Общероссийский математический портал

С. А. Богатый, Компактная однородность универсального метрического пространства Урысона, *УМН*, 2000, том 55, выпуск 2, 131–132

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm273>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 12:31:19

КОМПАКТНАЯ ОДНОРОДНОСТЬ УНИВЕРСАЛЬНОГО МЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА УРЫСОНА

С. А. БОГАТЫЙ

В 1998 году отмечался 100-летний юбилей П. С. Урысона. Это возродило интерес к его оригинальным работам. В одной из своих последних работ П. С. Урысон построил и изучил универсальное метрическое пространство (U, ρ) . Как отмечает А. М. Вершик: “Эта работа не получила широкой известности, хотя того заслуживает”. П. С. Урысон показал, что *существует полное сепарабельное метрическое пространство U , обладающее свойствами:*

- (1) $(U, \mathcal{F})$ *всякое сепарабельное метрическое пространство может быть изометрично отображено в U ;*
- (2) $(H, \mathcal{F})$ *всякая изометрия конечного подмножества пространства U может быть продолжена до изометрии всего пространства U .*

П. С. Урысон показал также, что свойства (1) и (2) *определяют пространство U с точностью до изометрии однозначно*. Хотя свойства (1) и (2) независимы, они не образуют “оптимальное” описание пространства U – ни с точки зрения минимальности условий для единственности, ни с точки зрения максимальности свойств пространства.

Будем говорить, что метрическое пространство Y является (слабым) абсолютным метрическим экстензором для класса метрических пространств $\mathcal{H}$ ($Y \in (W)AME(\mathcal{H})$), если для всякого пространства $X \in \mathcal{H}$ и всякой изометрии $f: A \rightarrow Y$, заданной на (замкнутом) подмножестве $A \subseteq X$, существует такая изометрия $F: X \rightarrow Y$, что $F|_A = f$. Несложно убедиться, что фактически Урысон доказал следующую теорему единственности.

ТЕОРЕМА 1. *Если Y – полное сепарабельное метрическое пространство и $Y \in AME(\mathcal{F})$, то Y изометрично пространству Урысона U .*

В доказательстве теоремы единственности П. С. Урысон пользуется свойством $(H, \mathcal{F})$, однако как в оригинальной работе, так и у А. М. Вершика, в формулировке требуется более слабое свойство однородности. Заполнению указанного пробела служит

ТЕОРЕМА 2. *Если метрическое пространство Y обладает свойством $(U, \mathcal{F})$ и для любых конечных изометричных подмножеств $A, B \subset Y$ существует такая изометрия (не обязательно на) $H: Y \rightarrow Y$, что $H(A) = B$, то $Y \in AME(\mathcal{F})$.*

П. С. Урысон ставит вопросы: “Не обладает ли пространство U более сильным свойством однородности? Отрицательный ответ на этот вопрос до некоторой степени дается следующим ... Остается открытым вопрос: нельзя ли любые два конгруэнтных счетных множества в U перевести друг в друга изометрическим отображением пространства U на себя?”

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *В пространстве U существуют такие два счетных конгруэнтных подмножества A и B , что для всякого гомеоморфизма на $F: U \rightarrow U$ $F(A) \setminus B \neq \emptyset$.*

Положительный ответ на первый вопрос Урысона дает

ТЕОРЕМА 3. *Для всякого компактного подмножества $A \subset U$ и всякой изометрии $f: A \hookrightarrow U$ существует такая изометрия на $F: U \rightarrow U$, что $F|_A = f$.*

Доказательство получается повторением рассуждений Урысона с заменой в его доказательстве ссылки на теорему 1 ссылкой на следующую лемму.

ЛЕММА. *Для всякого вполне ограниченного метрического пространства X , всякой его точки $a \in X$ и всякой изометрии $f: X \setminus a \hookrightarrow U$ существует такая изометрия $F: X \hookrightarrow U$, что $F|_{X \setminus a} = f$.*

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 97-01-00357) и INTAS (грант № 96-0712).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varepsilon = \rho(a, X \setminus a) > 0$ и $K_\delta \subset X \setminus a$ — некоторая конечная δ -сеть для $\delta \leq \varepsilon/2$. Вложим метрическое пространство $K_\delta \cup a$ (с индуцированной метрикой) в U ; можно считать, что это вложение $f_\delta: K_\delta \cup a \rightarrow U$ является продолжением вложения $f|_{K_\delta}$.

Предположим, что для всех $k \leq n$ уже построены такие изометрии $f_{\delta/2^k}: K_{\delta/2^k} \cup a \rightarrow U$, что $f_{\delta/2^k}|_{K_{\delta/2^k}} = f|_{K_{\delta/2^k}}$ и $\rho(f_{\delta/2^k}(a), f_{\delta/2^{k-1}}(a)) = \delta/2^{k-2}$. Пусть теперь $K_{\delta/2^{n+1}}$ — такая конечная $\delta/2^{n+1}$ -сеть, что $K_{\delta/2^n} \subseteq K_{\delta/2^{n+1}}$. На множестве $K_{\delta/2^{n+1}} \cup a \cup f_{\delta/2^n}(a)$ определим метрику. На $K_{\delta/2^{n+1}} \cup a$ метрика индуцируется из X ; на $K_{\delta/2^{n+1}} \cup f_{\delta/2^n}(a)$ — из U ; $\rho(a, f_{\delta/2^n}(a)) = \delta/2^{n-1}$. Вложим метрическое пространство $K_{\delta/2^{n+1}} \cup a \cup f_{\delta/2^n}(a)$ в U ; для вложения $f_{\delta/2^{n+1}}$ можно считать, что $f_{\delta/2^{n+1}}|_{K_{\delta/2^{n+1}}} = f|_{K_{\delta/2^{n+1}}}$ и $f_{\delta/2^{n+1}}(f_{\delta/2^n}(a)) = f_{\delta/2^n}(a)$. Предельная точка последовательности Коши $\{f_{\delta/2^n}(a)\}$ и является искомой точкой $F(a)$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для сепарабельного метрического пространства Y следующие условия эквивалентны:

- (1) Y изометрично U ;
- (2) Y полно и $Y \in \text{AME}(\mathcal{F})$;
- (3) $Y \in \text{AME}(\mathcal{C})$, где $\mathcal{C}$ означает класс всех метрических компактных пространств.

СЛЕДСТВИЕ 2. Для всякого компактного подмножества $A \subset U$ диаметра d существует такое топологическое вложение гильбертова куба $F: Q \rightarrow U$, что $A \subseteq F(Q)$ и $\text{diam } F(Q) = d$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вложим компакт A в гильбертов куб Q . Согласно теореме Хаусдорфа метрику (индуцированную из U) с A можно продолжить до метрики на Q . При этом можно считать, что $\text{diam } Q = \text{diam } A$. Согласно теореме Урысона ($U_{\mathcal{F}}$) гильбертов куб в новой метрике изометрично вкладывается в U . Согласно теореме 3 можно при этом предполагать, что A как подмножество Q отображается на A как подмножество U тождественно.

СЛЕДСТВИЕ 3. Для всякого бикompактного подмножества $A \subset X$ вполне регулярного пространства X и всякого непрерывного отображения $f: A \rightarrow U$ существует непрерывное продолжение $F: X \rightarrow U$.

Урысон доказал, что пространство U линейно связно и локально линейно связно. Согласно теореме Куратовского–Дугунджи из следствия 3 вытекает, что пространство Урысона U связно и локально связно во всех размерностях. При этом из возможности продолжать без увеличения диаметра вытекает даже, что всякий шар (как открытый, так и замкнутый) в U всякого положительного радиуса связан во всех размерностях.

Из теоремы 3 легко вывести, что пространство Урысона U удовлетворяет свойству дизъюнктивности дисков (DDP): Для любого компакта $X \subset U$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такой гомеоморфизм на $H: U \rightarrow U$, что $\rho(a, H(a)) = \varepsilon$ для всякой точки $a \in U$ и $X \cap H(X) = \emptyset$. Это показывает, что, вероятно, пространство U гомеоморфно гильбертову пространству ℓ_2 . Из следствия 3 легко получить, что пространство U является абсолютным экстензором для класса локально компактных паракомпактных пространств, однако вопрос о возможности продолжения изометрии на U с (замкнутого) локально компактного подмножества открыт. Из теоремы 3 вытекает также, что группа изометрий $\text{Iso}(U)$ пространства Урысона U содержит свободную группу от двух (а значит, и от счетного множества) образующих.

Автору приятно выразить свою благодарность Н. Бродскому и Н. Фоменко за ценные беседы.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: bogaty@mech.math.msu.su

Принято редколлегией
26.01.2000