Общероссийский математический портал

С. А. Теляковский, О рядах с монотонными членами, *УМН*, 2000, том 55, выпуск 2, 127–128

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm271>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 13:28:44

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

О РЯДАХ С МОНОТОННЫМИ ЧЛЕНАМИ

С. А. ТЕЛЯКОВСКИЙ

Известно (см. [1; с. 291]), что для каждого сходящегося ряда с положительными членами $\sum a_n$ существует монотонная неограниченно возрастающая последовательность $\{d_n\}$ такая, что сходится ряд $\sum a_n d_n$. Согласно теореме Дини можно взять, например,

$$d_n := \left(\sum_{k=n}^{\infty} a_k \right)^{-1/2}.$$

Для случая, когда последовательность $\{a_n\}$ стремится к нулю монотонно, это утверждение можно дополнить.

ТЕОРЕМА 1. Пусть числа a_n монотонно убывают и сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Тогда существует монотонная неограниченно возрастающая последовательность положительных чисел $\{c_n\}$ такая, что последовательность $\{a_n c_n\}$ монотонно убывает и сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n.$$

При изучении последовательностей из пространств Лоренца [2] понадобилось следующее несколько более общее предложение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\{a_n\}$ – последовательность монотонно убывающих к нулю чисел, а $\{w_n\}$ – произвольная последовательность положительных чисел. Если сходится ряд

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n w_n,$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-01210).

то существует монотонная неограниченно возрастающая последовательность $\{c_n\}$ такая, что последовательность $\{a_n c_n\}$ монотонно убывает и сходится ряд

$$(2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n w_n.$$

Доказательство. Рассмотрим монотонную неограниченно возрастающую последовательность $\{d_n\}$, для которой сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n d_n w_n.$$

Положим $c_1 := d_1$ и для $n \geq 1$

$$c_{n+1} := \min \left(d_n, \frac{a_n}{a_{n+1}} c_n \right).$$

Тогда

$$(3) \quad c_{n+1} \leq d_n \leq d_{n+1}$$

и

$$c_{n+1} \leq \frac{a_n}{a_{n+1}} c_n,$$

откуда

$$a_{n+1} c_{n+1} \leq a_n c_n.$$

Из (3) следует сходимость ряда (2). Поэтому остается убедиться только в неограниченном монотонном возрастании последовательности $\{c_n\}$.

Если $c_{n+1} = d_n$, то $c_n \leq c_{n+1}$, так как $c_n \leq d_n$. Если же

$$c_{n+1} = \frac{a_n}{a_{n+1}} c_n,$$

то неравенство $c_{n+1} \geq c_n$ следует из монотонного убывания последовательности $\{a_n\}$. Итак, последовательность $\{c_n\}$ монотонно возрастает.

Если чисел n , для которых $c_{n+1} = d_n$, бесконечно много, то неограниченность последовательности $\{c_n\}$ очевидна.

А если для всех n , начиная с некоторого m ,

$$c_{n+1} = \frac{a_n}{a_{n+1}} c_n,$$

то для $n > m$

$$c_{n+1} = \frac{a_n}{a_{n+1}} \frac{a_{n-1}}{a_n} \dots \frac{a_m}{a_{m+1}} c_m = \frac{a_m}{a_{n+1}} c_m,$$

и неограниченность последовательности $\{c_n\}$ вытекает из стремления чисел a_n к нулю.

Теорема доказана.

Заметим, что ряд (2) сходится медленнее, чем ряд (1), так как для всех m

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n c_n w_n \geq c_m \sum_{n=m}^{\infty} a_n w_n.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. II. М.: Физматгиз, 1969. [2] Алимов А. Р. Теорема Ки Фана о доминировании в бесконечномерных пространствах последовательностей (в печати).