Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Болотов, Гиперслоения неотрицательной кривизны Риччи, *УМН*, 2000, том 55, выпуск 2, 133–134

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm274>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 13:34:59

ГИПЕРСЛОЕНИЯ НЕОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ РИЧЧИ

Д. В. Болотов

В данной работе мы предполагаем заданными многообразие и слоение на нем класса C^∞ . Гиперслоением мы будем называть слоение коразмерности 1. Гомологии и когомологии везде подразумеваются сингулярными с действительными коэффициентами, если иное не оговорено специально.

Если рассматривать трехмерную сферу со стандартной метрикой постоянной кривизны, то слоение Рибба дает пример слоения, слои которого имеют неотрицательную секционную кривизну. В [1] ставится вопрос: существует ли на нечетномерной сфере размерности больше 3 гиперслоение со слоями неотрицательной секционной кривизны для какой-либо метрики на ней? Отметим, что на четномерной сфере не существует гиперслоения без особенностей. Препятствием является ненулевая эйлерова характеристика. Цель данной работы – доказать следующее утверждение.

ТЕОРЕМА А. *Пусть на компактном многообразии M^{2n+1} задана риманова метрика положительной секционной кривизны. Тогда на нем не существует гиперслоения почти неотрицательной кривизны Риччи.*

(Многообразие имеет почти неотрицательную кривизну Риччи, если оно имеет неотрицательную кривизну Риччи вне некоторого компактного множества.)

Напомним некоторые результаты, существенно применяемые при доказательстве.

ТЕОРЕМА 1 (Чигер, Громолл, [1]). *Пусть M – компактное многообразие неотрицательной кривизны Риччи, тогда существует компактное односвязное $(n - k)$ -мерное многообразие M_0 ($0 \leq k \leq n = \dim M$) такое, что универсальная накрывающая $\tilde{M}$ изометрична риманову произведению $M_0 \times \mathbb{R}^k$ многообразия M_0 и евклидова фактора $\mathbb{R}^k$.*

ТЕОРЕМА 2 [2]. *Пусть M – полное некомпактное многообразие почти неотрицательной кривизны Риччи. Тогда M имеет конечное число концов.*

ТЕОРЕМА (о стабильности, [3]). *Пусть F – трансверсально ориентируемое гиперслоение класса C^1 на компактном многообразии с компактным слоем L таким, что $H^1(L, \mathbb{R}) = 0$, где $H^1(L, \mathbb{R})$ – первая группа когомологий с коэффициентами. Тогда все слои F диффеоморфны L и слоение F есть расслоение над окружностью или отрезком со слоем L .*

ТЕОРЕМА (о локальной стабильности, [3]). *Пусть F – слоение коразмерности k и L – компактный слой F , тогда выполнено одно из следующих утверждений:*

- 1) линейная голономия L тривиальна;
- 2) группа $H^1(L; \mathbb{R})$ нетривиальна;
- 3) голономия слоя L тривиальна и L имеет трубчатую окрестность, в которой слоение является тривиальным расслоением.

ТЕОРЕМА 3 ([4], слабый вариант). *Если $H_1(M, \mathbb{R}) = 0$ и F имеет полиномиальный рост слоев, то всякое минимальное множество F есть компактный слой.*

Полиномиальный рост слоев означает, что на каждом слое объем шара в каждой фиксированной точке полиномиально зависит от радиуса.

Минимальное множество – это замкнутое насыщенное (т.е. состоящее из слоев) множество, не содержащее в себе такое же.

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ А. Доказательство проведем от противного. Предположим, что существует гиперслоение $\mathcal{F}$ на M^{2n+1} , удовлетворяющее условию теоремы. Заметим, что фундаментальная группа M^{2n+1} конечна [5]. Перейдя к универсальному накрытию, можно считать, что она – тривиальна. Поскольку кривизна Риччи слоев почти неотрицательна, слои имеют полиномиальный рост [5]. Из теоремы 3 следует, что $\mathcal{F}$ имеет компактный слой. Если этот слой – предельный для некомпактного, то он имеет неотрицательную кривизну Риччи. Согласно теореме 1, надо рассмотреть три случая: 1) $k = 0$, 2) $k \geq 2$, 3) $k = 1$.

Случай $k = 0$. В этом случае фундаментальная группа слоев – конечна, поэтому из теоремы о стабильности следует, что слоение должно быть расслоением над окружностью (не над отрезком, так как M^{2n+1} – многообразие без края). Однако, если рассмотреть гомотопическую последовательность расслоения, видно, что фундаментальная группа окружности должна быть нулевой, что невозможно.

Случай $k \geq 2$. В этом случае в каждой точке x слоя L существовало бы 3-мерное подпространство касательного пространства $T_x L$ такое, что секционная кривизна слоя K_L была бы тождественным нулем на нем. Тогда можно было бы рассмотреть ограничение $\bar{\alpha}$ второй квадратичной формы α на это подпространство. Так как это подпространство трехмерное, то существовали бы главные кривизны λ_1 и λ_2 формы $\bar{\alpha}$ такие, что $\lambda_1 \lambda_2 \geq 0$. Пусть e_1 и e_2 – единичные векторы соответствующих главных направлений. Тогда по теореме Гаусса

$$K_e(e_1 \wedge e_2) = \lambda_1 \lambda_2,$$

где K_e – внешняя кривизна слоя, равная разности секционных кривизн слоя и объемлющего пространства.

В левой части – выражение меньше нуля по условию и выбору площадки, а в правой части – больше или равное нулю в соответствии со сказанным выше. Это противоречие исключает случай $k \geq 2$.

Случай $k = 1$. В этом случае, согласно теореме 1, универсальная накрывающая компактного слоя L изометрична риманову произведению $\widetilde{M} \times \mathbb{R}$, где $\widetilde{M}$ – компактно. Нетрудно доказать, что L имеет неотрицательную секционную кривизну. (Иначе мы попадаем в случай $k \geq 2$.) Значит, L изометрично фактор-пространству $\widetilde{M} \times \mathbb{R}/G$, где G дискретна и принадлежит $\text{Iso}(\widetilde{M} \times \mathbb{R}) = \text{Iso} \widetilde{M} \times \text{Iso} \mathbb{R}$ [7]. Верно следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. $H_{2n-1}(L) = \mathbb{R}$ и существует компактная ориентируемая гиперповерхность $M \subset L$ с конечной фундаментальной группой такая, что класс $[M]$ является образующей в $H_{2n-1}(L)$.

Пусть $L = A \cap B$, $A \cup B = M^{n+1}$, т.е. A и B – это подпространства, на которые слой L разбивает M^{2n+1} .

Нетрудно показать, что $[M]$ как гомологический класс инъективно вкладывается хотя бы в одну из компонент A или B . Пусть для определенности $[M]$ представляет ненулевой класс в $H_{2n-1}(B)$.

Введем порядок на множестве компактных слоев. Пусть $\{L_\alpha\}$ – множество компактных слоев, а $A_\alpha, B_\alpha, M_\alpha$ – такие же, как A, B, M , и B_α принадлежит B для всех α . Скажем, что $L_\gamma < L_\beta$, если $B_\beta \subset B_\gamma$ и $[M_\alpha]$ является образующей в $H_{2n-1}(B_\alpha)$ для всех α .

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Внутри B есть компактный слой L_1 такой, что $L < L_1$.*

Основная идея доказательства – показать, что некомпактный слой внутри компоненты B обязан “наматываться” также и на другой компактный слой. Затем, используя теорему 2, показывается, что этот слой больше в смысле порядка, введенного выше.

Далее показывается, что бесконечная линейно упорядоченная последовательность компактных слоев должна вырождаться, что приводит к противоречию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Stuck G. // C. R. Acad. Sci. Ser. 1. 1991. V. 313. № 8. P. 519–522. [2] Liu Z.-D. // Proc. Sympos. Pure Math. 1993. V. 54. № 3. P. 459–465. [3] Thurston W. // Topology. 1974. V. 13. P. 347–352. [4] Plante Y. // Topology. 1973. V. 12. P. 177–181. [5] Бишоп Р., Криттенден Р. Геометрия многообразий. М.: Мир, 1967. [6] Дольд А. Лекции по алгебраической топологии. М.: Мир, 1976. [7] Cheeger J., Gromoll D. // Ann. of Math. 1972. V. 96. № 3. P. 413–443.

Принято редколлегией
30.06.1999