Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Перов, О теореме Брауэра и овалах Кассини, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 1, 225–226

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm28>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 18:21:48

О ТЕОРЕМЕ БРАУЭРА И ОВАЛАХ КАССИНИ

А. И. ПЕРОВ

При изучении устойчивости линейных дискретных и непрерывных систем важную роль играют различные локализационные теоремы [1], [2]. Пусть $A = (a_{jk})$ — произвольная комплексная квадратная $(n \times n)$ -матрица. Из указанных выше теорем можно получить как оценку *спектрального радиуса* $\text{spr } A$ (наибольшего из модулей собственных значений), так и оценку *спектральной абсциссы* $\text{sra } A$ (наибольшей из вещественных частей собственных значений).

Суммы модулей внедиагональных элементов j -й строки и j -го столбца обозначим, соответственно,

$$(1) \quad p_j = \sum_{k \neq j} |a_{jk}|, \quad q_j = \sum_{k \neq j} |a_{kj}|, \quad j = 1, \dots, n.$$

По теореме Гершгорина и Островского при любом фиксированном α , $0 \leq \alpha \leq 1$, каждое собственное значение матрицы A лежит по крайней мере в одном из n кругов

$$(2) \quad |\lambda - a_{jj}| \leq p_j^{1-\alpha} q_j^\alpha, \quad j = 1, \dots, n,$$

с центрами в точках a_{jj} и радиусами $p_j^{1-\alpha} q_j^\alpha$. При $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ получаем *круги Гершгорина*, построенные по строкам и столбцам матрицы A соответственно, а при $0 < \alpha < 1$ мы приходим к *кругам Островского*. Попутно отметим, что в книге [3, с. 239, задача 25] ошибочно утверждается, что каждое собственное значение матрицы располагается в некотором круге с центром в точке a_{jj} и радиусом $\min(p_j, q_j)$ (т.е. пересечение объединений заменено объединением пересечений, что неправомерно). Так, например, собственные значения $\lambda_1 \approx 5,37$ и $\lambda_2 \approx -0,37$ матрицы с элементами $a_{11} = a_{12} = 1$, $a_{21} = 6$, $a_{22} = 4$ не лежат ни в одном из кругов $|\lambda - 1| \leq 1$ и $|\lambda - 4| \leq 1$.

Из (2) вытекают оценки спектрального радиуса и спектральной абсциссы:

$$(3) \quad \text{spr } A \leq \max_j \{ |a_{jj}| + p_j^{1-\alpha} q_j^\alpha \},$$

$$(4) \quad \text{sra } A \leq \max_j \{ \text{Re } a_{jj} + p_j^{1-\alpha} q_j^\alpha \}$$

(индекс j пробегает все значения $1, \dots, n$), наилучшее значение которых может быть достигнуто минимизацией по параметру α .

Брауэру, а затем Островскому, удалось усилить сформулированный выше результат (см. (2)) и показать, что при любом фиксированном α , $0 \leq \alpha \leq 1$, каждое собственное значение матрицы A лежит внутри или на границе по крайней мере одного из $n(n-1)/2$ *овалов Кассини*

$$(5) \quad |\lambda - a_{jj}| |\lambda - a_{kk}| \leq (p_j p_k)^{1-\alpha} (q_j q_k)^\alpha \equiv r_{jk}^2(\alpha), \quad j < k.$$

При попытке применить указанную теорему для получения оценок спектрального радиуса и спектральной абсциссы мы сталкиваемся со следующими задачами на условный экстремум. Пусть a и b — произвольные комплексные числа, r — произвольное вещественное неотрицательное число. Требуется найти наибольшее значение модуля $|\lambda|$, а также вещественной части $\text{Re } \lambda$, когда λ пробегает овал

$$(6) \quad |\lambda - a| |\lambda - b| = r^2.$$

К сожалению, мы не располагаем в общем случае точными аналитическими формулами для максимумов интересующих нас величин. Напомним, что точки a и b называются *фокусами* овала, а число r — его *радиусом*.

Наши оценки основаны на замене овала (6) *окружностью* с *центром* в точке $(a+b)/2$ и *радиусом* s , равным корню квадратному из суммы квадрата половины фокусного расстояния и квадрата радиуса овала, или *эллипсом с фокусами* в точках a и b и *полуосями* s и r . Полученные нами оценки позволяют сформулировать и доказать следующие утверждения, приводящие в ряде случаев к более точным по сравнению с неравенствами (3) и (4) результатам.

ТЕОРЕМА 1. Для спектрального радиуса матрицы A при любом фиксированном α , $0 \leq \alpha \leq 1$, справедливы оценки

$$(7) \quad \text{spr } A \leq \max_{j < k} \left\{ \frac{|a_{jj}| + |a_{kk}|}{2} + \left[\left(\frac{|a_{jj}| - |a_{kk}|}{2} \right)^2 + r_{jk}^2(\alpha) \right]^{1/2} \right\},$$

$$(8) \quad \text{spr } A \leq \max_{j < k} \left\{ \left| \frac{a_{jj} + a_{kk}}{2} \right| + \left[\left(\frac{|a_{jj} - a_{kk}|}{2} \right)^2 + r_{jk}^2(\alpha) \right]^{1/2} \right\}.$$

Если выражения, стоящие справа в (7) и (8), меньше единицы, то все собственные значения матрицы A по модулю меньше единицы, и она является *асимптотически устойчивой* (в смысле теории устойчивости дискретных систем).

ТЕОРЕМА 2. Для спектральной абсциссы матрицы A при любом фиксированном α , $0 \leq \alpha \leq 1$, справедливы оценки

$$(9) \quad \text{sra } A \leq \max_{j < k} \left\{ \text{Re} \left(\frac{a_{jj} + a_{kk}}{2} \right) + \left[\left(\text{Re} \left(\frac{a_{jj} - a_{kk}}{2} \right) \right)^2 + r_{jk}^2(\alpha) \right]^{1/2} \right\},$$

$$(10) \quad \text{sra } A \leq \max_{j < k} \left\{ \text{Re} \left(\frac{a_{jj} + a_{kk}}{2} \right) + \left[r_{jk}^2(\alpha) - \left(\text{Im} \left(\frac{a_{jj} - a_{kk}}{2} \right) \right)^2 \right]^{1/2} \right\}.$$

Последняя оценка установлена при дополнительном предположении, что диагональные элементы имеют одинаковые вещественные части, а подкоренные выражения неотрицательны.

Если выражения, стоящие справа в (9) и (10), отрицательны, то все собственные значения матрицы A лежат в открытой левой полуплоскости, а она является *асимптотически устойчивой* (в смысле теории устойчивости непрерывных систем).

Оценка (7) принадлежит Брауэру, остальные оценки (8)–(10) являются новыми. Для достижения наилучшего результата при использовании одной из формул (7)–(10) следует произвести еще минимизацию по параметру α . В заключение отметим, что написанные выше оценки (см. теоремы 1 и 2) могут быть полезными и при изучении устойчивости в критических случаях [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Пароди М. Локализация характеристических чисел матриц и ее применение. М.: ИЛ, 1960. [2] Маркус М., Минк Х. Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М.: Наука, 1972. [3] Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Т. 2. М.: Мир, 1966. [4] Перов А. И. // Вестн. ВГУ, сер. 2, естеств. науки. 1996. № 2.

Принято редколлегией
10.06.1997