Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Райгородский, О хроматическом числе пространства, *УМН*, 2000, том 55, выпуск 2, 147–148

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm281>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 15:47:16

О ХРОМАТИЧЕСКОМ ЧИСЛЕ ПРОСТРАНСТВА

А. М. РАЙГОРОДСКИЙ

1. Введение и основной результат. Определим величину $\chi(\mathbb{R}^n)$ – *хроматическое число евклидова пространства* $\mathbb{R}^n$ – как минимальное число красок, необходимых для такой раскраски точек в $\mathbb{R}^n$, при которой между точками одного цвета никогда не реализуется евклидово расстояние, равное единице. Иными словами, $\chi(\mathbb{R}^n)$ – это хроматическое число следующего графа: множество вершин этого графа совпадает со всем $\mathbb{R}^n$, а ребрами соединены те и только те вершины, расстояние между которыми равно единице. Фактически, задача нахождения величины $\chi(\mathbb{R}^n)$ была впервые рассмотрена в работе [1] Хадвигером, который показал, что если имеется произвольное покрытие $\mathbb{R}^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} \Omega_i$ замкнутыми множествами Ω_i , то найдется такой элемент Ω_i этого покрытия, что $\mathbb{R}^+ \cup \{0\} = \{|x-y| : x, y \in \Omega_i\}$. Известно (см. [2]–[4]), что $4 \leq \chi(\mathbb{R}^2) \leq 7$ и что, кроме того, $5 \leq \chi(\mathbb{R}^3) \leq 18$. В [5] Райский получил оценку $\chi(\mathbb{R}^n) \geq n+2$. Эта оценка неоднократно улучшалась: так, в [6] было доказано, что $\chi(\mathbb{R}^n) \gg n^2$, затем в [7] было получено неравенство $\chi(\mathbb{R}^n) \gg n^3$, и, наконец, в [8] была установлена экспоненциальность роста величины $\chi(\mathbb{R}^n)$. Иначе говоря, в работе [8] была доказана оценка $\chi(\mathbb{R}^n) \geq (1.207 + o(1))^n$ (здесь следует отметить, что согласно [6] имеет место неравенство $\chi(\mathbb{R}^n) \leq (3 + o(1))^n$). В настоящей работе с помощью техники, предложенной в [9], будет доказана следующая

ТЕОРЕМА. Положим $A_1 = \frac{1}{2}(x+2y)$, $A_2 = \sqrt{-3A_1^2 + 6A_1 + 1}$, $A_3 = \frac{1}{4}(1 + \frac{A_1-1}{A_2})$ и $A_4 = \frac{1}{6}(1+3A_1-A_2)$ (здесь x и y – независимые вещественные переменные). Определим, далее, величины x_0, y_0 как такие корни системы нелинейных уравнений

$$\begin{aligned} (1) \quad & 2A_3 \log A_4 + (1-4A_3) \log(A_1-2A_4) + (2A_3-1) \log(1-A_1+A_4) - \log y + \log(x-y) = 0, \\ (2) \quad & \frac{(1-x)^2 y}{(x-y)^3} = 1, \end{aligned}$$

что $x_0 = 0.36063 \dots$, а $y_0 = 0.063907 \dots$. Наконец, зададим величину γ равенством

$$\gamma^{-1} = (A_4^0)^{A_4^0} (A_1^0 - 2A_4^0)^{A_1^0 - 2A_4^0} (1 - A_1^0 + A_4^0)^{1 - A_1^0 + A_4^0} (1 - x_0)^{1 - x_0} (x_0 - y_0)^{x_0 - y_0} y_0^{y_0},$$

где $A_i^0 = A_i(x_0, y_0)$. Тогда $\chi(\mathbb{R}^n) \geq (\gamma + o(1))^n = (1.239 \dots + o(1))^n$.

2. Доказательство теоремы. Сперва заметим, что если $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ есть (M, D) -критическая конфигурация в $\mathbb{R}^n$ с критическим расстоянием $d > 0$ (т.е. $\text{card } \Sigma = M$ и в всяком множестве $Q \subset \Sigma$ таком, что $\text{card } Q = D+1$, найдется пара элементов $x, y \in Q$, расстояние между которыми равно d), то $\chi(\mathbb{R}^n) \geq M/D$ (см. [6]), и, стало быть, для завершения доказательства теоремы нам достаточно построить некоторую (M, D) -критическую конфигурацию Σ с $M/D \geq (\gamma + o(1))^n$.

Пусть $n \in \mathbb{N}$ достаточно велико, $a = [x_0 n]$, $b = [y_0 n]$, а p – наименьшее нечетное простое число, большее величины $[(a+2b)/2]$. Известно (см. [10; с. 364]), что для достаточно большого x и для некоторого $\alpha < 1$ (например, для $\alpha = 38/61$) между x и $x + x^\alpha$ лежит простое число. Поэтому можно считать, что $p < [(a+2b)/2] + [(a+2b)/2]^\alpha$. Заметим, что выбор величины α влияет исключительно на оценку величины $o(1)$ из формулировки теоремы. Положим $\Sigma = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{0, 1, -1\}; \text{card}\{x_i = \pm 1\} = a; \text{card}\{x_i = -1\} = b\} \subset \mathbb{R}^n$. По-нятно тогда, что $M = \text{card } \Sigma = C_n^a C_a^b$. Ясно, кроме того, что $\text{conv } \Sigma$ есть кросс-политоп. В то же

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 99-01-00357, 00-15-96109). Автор благодарит профессора László A. Székely за любезно предоставленный им еще неопубликованный обзор “Erdős on Unit Distances and the Szemerédi–Trotter Theorems”.

время в работе [8] оценки величины $\chi(\mathbb{R}^n)$ основывались на построении критических конфигураций, выпуклая оболочка которых представляет собой $(0, 1)$ -многогранник. Мы покажем здесь, что методы, предложенные в [11] и [9], позволяют работать с кросс-политопами и на их основе получать лучшие нижние оценки хроматического числа. В самом деле, как уже отмечалось выше, $M = C_n^a C_a^b$. Далее, нетрудно видеть, что имеет место следующее *арифметическое свойство*: для любых двух векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Sigma$ $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv a \pmod{p}$ в том и только том случае, когда либо $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, либо $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = a - p$.

Каждому вектору $\mathbf{x} \in \Sigma$ поставим в соответствие многочлен $F_{\mathbf{x}} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$, полагая

$$F_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \prod_{i \not\equiv a \pmod{p}} (i - (\mathbf{x}, \mathbf{y})),$$

а затем, последовательно применяя соотношения $x_i^3 = x_i$, $i = 1, \dots, n$, перейдем от многочлена $F_{\mathbf{x}}$ к многочлену $\tilde{F}_{\mathbf{x}} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$. Рассмотрим теперь произвольное множество $Q = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s\} \subset \Sigma$ такое, что $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \not\equiv a \pmod{p} \forall i \neq j$. В этом случае можно показать, что многочлены $\tilde{F}_{\mathbf{x}_1}, \dots, \tilde{F}_{\mathbf{x}_s}$ линейно независимы над полем $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (см. [9]), а значит,

$$(3) \quad s \leq \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{[(p-1-i)/2]} C_n^j C_{n-j}^{p-1-i-2j} = D.$$

Из неравенства (3) и арифметического свойства немедленно следует, что множество Σ есть (M, D) -критическая конфигурация с критическим расстоянием $d = \sqrt{2p}$ и, следовательно, $\chi(\mathbb{R}^n) \geq M/D$. Наконец, произведя несложные выкладки, нетрудно убедиться в том, что, в свою очередь, $M/D \geq (\gamma + o(1))^n$. Теорема доказана.

3. Замечания. 1. В доказательстве теоремы нет необходимости предполагать, что p – простое число. Достаточно считать, что $p = q^\alpha$, где q – простое, а $\alpha \geq 1$. При этом потребуются лишь внести некоторые изменения в определение многочленов $F_{\mathbf{x}}$ (см. [12]).

2. Хотя предложенный в настоящей работе метод получения нижних оценок хроматического числа пространства и дает асимптотически наилучший на данный момент результат, тем не менее в малых размерностях (по крайней мере при $n \leq 24$) улучшить с его помощью оценки из [5], [6] и [8] не удастся. По-видимому, для получения дальнейших улучшений в рамках указанного метода необходимо существенно уточнить неравенство (3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Hadwiger H. // Portugal. Math. 1944. V. 4. P. 140–144. [2] Hadwiger H. // Elem. Math. 1961. V. 16. P. 103–104. [3] Moser L., Moser W. // Canad. Math. Bull. 1961. V. 4. P. 187–189. [4] Coulson D. // Discrete Math. 1997. V. 170. P. 241–247. [5] Райский Д. Е. // Матем. заметки. 1970. Т. 7. С. 319–323. [6] Larman D. G., Rogers C. A. // Mathematika (London). 1972. V. 19. P. 1–24. [7] Larman D. G. // Comment. Math. Helv. 1978. V. 53. P. 529–535. [8] Frankl P., Wilson R. // Combinatorica. 1981. V. 1. P. 357–368. [9] Райгородский А. М. // УМН. 1999. Т. 54. № 2. С. 185–186. [10] Прахар К. Распределение простых чисел. М.: Мир, 1967. [11] Nilli A. // Contemp. Math. 1994. V. 178. P. 209–210. [12] Райгородский А. М. // УМН. 1997. Т. 52. № 6. С. 181–182.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
26.01.2000