Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Ершов, О K -теории расслоений на матричные алгебры, *УМН*, 2000, том 55, выпуск 2, 137–138

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm276>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 16:30:36

О K -ТЕОРИИ РАССЛОЕНИЙ НА МАТРИЧНЫЕ АЛГЕБРЫ

А. В. Ершов

В работе [1] на категории конечных CW -комплексов был определен функтор, принимающий значения в категории абелевых групп и связанный с K -теорией специального класса расслоений со слоем матричная алгебра. Там было построено представляющее его пространство. В данной работе доказывается, что оно гомотопически эквивалентно BSU и что соответствующая структура H -пространства на BSU изоморфна H -структуре, индуцированной тензорным произведением виртуальных расслоений виртуальной размерности 1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть A_k ($k \geq 1$) – локально тривиальное векторное расслоение над X со слоем матричная алгебра $M_k(\mathbb{C})$ и предположим, что существует отображение расслоений

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} A_k & \xrightarrow{\mu} & \widetilde{M}_{kl} := X \times M_{kl}(\mathbb{C}) \\ & \searrow & \swarrow \\ & X & \end{array}$$

такое, что для всякой точки $x \in X$ слой $(A_k)_x \cong M_k(\mathbb{C})$ вкладывается в слой $(\widetilde{M}_{kl})_x \cong M_{kl}(\mathbb{C})$ как центральная простая подалгебра. Тогда тройку $(A_k, \mu, \widetilde{M}_{kl})$ назовем *расслоением на алгебры* (РА) над X . Если k и l взаимно просты (наибольший общий делитель $(k, l) = 1$), то тройку $(A_k, \mu, \widetilde{M}_{kl})$ назовем *плавающим расслоением на алгебры* (ПРА).

Отображение РА $(A_k, \mu, \widetilde{M}_{kl})$ в РА $(B_m, \nu, \widetilde{M}_{mn})$ есть пара отображений расслоений $f: A_k \rightarrow B_m, g: \widetilde{M}_{kl} \rightarrow \widetilde{M}_{mn}$, являющихся послойными гомоморфизмами алгебр, такая, что $g \circ \mu = \nu \circ f$.

Тройку $(\widetilde{M}_k, \tau, \widetilde{M}_{kl})$ назовем *тривиальной*, если отображение $\tau: X \times M_k(\mathbb{C}) \rightarrow X \times M_{kl}(\mathbb{C})$ следующее: $\tau(x, T) = (x, T \otimes E_l)$, где $x \in X$, E_l – единичная $(l \times l)$ -матрица и через $T \otimes E_l$ обозначено кронекерово произведение матриц.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Два ПРА $(A_k, \mu, \widetilde{M}_{kl})$ и $(B_m, \nu, \widetilde{M}_{mn})$ назовем *стабильно эквивалентными*, если существует последовательность пар натуральных чисел $\{t_i, u_i\}$, $1 \leq i \leq s$, такая, что

- (i) $\{t_1, u_1\} = \{k, l\}$, $\{t_s, u_s\} = \{m, n\}$, (ii) $(t_i t_{i+1}, u_i u_{i+1}) = 1$ при $s > 1, 1 \leq i \leq s - 1$,

и отвечающая ей последовательность ПРА $(A_{t_i}, \mu_i, \widetilde{M}_{t_i u_i})$ такая, что

- (1) $(A_{t_1}, \mu_1, \widetilde{M}_{t_1 u_1}) = (A_k, \mu, \widetilde{M}_{kl})$, $(A_{t_s}, \mu_s, \widetilde{M}_{t_s u_s}) = (B_m, \nu, \widetilde{M}_{mn})$;
 (2) $(A_{t_i}, \mu_i, \widetilde{M}_{t_i u_i}) \otimes (\widetilde{M}_{t_{i+1}}, \tau, \widetilde{M}_{t_{i+1} u_{i+1}}) \cong (A_{t_{i+1}}, \mu_{i+1}, \widetilde{M}_{t_{i+1} u_{i+1}}) \otimes (\widetilde{M}_{t_i}, \tau, \widetilde{M}_{t_i u_i})$
 при $s > 1, 1 \leq i \leq s - 1$, где $(\widetilde{M}_{t_i}, \tau, \widetilde{M}_{t_i u_i})$ – тривиальное ПРА.

Основой РА $(A_k, \mu, \widetilde{M}_{kl})$ назовем расслоение A_k , рассматриваемое как расслоение со структурной группой $\text{Aut } M_k(\mathbb{C}) = PGL(k; \mathbb{C})$.

В [1] были доказаны следующие результаты:

А. Структурная группа основы ПРА $(A_k, \mu, \widetilde{M}_{kl})$ редуцируется к $SU(k)$.

В. Пусть $\dim X < 2 \min\{k, l\}$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (i) A_k – основа некоторого ПРА над X ;
 (ii) для произвольного m , удовлетворяющего условию $2m > \dim X$, существует расслоение на m -алгебры B_m такое, что $A_k \otimes \widetilde{M}_m \cong B_m \otimes \widetilde{M}_k$;
 (iii) для некоторого m такого, что $(k, m) = 1$: $A_k \otimes \widetilde{M}_m \cong B_m \otimes \widetilde{M}_k$.

Более того, по паре расслоений A_k и B_m над X такой, что $(k, m) = 1$ и $A_k \otimes \widetilde{M}_m \cong B_m \otimes \widetilde{M}_k$, однозначно восстанавливается класс стабильной эквивалентности ПРА над X , который имеет (для произвольного достаточно большого n такого, что $(km, n) = 1$) в качестве представителей ПРА $(A_k, \mu, \widetilde{M}_{kn})$ и $(B_m, \nu, \widetilde{M}_{mn})$ (для некоторых μ и ν).

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-01202).

С. На множестве классов стабильной эквивалентности ПРА над X с помощью операции тензорного произведения расслоений можно ввести структуру абелевой группы $AB^1(X)$. Соответствующее классифицирующее H -пространство $\varinjlim_{(k,l)=1} Gr_{k,kl}$ имеет такие же гомотопические группы, как и BSU .

Используя эти результаты, построим биекцию между множеством классов обычной стабильной эквивалентности SU -расслоений $\widetilde{KSU}(X)$ и множеством классов эквивалентности ПРА из определения 2 $AB^1(X)$ и, тем самым, докажем гомотопическую эквивалентность $\varinjlim_{(k,l)=1} Gr_{k,kl}$ и BSU (см. пункт С).

Пусть ξ_k — k -мерное комплексное $SU(k)$ -расслоение над X , $\dim X < 2k$. Рассмотрим пару

$$\xi_k \otimes [k] - [k(k-1)], \quad (\xi_k \oplus [m-k]) \otimes [m] - [m(m-1)]$$

(здесь $[n]$ — тривиальное расслоение ранга n над X) виртуальных расслоений виртуальной размерности k и m соответственно, где $(k, m) = 1$ и $m > k$. Обозначим через ξ_k^{ad} , $(\xi_k \oplus [m-k])^{\text{ad}}$ геометрических представителей этих классов размерностей k и m соответственно, которые существуют в силу условия на размерность X ([2]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. $(\text{End } \xi_k^{\text{ad}}) \otimes \widetilde{M}_m \cong (\text{End}(\xi_k \oplus [m-k])^{\text{ad}}) \otimes \widetilde{M}_k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прямым вычислением проверяется, что имеет место следующий изоморфизм: $\chi \otimes [m] \cong (\xi_k \oplus [m-k])^{\text{ad}} \otimes [k]$.

Согласно пункту В и доказанному предложению, по паре χ , $(\xi_k \oplus [m-k])^{\text{ad}}$ однозначно восстанавливается некоторый класс стабильной эквивалентности ПРА над X . Легко видеть, что он не зависит от выбора представителя класса $\widetilde{KSU}$ -эквивалентности расслоения ξ_k . Следовательно, имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Корректно определено отображение множества

$$(2) \quad \phi: \widetilde{KSU}(X) \rightarrow AB^1(X), \quad \xi_k \mapsto (A_k, B_m),$$

где $A_k = \text{End } \chi$, $B_m = \text{End}(\xi_k \oplus [m-k])^{\text{ad}}$, $(k, m) = 1$, $\dim X < 2 \min\{k, m\}$.

Пусть (ξ_k, ξ_m) — пара $SU(k)$ - и $SU(m)$ -расслоений соответственно $((k, m) = 1)$, причем $\xi_k \otimes [m] \cong \xi_m \otimes [k]$. Возьмем l и n такие, что $kl + mn = 1$. Тогда в группе $KSU(X)$ выполняется равенство $\xi_k = kl\xi_k + mn\xi_m = kl\xi_k + kn\xi_m = k(l\xi_k + n\xi_m)$ и аналогично $\xi_m = m(l\xi_k + n\xi_m)$ (здесь мы классы стабильной эквивалентности расслоений обозначаем теми же символами, что и их представители), т.е. $\xi_k = k\eta$, $\xi_m = m\eta$ для одномерного виртуального SU -расслоения η ($\eta = l\xi_k + n\xi_m$). Очевидно, что сопоставление $(A_k, B_m) \mapsto \eta$ (где $A_k = \text{End } \xi_k$, $B_m = \text{End } \xi_m$) определяет искомое отображение ϕ , обратное к ϕ . Тем самым получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пространства $\varinjlim_{(k,l)=1} Gr_{k,kl}$ (см. пункт С) и BSU гомотопически эквивалентны.

Обозначим через $BSU_{\otimes}$ пространство BSU со структурой H -пространства, индуцированной тензорным произведением виртуальных SU -расслоений виртуальной размерности один [3].

ТЕОРЕМА 6. H -пространство $\varinjlim_{(k,l)=1} Gr_{k,kl}$ с операцией, индуцированной тензорным произведением ПРА, изоморфно $BSU_{\otimes}$ как H -пространство.

Автор выражает глубокую благодарность В. М. Мануйлову, А. С. Мищенко и Е. В. Троицкому за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ершов А. В. // Вестник МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1999. № 6. С. 56–60. [2] Хьюзмоллер Д. Расслоенные пространства. М.: Мир, 1970. [3] Адамс Дж. Ф. Бесконечнократные пространства петель. М.: Мир, 1982.