continuity conditions for finite-dimensional representations of some compact totally disconnected groups”, *Adv. Stud. Contemp. Math. (Kyungshang)*, **8**:1 (2004), 13–22.
- [199] G. Willis, “The continuity of derivations from group algebras: factorizable and connected groups”, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, **52**:2 (1992), 185–204.
- [200] А. И. Штерн, “Критерии непрерывности конечномерных представлений связанных локально компактных групп”, *Матем. сб.*, **195**:9 (2004), 145–159; англ. пер.: A. I. Shtern, “Criteria for the continuity of finite-dimensional representations of connected locally compact groups”, *Sb. Math.*, **195**:9 (2004), 1377–1391.
- [201] A. I. Shtern, “Continuity criteria for finite-dimensional representations of compact connected groups”, *Adv. Stud. Contemp. Math. (Kyungshang)*, **6**:2 (2003), 141–156.
- [202] А. И. Штерн, “Критерии непрерывности конечномерных представлений групп”, *Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования*, Наука, М., 2003, 122–124.
- [203] A. I. Shtern, “Continuity conditions for finite-dimensional representations of some compact totally disconnected groups”, *Adv. Stud. Contemp. Math. (Kyungshang)*, **8**:1 (2004), 13–22.
- [204] А. И. Штерн, “Критерий непрерывности конечномерных представлений локально компактных групп”, *Матем. заметки*, **75**:6 (2004), 951–953; англ. пер.: A. I. Shtern, “Continuity criterion for finite-dimensional representations of locally compact groups”, *Math. Notes*, **75**:5–6 (2004), 890–892.
- [205] А. И. Штерн, “Сильная и слабая непрерывность представлений топологически псевдополных групп в локально выпуклых пространствах”, *Матем. сб.*, **197**:3 (2006), 155–176; англ. пер.: A. I. Shtern, “Weak and strong continuity of representations of topologically pseudocomplete groups in locally convex spaces”, *Sb. Math.*, **197**:3 (2006), 453–473.
- [206] N. Nikolov, D. Segal, “Finite index subgroups in profinite groups”, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, **337**:5 (2003), 303–308.
- [207] K. H. Hofmann, S. A. Morris, *The structure of compact groups. A primer for the student—a handbook for the expert*, de Gruyter Stud. Math., **25**, de Gruyter, Berlin, 1998.
- [208] L. G. Brown, “Continuity of actions of groups and semigroups on Banach spaces”, *J. London Math. Soc. (2)*, **62**:1 (2000), 107–116.
- [209] D. Montgomery, L. Zippin, *Topological transformation groups*, Interscience Publishers, New York–London, 1955.
- [210] P. J. Sally, Jr., *Analytic continuation of the irreducible unitary representations of the universal covering group of $SL(2, \mathbb{R})$* , Mem. Amer. Math. Soc., **69**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1967.
- [211] B. L. van der Waerden, “Stetigkeitssätze für halbeinfache Liesche Gruppen”, *Math. Z.*, **36**:1 (1933), 780–786.
- [212] A. I. Shtern, “Van der Waerden continuity theorem for semisimple Lie groups”, *Russ. J. Math. Phys.*, **13**:2 (2006), 210–223.
- [213] A. I. Shtern, “Van der Waerden continuity theorem for the Poincaré group and for some other group extensions”, *Adv. Theoret. Appl. Math.*, **1**:1 (2006), 79–90.
- [214] A. I. Shtern, “Van der Waerden’s continuity theorem for the commutator subgroups of connected Lie groups and Mishchenko’s conjecture”, *Adv. Stud. Contemp. Math. (Kyungshang)*, **13**:2 (2006).
- [215] L. G. Brown, R. G. Douglas, P. A. Fillmore, “Extensions of C^* -algebras and K -homology”, *Ann. of Math. (2)*, **105**:2 (1977), 265–324.

- [216] A. I. Shtern, “Continuity of Banach representations in terms of point variations”, *Russ. J. Math. Phys.*, **9**:2 (2002), 250–252.
- [217] R. A. Kunze, E. M. Stein, “Uniformly bounded representations and harmonic analysis on the 2×2 real unimodular group”, *Amer. J. Math.*, **82**:1 (1960), 1–62.
- [218] S. Teleman, “Sur la représentation linéaire des groupes topologiques”, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (3), **74** (1957), 319–339.
- [219] A. I. Shtern, “Compact semitopological semigroups and reflexive representability of topological groups”, *Russ. J. Math. Phys.*, **2**:1 (1994), 131–132.
- [220] M. Megrelishvili, “Generalized Heisenberg groups and Shtern’s question”, *Georgian Math. J.*, **11**:4 (2004), 775–782.
- [221] E. T. Shavgulidze, “Some properties of quasi-invariant measures on groups of diffeomorphisms of the circle”, *Russ. J. Math. Phys.*, **7**:4 (2000), 464–472.
- [222] E. T. Shavgulidze, “Properties of the convolution operation for quasi-invariant measures on groups of diffeomorphisms of a circle”, *Russ. J. Math. Phys.*, **8**:4 (2001), 495–498.
- [223] E. Hotzel, “Right projective semigroups with 0”, *J. Pure Appl. Algebra*, **170**:1 (2002), 35–66.
- [224] N. Louvet, “A propos d’un théorème de Vershik et Karpushev”, *Enseign. Math.* (2), **47**:3–4 (2001), 287–314.
- [225] K. H. Hofmann, W. A. F. Ruppert, *Lie groups and subsemigroups with surjective exponential function*, Mem. Amer. Math. Soc., **130**:618, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

А. И. Штерн (A. I. Shtern)

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: ashtern@member.ams.org

Поступила в редакцию

20.12.2005 и 19.06.2006