Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. А. Айгунов, О максимально возможной скорости роста решений задачи Коши и нормированных собственных функций одного класса нелинейных операторов типа Штурма–Лиувилля с непрерывной положительной весовой функцией, *УМН*, 2000, том 55, выпуск 2, 129–130

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm272>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 16:44:12

**О МАКСИМАЛЬНО ВОЗМОЖНОЙ СКОРОСТИ РОСТА
РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ И НОРМИРОВАННЫХ
СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОГО КЛАССА
НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ ТИПА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ
С НЕПРЕРЫВНОЙ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ВЕСОВОЙ ФУНКЦИЕЙ**

Г. А. Айгунов

Пусть $0 < m < M < \infty$ – фиксированные числа. Обозначим через $C_{[0,1]}^+$ множество всех непрерывных функций $\rho(x)$ на сегменте $[0, 1]$, удовлетворяющих условию $m \leq \rho(x) \leq M$. На множестве $C_{[0,1]}^+$ рассмотрим обычную C -метрику. В дальнейшем такие функции будем называть весовыми функциями.

Пусть $p > 1$, тогда по определению будем полагать $(z)_p \equiv |z|^{p-1} \operatorname{sign} z = |z|^{p-2} z$. Рассмотрим задачу Коши

$$(1) \quad \begin{aligned} -\frac{d}{dx}(y'(x))_p &= \lambda \rho(x)(y(x))_p, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \lambda > 0, \\ y(x_0) &= a_0, \quad y'(x_0) = b_0, \quad a_0^2 + b_0^2 = 1, \quad x_0 \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Решение задачи (1) существует, единственно и непрерывно зависит от начальных данных, параметра λ и весовой функции $\rho(x)$, см. [1].

Представляется целесообразным рассмотреть спектральную задачу, которая возникает в ряде задач, связанных, прежде всего, с проблемами колебаний неоднородной среды, а также с вопросами приближения гладких классов функций:

$$(2) \quad \begin{aligned} -\frac{d}{dx}(y'(x))_p &= \lambda \rho(x)(y(x))_p \quad (0 < x < 1), \\ y(0) &= y(1) = 0, \quad \int_0^1 \rho(x) y^2(x) dx = 1. \end{aligned}$$

Л. А. Люстерник [2] показал, что штурмовская теория собственных значений может быть в большей мере перенесена на спектральную задачу (2). А. Элбертом [1] было выяснено, что спектр задачи (2) дискретен, состоит из простых собственных чисел и асимптотически $\lambda_k \sim C_p k^p$ при $k \rightarrow \infty$ ($C_p > 0$).

Обозначим через $y_k(x)$ собственную функцию, соответствующую собственному числу λ_k ($k = 1, 2, \dots$). Условимся говорить, что совокупность собственных функций $y_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots$) ассоциирована с весовой функцией $\rho(x)$ спектральной задачи (2).

В данной работе исследовано асимптотическое поведение не только нормированных собственных функций нелинейной краевой задачи типа Штурма–Лиувилля, но и решений задачи Коши в зависимости от параметра λ . Причем исследование асимптотического поведения собственных функций нелинейной краевой задачи типа Штурма–Лиувилля проводится, исходя из асимптотического поведения решения задачи Коши. Доказанные теоремы дают неулучшаемые оценки для норм собственных функций в классе весовых функций $\rho(x) \in C_{[0,1]}^+$.

Пусть $\alpha(\lambda) > 0$ непрерывная на $(0, \infty)$ функция, стремящаяся к нулю при $\lambda \rightarrow \infty$, а $\Phi_\lambda(\rho)$ функционал, определенный соотношением

$$\Phi_\lambda(\rho) \equiv \frac{\|y(x, \lambda, \rho)\|_{C_{[0,1]}}}{\left(\int_0^1 \rho(x) y^2(x, \lambda, \rho) dx\right)^{1/2}}.$$

ТЕОРЕМА 1. 1) Для любой весовой функции $\rho(x) \in C_{[0,1]}^+$ справедливо равенство

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{-1/(2p)} \Phi_\lambda(\rho) = 0.$$

2) В любом шаре из $C_{[0,1]}^+$ существует весовая функция $\rho_0(x)$ такая, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \alpha^{-1}(\lambda) \lambda^{-1/(2p)} \Phi_\lambda(\rho_0) = \infty.$$

Ввиду того, что $\alpha(\lambda)$ может быть выбрана произвольно, теорема 1 устанавливает точные оценки (асимптотические) для $\Phi_\lambda(\rho)$ в классе весовых функций из $C_{[0,1]}^+$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть функция $\rho(x) \in C_{[0,1]}^+$ является функцией ограниченной вариации. Тогда функционал $\Phi_\lambda(\rho)$ равномерно по всем $\lambda > 0$ ограничен.

Рассмотрим спектральную задачу (2). Справедлива

ТЕОРЕМА 3. Имеют место следующие утверждения.

- 1) Пусть $\rho(x) \in C_{[0,1]}^+$, тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n^{-1/(2p)} \|y_n(x, \rho)\|_{C_{[0,1]}} = 0$.
- 2) Пусть $\rho(x) \in C_{[0,1]}^+$, тогда в любой C -окрестности $\rho(x)$ существует весовая функция $\rho_0(x, \alpha) \in C_{[0,1]}^+ \cap C_{[0,1]}^\infty$ такая, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \alpha^{-1}(\lambda_n) \lambda_n^{-1/(2p)} \|y_n(x, \rho)\|_{C_{[0,1]}} = \infty.$$

Из теоремы 3 следует, что в классе бесконечно дифференцируемых на $[0, 1]$ весовых функций максимально возможная скорость роста собственных функций по спектральному параметру λ такая же, как и во всем объемлющем классе $C_{[0,1]}^+$. Поэтому возникает вопрос о зависимости асимптотического поведения собственных функций от гладкости весовой функции $\rho(x)$ в некоторой точке, в частности, в точке $x = 1$.

Заметим, что вместо точки $x = 1$ можно взять любую точку $x_0 \in [0, 1]$, точка $x = 1$ рассматривается лишь для определенности выкладок при доказательстве теоремы. Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\rho(x) \in C_{[0,1]}^+$, r — вещественное число. Тогда имеют место следующие утверждения.

- 1) В любой C -окрестности весовой функции $\rho(x)$ существует весовая функция $\rho_0(x) \equiv \rho_0(x, \alpha, r) \in C_{[0,1]}^+ \cap C_{[0,1]}^\infty$ такая, что $\rho'_0(1) = r$ и

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \alpha^{-1}(\lambda_n) \lambda_n^{-1/(2p)} \|y_n(x, \rho_0)\|_{C_{[0,1]}} = \infty.$$

- 2) В любой C -окрестности весовой функции $\rho(x)$ существует весовая функция $\rho_0(x, \alpha) \in C_{[0,1]}^+ \cap C_{[0,1]}^\infty$ такая, что $\rho_0(x)$ не дифференцируема в точке $x = 1$ и

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \alpha^{-1}(\lambda_n) \lambda_n^{-1/(2p)} \|y_n(x, \rho_0)\|_{C_{[0,1]}} = \infty.$$

СЛЕДСТВИЕ. Порядок роста нормированных собственных функций спектральной задачи (2) в классе весовых функций, имеющих первую производную, в метрике C такой же, как и во всем объемлющем классе $C_{[0,1]}^+$.

Таким образом, нам удалось выявить наиболее узкий класс весовых функций, для которых возможен максимально быстрый рост нормированных собственных функций.

Более того, из теорем 3, 4 следует, что нарушение непрерывности первой производной в одной точке влечет за собой нарушение равномерных оценок нормированных собственных функций и при этом достигается максимально возможная скорость их роста, как и в классе $C_{[0,1]}^+$.

В заключение заметим, что аналогичные теоремы рассмотрены в работах [3], [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Elbert A. // Colloq. Math. Soc. János Bolyai. 1981. V. 30. P. 153–180. [2] Люстерник Л. А. // Докл. АН СССР. 1937. Т. 15. С. 235–238. [3] Гехтман М. М., Загиров Ю. М. // УМН. 1992. Т. 47. № 3. С. 157–158. [4] Айгунов Г. А. // УМН. 1997. Т. 52. № 6. С. 147–148.