Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Д. Гнеденко, Наилучшая константа в неравенстве типа Хинчина для квадратичных форм, *УМН*, 2000, том 55, выпуск 2, 135–136

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm275>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 12:52:43

НАИЛУЧШАЯ КОНСТАНТА В НЕРАВЕНСТВЕ ТИПА ХИНЧИНА ДЛЯ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ

Б. Д. ГНЕДЕНКО

Начнем с классического результата.

НЕРАВЕНСТВО ХИНЧИНА. Пусть $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ – независимые случайные величины, принимающие значения ± 1 с вероятностью $1/2$. Тогда для любых коэффициентов b_j , $j = \overline{1, n}$, и числа $p > 2$ выполнено: $E|\sum_j b_j Z_j|^p \leq N_p (\sum_j b_j^2)^{p/2}$; $N_p = E|\xi|^p = \frac{2^{p/2}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)$, где $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Причем N_p – наилучшая константа, не зависящая от n .

Наша цель – доказать следующую теорему:

ТЕОРЕМА. Пусть $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ – независимые случайные величины, принимающие значения ± 1 с вероятностью $1/2$. Тогда для любого числа $p \geq 3$ и любой матрицы $C = (c_{ij})$ размера $n \times n$ выполнено:

$$E|Z^T C Z - E(Z^T C Z)|^p \leq M_p \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j < i} (c_{ij} + c_{ji})^2 \right)^{p/2},$$

где $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)^T$, M_p – наилучшая константа (не зависящая от n). Величина M_p определяется равенством $M_p = 2^{-p/2} E|\xi - E\xi|^p$, где $\xi \sim \chi^2(1)$ – распределение хи-квадрат с одной степенью свободы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На первом этапе доказывается, что в случае $p \geq 3$ неравенство Хинчина остается справедливым, если условие взаимной независимости величин $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ заменить условием их попарной независимости.

Далее проведем следующее преобразование:

$$\begin{aligned} E|Z^T C Z - E(Z^T C Z)|^p &= E \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} Z_i Z_j - E \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} Z_i Z_j \right|^p \\ &= E \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} Z_i Z_j - E \sum_{i=1}^n c_{ii} \right|^p \\ &= E \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} c_{ij} Z_i Z_j + \sum_{i=1}^n c_{ii} (Z_i^2 - 1) \right|^p \\ &= E \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} c_{ij} Z_i Z_j \right|^p = E \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j < i} (c_{ij} + c_{ji}) Z_i Z_j \right|^p. \end{aligned}$$

Так как случайные величины $\{Z_i \cdot Z_j\}$ попарно независимы, то из неравенства Хинчина

$$\begin{aligned} E|Z^T C Z - E(Z^T C Z)|^p &\leq \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j < i} (c_{ij} + c_{ji})^2 \right)^{p/2} E \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j < i} \sqrt{\frac{2}{n(n-1)}} Z_i Z_j \right|^p \\ &= \frac{2^{p/2}}{[n(n-1)]^{p/2}} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j < i} (c_{ij} + c_{ji})^2 \right)^{p/2} E \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j < i} Z_i Z_j \right|^p \\ &= \frac{2^{p/2}}{[n(n-1)]^{p/2}} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j < i} (c_{ij} + c_{ji})^2 \right)^{p/2} E \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j < i} Z_i Z_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Z_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Z_i^2 \right|^p \\ &= \frac{2^{p/2}}{[n(n-1)]^{p/2}} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j < i} (c_{ij} + c_{ji})^2 \right)^{p/2} E \left| \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n Z_i \right)^2 - \frac{n}{2} \right|^p. \end{aligned}$$

Положим по определению:

$$M_{p,n} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2^{p/2}}{[n(n-1)]^{p/2}} \mathbb{E} \left| \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n Z_i^2 \right)^2 - \frac{n}{2} \right|^p, \quad M_p \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} M_{p,n}.$$

Легко показать, что $M_{p,n} \leq M_p$, причем M_p — наилучшая константа. Из центральной предельной теоремы следует, что $M_p = 2^{-p/2} \mathbb{E} |\xi - \mathbb{E} \xi|^p$, где $\xi \sim \chi^2(1)$. Теорема доказана.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
26.01.2000