Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Я. Г. Мостовой, О пространствах вещественных алгебраических циклов на $\mathbb{CP}^n$,
УМН, 1998, том 53, выпуск 1, 221–222

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm27>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 14:55:17

О ПРОСТРАНСТВАХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЦИКЛОВ НА $\mathbb{CP}^n$

Я. Мостовой

В своей диссертации [1] Т. К. Лэм применил подход Лоусона (см. [2]) к изучению топологии групп вещественных алгебраических циклов. Под вещественным подмногообразием здесь понимается подмногообразие $\mathbb{CP}^n$, идеал которого инвариантен относительно комплексного сопряжения; соответственно определяется понятие вещественного цикла. Если $X \subset \mathbb{CP}^n$ – вещественное подмногообразие, топологическая группа вещественных циклов $\mathcal{RC}_p(X)$ определяется как подгруппа группы всех p -мерных циклов на X . Факторгруппу $\mathcal{RC}_p(X)$ по подгруппе циклов вида $c + t(c)$ (здесь и далее t обозначает комплексное сопряжение) назовем группой действительных циклов по модулю 2 и обозначим ее $\mathcal{E}_p(X)$. Для краткости мы пишем $\mathcal{RC}_p(n)$ и $\mathcal{E}_p(n)$ вместо $\mathcal{RC}_p(\mathbb{CP}^n)$ и $\mathcal{E}_p(\mathbb{CP}^n)$ соответственно.

Пусть $\mathbb{P}X$ – проективный конус над X . Операция взятия проективного конуса задает непрерывные гомоморфизмы “надстройки” $\mathcal{RC}_p(X) \rightarrow \mathcal{RC}_{p+1}(\mathbb{P}X)$ и $\mathcal{E}_p(X) \rightarrow \mathcal{E}_{p+1}(\mathbb{P}X)$ (см. [2]). Следующие две теоремы доказаны в [1].

ТЕОРЕМА 1. При всех p гомоморфизмы “надстройки”

$$\mathcal{RC}_p(X) \rightarrow \mathcal{RC}_{p+1}(\mathbb{P}X) \quad \text{и} \quad \mathcal{E}_p(X) \rightarrow \mathcal{E}_{p+1}(\mathbb{P}X)$$

являются гомотопическими эквивалентностями.

ТЕОРЕМА 2.

$$\pi_k(\mathcal{E}_p(n)) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2 & \text{при } 0 \leq k \leq n-p, \\ 0 & \text{при } n-p < k. \end{cases}$$

В нашей работе описывается гомотопический тип группы $\mathcal{RC}_p(n)$. Заметим, что он определяется гомотопическими группами $\pi_*(\mathcal{RC}_p(n))$, так как инварианты Постникова абелевой группы равны 0. В силу теоремы 1 $\mathcal{RC}_p(n) \simeq \mathcal{RC}_0(n-p)$, поэтому все результаты мы будем формулировать для пространств 0-циклов.

ТЕОРЕМА 3. Свободная часть группы $\pi_k(\mathcal{RC}_0(n))$ изоморфна $\mathbb{Z}$, когда k делится на 4 и $k \leq 2n$, и равна 0 в противном случае. Кручение является прямой суммой $a(k)$ экземпляров $\mathbb{Z}/2$, где

$$a(k) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{k+3}{4} \right\rfloor & \text{при } 0 \leq k \leq n, \\ \left\lfloor \frac{2n-k+2}{4} \right\rfloor & \text{при } n < k \leq 2n, \text{ } n \text{ четным,} \\ \left\lfloor \frac{2n-k}{4} \right\rfloor + \frac{1}{2}(1 - (-1)^k) & \text{при } n < k \leq 2n, \text{ } n \text{ нечетным,} \\ 0 & \text{в прочих случаях;} \end{cases}$$

здесь $\lfloor \cdot \rfloor$ обозначает целую часть числа.

Рассмотрим отображение $\mathcal{RC}_0(n) \hookrightarrow \mathcal{RC}_0(n+1)$, индуцированное вложением $\mathbb{CP}^n \hookrightarrow \mathbb{CP}^{n+1}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Отображение $\pi_k(\mathcal{RC}_0(n)) \rightarrow \pi_k(\mathcal{RC}_0(n+1))$ – изоморфизм при $k \leq n$.

Определим пространство $\mathcal{RC}_0(\infty)$ как индуктивный предел последовательности вложений $\mathcal{RC}_0(n) \hookrightarrow \mathcal{RC}_0(n+1)$ при $n \rightarrow \infty$. В качестве следствия теоремы 3 и предложения 1 получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Свободная часть группы $\pi_k(\mathcal{RC}_0(\infty))$ изоморфна $\mathbb{Z}$, когда k делится на 4, и равна 0 в противном случае; кручение является прямой суммой $\lfloor \frac{k+3}{4} \rfloor$ экземпляров $\mathbb{Z}/2$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Эдинбургского Университета и CVCP (Committee of Vice-Chancellors and Principals of the Universities of the United Kingdom).

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 3. Пусть $Y \subset X$ – (конечные) симплициальные пространства. Обозначим через $AG(X)$ свободную топологическую абелеву группу, порожденную точками X , через $AG(X; 2)$ – топологическое векторное пространство над $\mathbb{Z}/2$, порожденное точками X , и через $AG(X, Y; 2)$ – факторгруппу $AG(X; 2)$ по подгруппе $AG(Y; 2)$. (Примеры: $AG(\mathbb{CP}^n)$ – группа 0-мерных циклов на $\mathbb{CP}^n$, $AG(\mathbb{RP}^n; 2)$ совпадает с группой $\mathcal{E}_0(n)$.) Согласно теореме Дольда–Тома [3], $\pi_*(AG(X)) = H_*(X)$, $\pi_*(AG(X; 2)) = H_*(X, \mathbb{Z}/2)$ и $\pi_*(AG(X, Y; 2)) = H_*(X, Y, \mathbb{Z}/2)$.

Сформулируем без доказательства некоторые результаты о гомологиях факторпространства $\mathbb{CP}^n/t$.

ЛЕММА 1. $H_k(\mathbb{CP}^n/t, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$, если k делится на 4 и $k \leq 2n$, и 0 в остальных случаях. Ранг $\tilde{H}_k(\mathbb{CP}^n/t, \mathbb{Z}/2)$ равен $[\frac{1}{2}k] + 1 - (k - n)$ если $n + 1 < k \leq 2n$, $[\frac{1}{2}k] - 1$, если $1 < k \leq n + 1$, и 0 в остальных случаях.

ЛЕММА 2. Естественное вложение $\mathbb{RP}^n \rightarrow \mathbb{CP}^n/t$ индуцирует нулевое отображение в (приведенных) гомологиях с коэффициентами в $\mathbb{Z}/2$.

Группу 0-мерных циклов вида $c + t(c)$ на $\mathbb{CP}^n$ можно отождествить с $AG(\mathbb{CP}^n/t)$. Таким образом, имеем точную последовательность

$$0 \rightarrow AG(\mathbb{CP}^n/t) \hookrightarrow \mathcal{RC}_0(n) \rightarrow \mathcal{E}_0(n) = AG(\mathbb{RP}^n; 2) \rightarrow 0,$$

являющуюся главным расслоением. (Тот факт, что все рассматриваемые здесь действия групп – главные расслоения, следует из теоремы Лима-Фильо [4].) Поскольку $\pi_*(\mathcal{E}_0(n))$ состоит целиком из кручения, свободные части $\pi_*(\mathcal{RC}_0(n))$ и $\pi_*(AG(\mathbb{CP}^n/t)) = H_*(\mathbb{CP}^n/t)$ совпадают.

Пусть $S(n)$ – подгруппа $AG(\mathbb{CP}^n)$, состоящая из таких циклов c , что $t(c) = -c$. Рассмотрим точную последовательность (главное расслоение)

$$0 \rightarrow \mathcal{RC}_0(n) \times S(n) \hookrightarrow AG(\mathbb{CP}^n) \rightarrow AG(\mathbb{CP}^n/t, \mathbb{RP}^n; 2) \rightarrow 0.$$

Из гомотопической последовательности этого расслоения видно, что кручение в $\pi_k(\mathcal{RC}_0(n))$ является прямой суммой нескольких экземпляров $\mathbb{Z}/2$ при любом k .

Чтобы найти ранги кручения, рассмотрим факторгруппу $\mathcal{RC}_0(n)$ по подгруппе циклов с четными коэффициентами. Мы обозначим ее $\mathcal{RC}_0(n) \otimes \mathbb{Z}/2$. Определим отображение

$$I: \mathcal{RC}_0(n) \otimes \mathbb{Z}/2 \rightarrow AG(\mathbb{CP}^n/t, \mathbb{RP}^n; 2) \times AG(\mathbb{RP}^n; 2)$$

так: представим цикл $a \in \mathcal{RC}_0(n) \otimes \mathbb{Z}/2$ в виде $a = r + c + t(c)$, где r лежит в $\mathbb{RP}^n$, а c не пересекается с $\mathbb{RP}^n$. Тогда r можно рассматривать как точку в $AG(\mathbb{RP}^n; 2)$, а c – как точку в $AG(\mathbb{CP}^n/t, \mathbb{RP}^n; 2)$. Легко видеть [1], что I – гомеоморфизм, и, следовательно, $\pi_k(\mathcal{RC}_0(n) \otimes \mathbb{Z}/2) = H_k(\mathbb{CP}^n/t, \mathbb{RP}^n, \mathbb{Z}/2) \oplus H_k(\mathbb{RP}^n, \mathbb{Z}/2)$.

Теперь из точной последовательности расслоения $\mathcal{RC}_0(n) \rightarrow \mathcal{RC}_0(n) \otimes \mathbb{Z}/2$ со слоем $\mathcal{RC}_0(n)$ с помощью несложных вычислений можно найти выражения для рангов кручения в $\pi_k(\mathcal{RC}_0(n))$.

Предложение 1 мы здесь доказывать не будем. Заметим лишь, что оно вытекает из следующего факта.

ЛЕММА 3. Пара $(\mathbb{CP}^{n+1}/t, \mathbb{CP}^n/t)$ n -связна.

Автор благодарит Б. Лоусона, приславшего диссертацию Т. К. Лэма, и Э. Рииса за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Lam T. K. // Real Algebraic Cycles and Homotopy Theory. Ph.D. thesis, SUNY, Stony Brook, 1990. [2] Lawson H. B. // Ann. of Math. 1989. V. 129. P. 253–291. [3] Dold A., Thom R. // Ann. of Math. 1958. V. 67. № 2. P. 239–281. [4] Lima-Filho P. C. // Trans. Amer. Math. Soc. 1993. V. 340. P. 127–147.

Принято редколлегией
24.12.1997