Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Нурмиев, Замыкания нильпотентных орбит кубических матриц порядка три, *УМН*, 2000, том 55, выпуск 2, 143–144

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm279>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 14:49:22

ЗАМКЫКАНИЯ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ОРБИТ КУБИЧЕСКИХ МАТРИЦ ПОРЯДКА ТРИ

А. Г. НУРМИЕВ

1. В заметке описывается структура замыканий нильпотентных орбит естественного представления группы $G = SL(V_1) \times SL(V_2) \times SL(V_3)$ в пространстве $U = V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$, где V_i – трехмерное комплексное векторное пространство, $i = 1, 2, 3$. Пусть $\{e_1, e_2, e_3\}$ – базис в V_1 , $\{e_4, e_5, e_6\}$ – в V_2 , $\{e_7, e_8, e_9\}$ – в V_3 .

Элемент из U называется нильпотентным, если замыкание его орбиты содержит нуль. Орбита, содержащая нильпотентный элемент, называется нильпотентной. Описание нильпотентных орбит рассматриваемого представления получается из [1; табл. 5] путем разнесения каждого представителя при помощи группы T , циклически переставляющей V_1, V_2, V_3 . Следовательно, мы получаем из каждой орбиты в [1] одну или три орбиты для нашего случая. Очевидно, что достаточно знать замыкания орбит представителей, указанных в [1].

№	Представитель	$\dim S$	Номера орбит в замыкании
1	159 168 249 258 267 347	0	$2, 2'', \geq 3$
2	159 168 249 257 258 347	1	$3, 3', 3'', 4', 4'', \geq 5$
3	149 158 167 248 259 347	2	$5', 5'', 6, \geq 7 \setminus 9''$
4	149 158 248 257 367	2	$5, 6, 7, 7', 8, 9'', \geq 10 \setminus 11''$
5	149 167 168 257 348	3	$7, 7', 8, 9'', \geq 10 \setminus 11''$
6	149 158 248 267 357	3	$7, 7', \geq 10 \setminus 11''$
7	149 158 167 248 357	4	$10, 11, 12', 12'', \geq 13 \setminus 15$
8	149 167 258 347	4	$\geq 10 \setminus 11, 11', 11''$
9	147 158 258 269	4	$12, 13, 15, 16, 17, 18, 18'', 19, 19'', 20, 21, 22, 23, 23', 23'', 24, 25$
10	149 158 167 248 257 347	5	$\geq 13 \setminus 15, 15', 15''$
11	149 167 248 357	5	$14', 15', 15'', 16', 16'', 17, 19, 19', 19'', 20, 21, 22', 22'', 23, 23', 23'', 24, 25$
12	149 167 247 258	5	$13, 15, 16, 17, 18, 18'', 19, 19'', 20, 21, 22, 23, 23', 23'', 24, 25$
13	149 158 167 248 257	6	$16, 17, 18, 18'', 19, 19'', 20, 21, 22, 23, 23', 23'', 24, 25$
14	149 157 168 247 348	7	$16, 16', 17'', 19, 19', 19'', 20, 21, 22, 22', 23, 23', 23'', 24, 25$
15	158 169 247	7	$16, 19, 19'', 20, 21, 22, 23, 23', 23'', 24, 25$
16	149 158 167 247	8	$19, 19'', 20, 21, 22, 23, 23', 23'', 24, 25$
17	148 157 249 267	8	$19, 19'', 20, 21, 23, 23', 23'', 24, 25$
18	147 158 248 259	8	$19, 20, 21, 23, 23', 23'', 24, 25$
19	149 157 248	9	$20, 21, 23, 23', 23'', 24, 25$
20	147 258	10	$21, 23, 23', 23'', 24, 25$
21	148 157 247	11	$23, 23', 23'', 24, 25$
22	147 158 169	13	$23, 24, 25$
23	147 158	14	$24, 25$
24	147	17	25
25	ноль	24	

2. Для описания замыканий нильпотентных орбит воспользуемся методом, изложенным в [2; пп. 5.5, 5.6]. Согласно [3], рассматриваемое представление является представлением θ -группы (см. [3; № 2 в табл.]). В [4; §2] было дано определение характеристики нильпотентного элемента для представлений θ -групп. Рассуждая аналогично [2; п. 5.5, пример 3], можно показать, что данное определение совпадает с определением характеристики, данным в [2; п. 5.5]. Заметим, что характеристики нильпотентных элементов можно получить из [1; табл. 5]. Поскольку характеристики неэквивалентных нильпотентных элементов не сопряжены (см. [4; п. 2]), то страты, введенные в [2; п. 5.6], совпадают с орбитами. Следовательно, замыкание орбиты совпадает с замыканием страта, а оно имеет простой вид.

А именно, пусть $e \in U$ – нильпотентный элемент, h_e – его характеристика, лежащая в касательной алгебре группы G . Рассмотрим разложение U на собственные подпространства $V_\lambda(h_e)$ относительно h_e . Положим, $V_+(h_e) = \bigoplus_{\lambda \geq 2} V_\lambda(h_e)$. Тогда замыкание страта, содержащего e , а следовательно, и орбиты точки e , есть $GV_+(h_e)$.

3. Пусть $e_1, e_2 \in U$ – нильпотентные элементы. Из вышесказанного следует, что условие $Ge_1 \subset \overline{Ge_2}$ равносильно тому, что Ge_1 пересекает $V_+(h_{e_2})$. Проверяя это условие и используя соображения размерности, получаем приведенную здесь таблицу. В первой графе указан номер орбиты, в третьей – размерность стабилизатора S (см. [1]). Вектор $e_i \otimes e_j \otimes e_k$ обозначается через ijk , $e_i \otimes e_j \otimes e_k + e_p \otimes e_q \otimes e_r$ – через $ijkpqr$, и так далее для любого числа членов. “Представитель” – элемент из соответствующей орбиты. Пусть $t_0 \in T$ отвечает перестановке $(1, 2, 3)$. Для любого $n = 1, \dots, 25$ n, n', n'' в четвертой графе означает номер орбиты элемента, полученного из n -го элемента второй графы при помощи id, t_0, t_0^2 соответственно (см. п. 1). Символ “ $\geq k$ ” означает “все орбиты с номерами i, i', i'' , где $i \geq k$ ”, а “ $\setminus k_1, k_2 \dots$ ” – “за исключением орбит с номерами $k_1, k_2 \dots$ ”.

Автор благодарен своему научному руководителю Э. Б. Винбергу за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Винберг Э. Б., Элашвили А. Г. // Тр. семинара по вект. тенз. анализу. Т. 18. М.: Изд-во МГУ, 1978. С. 197–233. [2] Винберг Э. Б., Попов В. Л. // Итоги науки и техн. Современ. пробл. матем. Фунд. направления. Т. 55. М.: ВИНТИ, 1989. С. 137–311. [3] Винберг Э. Б. // Изв. АН СССР Сер. матем. 1976. Т. 40. №3. С. 488–526. [4] Винберг Э. Б. // Тр. семинара по вект. тенз. анализу. Т. 19. М.: Изд-во МГУ, 1979. С. 155–177.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
26.01.2000