Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Кулямин, Образы градуированных многочленов в кольцах матриц над конечными групповыми алгебрами, *УМН*, 2000, том 55, выпуск 2, 141–142

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm278>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 16:25:34

ОБРАЗЫ ГРАДУИРОВАННЫХ МНОГОЧЛЕНОВ В КОЛЬЦАХ МАТРИЦ НАД КОНЕЧНЫМИ ГРУППОВЫМИ АЛГЕБРАМИ

В. В. Кулямин

1. Введение. В этой работе изучаются образы многочленов от некоммутирующих переменных в кольце матриц над конечной коммутативной групповой алгеброй, рассматриваемой как градуированное кольцо. Основная цель работы – попытаться перенести на градуированный случай следующее утверждение (см. [1]).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $R = M_n(\mathbb{F})$ – кольцо матриц размера $n \times n$ над конечным полем $\mathbb{F}$. Множество $A \subseteq R$ является образом многочлена от некоммутирующих переменных с нулевым свободным членом тогда и только тогда, когда $0 \in A$ и $\alpha A \alpha^{-1} \subseteq A$ для всех обратимых матриц α из R .

В качестве основного кольца у нас будет выступать конечная коммутативная групповая алгебра с естественной градуировкой – такие градуированные кольца ближе всего по своим свойствам к полям. Введем ряд понятий, которые потребуются для формулировки основного результата данной работы.

Для кольца $\mathbb{K}$, градуированного по полугруппе G , рассмотрим алгебру G -градуированных многочленов над $\mathbb{K}$ – свободную ассоциативную алгебру $\mathbb{K}\{X\}$, порожденную G -градуированным множеством X , т.е. множеством, представленным в виде дизъюнктного объединения

$$X = \bigsqcup_{g \in G} X_g$$

компонент X_g , каждая из которых является счетным множеством $X_g = \{x_{g0}, x_{g1}, \dots\}$. Далее мы будем обозначать эту алгебру как $\mathcal{H}^G$, а подалгебру многочленов с нулевым свободным членом в ней как $\mathcal{H}_0^G$.

Обозначим также через $\text{Hom}_{\mathbb{K}}^G(R, S)$ множество гомоморфизмов G -градуированной $\mathbb{K}$ -алгебры R в G -градуированную $\mathbb{K}$ -алгебру S , сохраняющих градуировку, т.е. удовлетворяющих условию

$$\forall g \in G \quad \varphi(R_g) \subseteq S_g.$$

Будем называть их далее G -градуированными гомоморфизмами.

Образом многочлена f из $\mathcal{H}^G$ в G -градуированной алгебре R назовем множество

$$\text{Im } f = \{a \in R : \exists \varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}^G(\mathbb{K}\{X\}, R) \varphi(f) = a\}.$$

Это определение означает, что, при взятии образа градуированного многочлена, мы подставляем в него вместо переменных x_{gi} всевозможные однородные элементы степени g из R .

Далее для $a \in R$ будем обозначать через a_g его однородную компоненту степени g , а для $A \subseteq R$ через A_g – его проекцию на R_g .

Пусть e – единица полугруппы G . Множество матриц A над градуированным по G кольцом $\mathbb{K}$, удовлетворяющее условию $\alpha A \alpha^{-1} \subseteq A$ для всякой обратимой однородной степени e матрицы α , будем называть *самоподобным*.

Теперь сформулируем основной результат этой работы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $R = M_n(\mathbb{K})$ – кольцо матриц размера $n \times n$ над конечной коммутативной групповой алгеброй $\mathbb{K} = \mathbb{F}(G)$ с естественной градуировкой. Однородное множество $A \subseteq R$ является образом G -градуированного многочлена из $\mathcal{H}_0^G$ тогда и только тогда, когда $0 \in A$ и A самоподобно.

2. Доказательство основного результата. Мы всюду будем придерживаться обозначений, введенных в формулировке теоремы 2.

Очевидно, что однородное множество, являющееся образом градуированного многочлена с нулевым свободным членом, содержит 0. Пусть также $a = f(a_1, \dots, a_m)$, где $a, a_1, \dots, a_m \in R$ и $\alpha \in R$ – однородная обратимая матрица. Тогда

$$\alpha a \alpha^{-1} = \alpha f(a_1, \dots, a_m) \alpha^{-1} = f(\alpha a_1 \alpha^{-1}, \dots, \alpha a_m \alpha^{-1}).$$

Последнее выражение является матрицей из $\text{Im } f$, поскольку степень однородности $\alpha a_i \alpha^{-1}$ совпадает со степенью однородности a_i . Таким образом, необходимость в теореме 2 доказана.

Далее нам понадобится следующее утверждение, которое легко извлечь из доказательства теоремы 1 в [1].

ЛЕММА 3. *Для самоподобного множества A матриц над конечным полем существует многочлен от некоммутирующих переменных $\chi_A(x, x_1, \dots, x_m)$, принимающий только значения 0 и 1, и такой, что*

$$\begin{aligned} a \notin A &\Rightarrow \forall a_1, \dots, a_m \in R \quad \chi_A(a, a_1, \dots, a_m) = 0; \\ a \in A &\Rightarrow \exists a_1, \dots, a_m \in R \quad \chi_A(a, a_1, \dots, a_m) = 1. \end{aligned}$$

Многочлен, обладающий описанными свойствами, будем называть *индикатором* множества A .

Под классом подобия в R будем понимать минимальное непустое самоподобное множество. Назовем класс подобия матриц $C \subseteq R$ *разложимым*, если он является суммой своих проекций на однородные компоненты R (если $G = \{g_1, \dots, g_k\}$ и $a_1, \dots, a_k \in C$, то $\sum_{g \in G} a_i g_i \in C$). Очевидно, что класс подобия, состоящий из однородных матриц одной степени однородности, является разложимым – все его проекции, кроме одной, равны $\{0\}$.

ЛЕММА 4. *Всякий разложимый класс подобия матриц C над конечной коммутативной групповой алгеброй $\mathbb{K} = \mathbb{F}(G)$ является образом градуированного многочлена из $\mathcal{K}_0^G$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим множество однородных компонент степени g_i элементов класса C . Легко показать, что оно представляет собой некоторое самоподобное множество матриц $C_{(g_i)}$ над $\mathbb{F}$, умноженное на g_i . По лемме 3 $C_{(g_i)}$ имеет индикатор $\chi_i(x_i, x_{i1}, \dots, x_{im_i})$ в кольце матриц над $\mathbb{F}$. Рассмотрим многочлен

$$h(y_1, \dots, y_k, x_{11}, \dots, x_{km_k}) = (g_1 y_1 + \dots + g_k y_k) \prod_{i \leq k} \chi_i(y_i, x_{i1}, \dots, x_{im_i}),$$

в котором степень однородности переменных $y_i, x_{i1}, \dots, x_{im_i}$ равна e – единице G . Ясно, что он лежит в $\mathcal{K}_0^G$. Очевидно также, что если значение y_i для какого-нибудь i не лежит в $C_{(g_i)}$, то h принимает значение 0, если же для всякого i значение y_i – элемент $C_{(g_i)}$, то значение h равно сумме произведений их значений на соответствующие элементы группы G и, следовательно, лежит в C . Беря в качестве $g_i y_i$ однородные компоненты произвольного элемента C , легко показать, что он лежит в образе многочлена h .

ЛЕММА 5. *Если $E(z_1, \dots, z_l)$ – градуированный многочлен в R , принимающий только значения 0 и 1 но не являющийся тождеством, то образом многочлена*

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_s, z_1, \dots, z_l) \\ = E(z_1, \dots, z_l) h(x_1, \dots, x_m) + (1 - E(z_1, \dots, z_l)) p(y_1, \dots, y_s) \end{aligned}$$

является объединение образов h и p , объединенное с $\{0\}$.

Доказательство этого утверждения очевидно. Соединяя его с уже отмеченными фактами, легко видеть, что любое содержащее 0 объединение разложимых классов подобия матриц над конечной коммутативной групповой алгеброй является образом градуированного многочлена с нулевым свободным членом, в частности, таковыми являются однородные самоподобные содержащие 0 подмножества, что и завершает доказательство теоремы 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Chuang C.-L. // Proc. Amer. Math. Soc. 1990. V. 110. №2. P. 293–302.