Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Д. Пустыльников, Об асимптотическом поведении коэффициентов ряда Тейлора функции $\xi(s)$, *УМН*, 2000, том 55, выпуск 2, 145–146

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm280>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 15:17:24

**ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ
КОЭФФИЦИЕНТОВ РЯДА ТЕЙЛОРА ФУНКЦИИ $\xi(s)$**

Л. Д. ПУСТЫЛЬНИКОВ

В этой работе мы находим асимптотическую формулу для коэффициентов ряда Тейлора функции $\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$ в точке $s = 1/2$. Здесь $\Gamma(s)$ и $\zeta(s)$ — соответственно гамма- и дзета-функции, а функция $\xi(s)$ является целой и в силу известного равенства $\xi(s) = \xi(1-s)$ разлагается в точке $s = 1/2$ в ряд Тейлора

$$(1) \quad \xi(s) = \sum_{r=0}^{\infty} \xi_r (s - 1/2)^{2r}$$

только по четным степеням переменной $z = s - 1/2$. Нахождение явного асимптотического выражения для коэффициентов ξ_r ряда Тейлора функции $\xi(s)$ при $r \rightarrow \infty$ представляет интерес как самостоятельно, так и в связи с гипотезой Римана о нулях функции $\zeta(s)$ [1].

ТЕОРЕМА 1. При $r \rightarrow \infty$ справедливо асимптотическое равенство

$$\begin{aligned} \xi_r \sim & \frac{2^{-(2r-2)}}{(2r)!} \left(\ln \frac{2r-2}{\pi} - \ln \ln \frac{2r-2}{\pi} + \beta \right)^{2r-2} \exp \left(-(2r-2) \left(\ln \frac{2r-2}{\pi} \right)^{-1} e^{\beta} \right) \\ & \times (2r-2)^{1/4} (2r)(2r-1) \left(\ln \frac{2r-2}{\pi} \right)^{-1/4} \\ & \times \frac{\pi^{1/4}}{\sqrt{(r-1) \left(\frac{1}{\left(\ln \frac{2r-2}{\pi} - \ln \ln \frac{2r-2}{\pi} \right)^2} + \frac{1}{\ln \frac{2r-2}{\pi}} \right)}}, \end{aligned}$$

где $\beta = \beta(r)$ — такая функция, что $\lim_{r \rightarrow \infty} \beta(r) = 0$.

Далее теорема 1 будет выведена из следующей теоремы 2.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $r \geq 2$, r — целое число, $\omega(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\pi n^2 x)$,

$$I_r = \int_1^{\infty} (16r(r-1) - \ln^2 x) (\ln^{r-2} x) x^{-3/4} \omega(x) dx.$$

Тогда при $r \rightarrow \infty$ справедливо асимптотическое равенство

$$\begin{aligned} I_r \sim & 16 \left(\ln \frac{r-2}{\pi} - \ln \ln \frac{r-2}{\pi} + \gamma(r) \right)^{r-2} \exp \left(-(r-2) \left(\ln \frac{r-2}{\pi} \right)^{-1} e^{\gamma} \right) \\ & \times (r-2)^{1/4} r(r-1) \left(\ln \frac{r-2}{\pi} \right)^{-1/4} \\ & \times \frac{\pi^{1/4}}{\sqrt{(r-2) \left(\frac{1}{2 \left(\ln \frac{r-2}{\pi} - \ln \ln \frac{r-2}{\pi} \right)^2} + \frac{1}{2 \ln \frac{r-2}{\pi}} \right)}}, \end{aligned}$$

где $\gamma(r)$ — такая функция, что $\lim_{r \rightarrow \infty} \gamma(r) = 0$.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № № 00-01-00583, 99-01-01063).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Мы воспользуемся известным равенством (см. [2], [3])

$$(2) \quad \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \frac{1}{s(s-1)} + f(s) + g(s),$$

где $s \neq 0, 1$;

$$f(s) = \int_1^\infty x^{\frac{s}{2}-1} \omega(x) dx;$$

$$g(s) = \int_1^\infty x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} \omega(x) dx,$$

$\omega(x)$ – функция, введенная в формулировке теоремы 2.

Так как при любом натуральном числе r

$$\frac{d^r f}{ds^r} = \left(\frac{1}{2}\right)^r \int_1^\infty (\ln^r x) x^{\frac{s}{2}-1} \omega(x) dx$$

и справедливо равенство $f(s) = g(1-s)$, то для любого четного числа m имеем:

$$(3) \quad \frac{1}{2} \left(\frac{d^m f}{ds^m} \left(\frac{1}{2} \right) + \frac{d^m g}{ds^m} \left(\frac{1}{2} \right) \right) = \frac{d^m f}{ds^m} \left(\frac{1}{2} \right) = \left(\frac{1}{2} \right)^m \int_1^\infty (\ln^m x) x^{-\frac{3}{4}} \omega(x) dx.$$

Далее, представляя число s в виде $s = 1/2 + z$, заметим, что $s(s-1) = z^2 - 1/4$. Поэтому, умножая обе части равенства (2) на величину $\frac{1}{2}s(s-1)$, в силу определения функции $\xi(s)$ и равенств (2), (3) получим для четной производной $\frac{d^m \xi}{ds^m} \left(\frac{1}{2} \right)$ следующее выражение:

$$(4) \quad \frac{d^m \xi}{ds^m} \left(\frac{1}{2} \right) = m(m-1) \frac{d^{m-2} f}{ds^{m-2}} \left(\frac{1}{2} \right) - \frac{1}{4} \frac{d^m f}{ds^m} \left(\frac{1}{2} \right) = 2^{-(m+2)} I_m,$$

где I_m – величина, введенная в теореме 2 при $m = r$. Теперь утверждение теоремы 1 непосредственно следует из равенства (4) и теоремы 2. Теорема 1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Формула (4) для четной производной функции $\xi(s)$ в точке $s = 1/2$ впервые приведена в работе [1], где также доказано, что все эти производные строго положительные (теорема 1 и ее доказательство).

Теорема 1 используется для доказательства следующего результата.

ТЕОРЕМА 3. При любом натуральном числе r определим величины

$$a_r = \frac{\xi_r}{\xi_0}, \quad \delta_r = \frac{(r! a_r)^{\frac{r+1}{r}}}{(r+1)! a_{r+1}},$$

где ξ_r – числа, введенные в (1). Тогда имеет место равенство

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \delta_r = e.$$

Теорема 3 и численные расчеты нескольких первых значений δ_r позволяют сделать следующий вывод.

ГИПОТЕЗА. При всех $r \geq 1$ справедливо неравенство $\delta_r > 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Пустыльников Л. Д. // УМН. 1999. Т. 54. № 1. С. 260–261. [2] Карацуба А. А. Основы теории чисел. М.: Наука, 1975. [3] Karatsuba A. A., Voronin S. M. The Riemann Zeta-Function. Berlin: de Gruyter, 1992.