Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Кнежевич-Милянович, Оценки минимального собственного значения самосопряженных дифференциальных операторов высокого порядка, *УМН*, 2000, том 55, выпуск 2, 139–140

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm277>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 16:08:05

**ОЦЕНКИ МИНИМАЛЬНОГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ
САМОСОПРЯЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
ОПЕРАТОРОВ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА**

Ю. КНЕЖЕВИЧ-МИЛЯНОВИЧ

Рассматривается краевая задача:

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n} \left(p(x) \frac{d^n y}{dx^n} \right) &= (-1)^n \lambda y, \quad a < x < b, \\ y^{(i)}(a) &= 0, \quad y^{(i)}(b) = 0, \quad 1 \leq i \leq n-1, \end{aligned}$$

где $p(x)$ — измеримая функция, которая на $[a, b]$ ограничена и строго положительна. Как известно, спектр задачи (1) положительный и дискретный:

$$0 < \lambda_1(p(x)) < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$$

Зафиксируем $\alpha \neq 0$ и предположим, что

$$(2) \quad \int_a^b p^\alpha(x) dx = 1.$$

Будет изучаться вопрос об оценках

$$c_\alpha < \lambda_1 \leq C_\alpha$$

в классе задач с коэффициентом $p(x)$, удовлетворяющим (2). При $n = 1$ такая задача полностью исследована в работах [1], [2]. Для операторов высшего порядка вида

$$\frac{d^{2n} y}{dx^{2n}} = (-1)^n \lambda p(x) y$$

такой вопрос рассматривался также в [1], [3]. Методы предшествующих работ не распространяются без существенных изменений на случай задачи (1) с $n > 1$.

Основной результат настоящей работы:

ТЕОРЕМА 1. Если $\alpha > -\frac{1}{2n}$, то существует константа $C_\alpha < \infty$ такая, что $\lambda_1 < C_\alpha$. Если $\alpha \leq -1$, то существует $c_\alpha > 0$ такая, что $\lambda_1 > c_\alpha$.

Можно, кроме того, показать, что если $\alpha \leq -\frac{1}{2n}$, то λ_1 может принимать сколь угодно малые положительные значения, а если $\alpha > -1$, то λ_1 может принимать сколь угодно большие положительные значения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Доказательство основано на применении вариационного принципа:

$$(3) \quad \lambda_1 \leq J(y) = \left(\int_a^b p(x) y^{(n)^2} dx \right) \left(\int_a^b y^2 dx \right)^{-1},$$

где $y \in \mathring{W}_2^n([a, b])$, $y \neq 0$.

Пусть $-\frac{1}{2n} < \alpha < 1$. Будем искать $y_1(x) \in \mathring{W}_2^n([a, b])$, так что

$$(4) \quad y_1^{(n)^2} = p(x)^{\alpha-1}.$$

Пусть $a = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_n < b = \xi_{n+1}$. Ограничимся рассмотрением случая $a = 0$, $b = 1$. Функцию y_1 определим как решение уравнения $y_1^{(n)} = \Theta(x) p(x)^{\frac{\alpha-1}{2}}$, где $\Theta(x)$ — ступенчатая функция, принимающая на каждом интервале (ξ_i, ξ_{i+1}) значения или 1 или -1 и $y_1(0) =$

$y_1'(0) = \dots = y_1^{(n-1)}(0) = 1$. Набору $(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n)$ и функции $\Theta(x)$ поставим в соответствие точку $\pm(\xi_{i+1}, -\xi_i)$, где знак “+” берется в случае, когда $\Theta(x) = 1$ на (ξ_{i+1}, ξ_i) , и “-”, если $\Theta(x) = -1$ на этом интервале. Заметим, что образ набора $(\xi_0, \dots, \xi_n)$ и функции $\Theta(x)$ заполнят полиэдр $|t_0| + |t_1| + \dots + |t_n| = 1$ в $\mathbb{R}^{n+1}$ и такое соответствие взаимно однозначно. Далее, каждой точке $(t_0, \dots, t_n)$ поставим в соответствие точку $(y_1(1), y_1'(1), \dots, y_1^{(n-1)}(1))$ гиперплоскости $\mathbb{R}^n$. Получено нечетное отображение полиэдра на гиперплоскость. Из теоремы Борсука [4] следует, что некоторая точка полиэдра отображается в начало координат. Такой точке соответствует решение $y_1(x)$ уравнения (4) из $\mathring{W}_2^n([a, b])$. Эта функция будет рассматриваться как пробная функция в [3]. Далее используем лемму, доказательство которой достаточно элементарно и будет здесь опущено.

ЛЕММА 1. Если $y(x) \in C^n([a_1, a_2])$, $y^{(n)}$ не меняет знака, $s < \frac{2}{1+2n}$, то

$$\left(\int_{a_1}^{a_2} |y^{(n)}(x)|^s dx \right)^{1/s} \leq C |a_2 - a_1|^{\frac{2-s-2ks}{2s}} \left(\int_{a_1}^{a_2} y^2 dx \right)^{1/2}.$$

Предположим сейчас, что $0 < \alpha < 1$. Применим лемму 1 к построенной выше функции $y_1(x)$ с $k = n$, $s = \frac{2\alpha}{\alpha-1}$ на самом большом из интервалов (ξ_i, ξ_{i+1}) , $i = 0, \dots, n-1$. В результате получим, что

$$\int_a^b |y_1|^2 dx \geq C_1(\alpha).$$

Отсюда и из (4) при $y = y_1$ следует, что $\lambda_1 \leq C_\alpha$. Если же $-\frac{1}{2n} < \alpha < 0$, то лемму 1 следует применить на самом маленьком интервале среди (ξ_i, ξ_{i+1}) , $i = 1, \dots, n$.

Утверждение леммы 1 при $\alpha \geq 1$ следует из (4), если взять в качестве y любую функцию из $\mathring{C}^\infty(a, b)$, не равную нулю тождественно, и применить неравенство Гёльдера. Чтобы получить утверждение для $\alpha \leq -1$, достаточно рассмотреть случай $\alpha = -1$. В таком случае:

$$\left(\int_a^b y^2 dx \right)^{1/2} \leq c \int_a^b |y^{(n)}| dx \leq c \int_a^b p(x) y^{(n)^2} dx,$$

следовательно, $J(y) \geq C_\alpha$ и $\lambda_1 \geq C_\alpha$ в силу вариационного принципа.

Переходим к рассмотрению случая $\alpha \geq 1$. В этом случае λ_1 может принимать сколь угодно малые положительные значения. Чтобы убедиться в этом, положим $a = -1$, $b = 1$, $p_0(x) = |x|$.

Ясно, что $J(y(\varepsilon^{-1}x)) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, какой бы ни была $y(x) \in \mathring{C}^\infty(-1, 1)$. В таком случае, если $p = p_0(x) + \delta^2$, то $\lambda_i(p(x))$ будет стремиться к нулю при $\delta \rightarrow 0$, оставаясь положительным.

Осталось показать, что если $\alpha \leq -\frac{1}{2n}$, то λ_1 может принимать сколь угодно большие значения. Это делается при произвольном n так же, как и при $n = 1$ в работе [2]. Заметим еще, что в классе краевых задач с $p(x)$, удовлетворяющих (2), и $\alpha > -\frac{1}{2n}$ существует $P(x)$ такая, что $\lambda_1 \leq \lambda_1(P(x))$. Такая $P(x)$ непрерывна и положительна на (a, b) и также удовлетворяет (2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Егоров Ю. В., Кондратьев В. А. Об оценках первого собственного значения в некоторых задачах Штурма–Лиувилля // УМН. 1996. Т. 51. № 3. С. 73–144. [2] Egorov Yu. V., Karaa S. Optimization de la premiere valeur propre de l'operateur de Sturm–Liouville // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I. 1994. V. 319. P. 793–798. [3] Егоров Ю. В., Кондратьев В. А. Об оценках первого собственного значения задачи Штурма–Лиувилля // УМН. 1984. Т. 39. № 2. С. 151–152. [4] Тихомиров В. М. Теория приближений.