Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Ружанский, Об особенностях аффинных слоений некоторых типов, *УМН*, 2000, том 55, выпуск 2, 149–150

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm282>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 17:09:40

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ АФФИННЫХ СЛОЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ТИПОВ

М. В. РУЖАНСКИЙ

В настоящей статье приводятся результаты об особенностях слоений, задаваемых ядрами голоморфных матричнозначных функций, обобщающие результаты [1]. Пусть Ω – связное открытое множество в $\mathbb{C}^n$. Рассмотрим голоморфное отображение $A: \Omega \rightarrow \mathbb{C}^{p \times n}$, $n, p \in \mathbb{N}$. Пусть $k = \max_{z \in \Omega} \operatorname{rank} A(z)$, и предположим, что $k \leq n - 1$. Через $\Omega^{(k)}$ обозначим множество, на котором максимальный ранг k достигается, $\Omega^{(k)}$ открыто и плотно в Ω . Для каждого $z \in \Omega^{(k)}$ ядро матрицы $A(z)$ имеет размерность $n - k$. Таким образом, получаем отображение κ из $\Omega^{(k)}$ в $\mathbb{G}_{n-k}(\mathbb{C}^n)$, заданное формулой $\kappa(z) = \ker A(z)$. По теореме о неявной функции отображение κ регулярно в $\Omega^{(k)}$. Одной из основных возникающих проблем является нахождение условий голоморфной продолжимости κ в область Ω . В случае, когда такого продолжения не существует, обозначим через Ω^{sing} множество существенных особенностей κ . Оказывается возможным связать свойство продолжимости с размерностью множества Ω^{sing} . Мы сосредоточимся на случае, когда κ задает слоение в Ω в следующем смысле. В точке $z \in \Omega^{(k)}$ рассмотрим аффинное подпространство $z + \kappa(z)$ в Ω , проходящее через z . Для любого $w \in (z + \kappa(z)) \cap \Omega^{(k)}$ имеем аффинное подпространство $w + \kappa(w)$, проходящее через w . Если предположить, что эти аффинные подпространства совпадают, т.е. $\kappa(z) = \kappa(w)$ для всех $w \in (z + \kappa(z)) \cap \Omega^{(k)}$, получаем локальное представление $\Omega^{(k)}$ как объединение непересекающихся аффинных подпространств размерности $n - k$. Очевидно, пространства $z + \kappa(z)$ и $w + \kappa(w)$ локально в $\Omega^{(k)}$ либо совпадают, либо не пересекаются. Действительно, если бы они были различны, но пересекались бы в точке множества $\Omega^{(k)}$, то эта точка пересечения была бы также в Ω^{sing} , что невозможно, так как множества $\Omega^{(k)}$ и Ω^{sing} не пересекаются. По другому условию слоения можно охарактеризовать как требование постоянства κ вдоль $(z + \kappa(z)) \cap \Omega^{(k)}$. С этого момента будем полагать, что это условие выполнено, т.е. что локально κ задает слоение аффинными $(n - k)$ -мерными подпространствами в $\Omega^{(k)}$.

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что множество существенных особенностей Ω^{sing} не пусто. Тогда Ω^{sing} аналитично в Ω и для любого $\xi \in \Omega^{\text{sing}}$ выполнено $k - 1 \leq \dim_{\xi} \Omega^{\text{sing}} \leq n - 2$.*

Возникает важная ситуация, когда A – якобиан голоморфного отображения $\Gamma: \Omega \rightarrow \mathbb{C}^p$. В этом случае условие, что κ задает слоение, означает, что Γ постоянна вдоль $z + \kappa(z)$ для любого $z \in \Omega^{(k)}$. Таким образом, поверхность уровня $\Gamma^{-1}(\Gamma(z))$ локально совпадает с $z + \kappa(z)$ для всех $z \in \Omega^{(k)}$. Можно показать, что они совпадают также глобально в $\Omega^{(k)}$. Слоения подобного типа возникают в следующей ситуации. Пусть X – гладкое многообразие, и пусть Λ – коническое Лагранжево подмногообразие в T^*X . Через π обозначим стандартную проекцию из T^*X в X . Пусть $\Sigma = \pi(\Lambda)$, $\Sigma_0 \subset \Sigma$ – регулярное подмножество и $N^*\Sigma_0$ – кономальное расслоение к Σ_0 . Обозначим через Φ производящую функцию для Λ , т.е. введем локальную параметризацию для Λ в форме $\{(\nabla \Phi(\xi), \xi)\}$ [2]. Таким образом, сужение проекции π на Λ задается отображением $\nabla \Phi$. При естественном предположении, что X и Λ вещественно аналитичны (как в [3]), наше отображение Γ есть не что иное, как аналитическое продолжение $\nabla \phi$ в комплексную область, и $A = \phi''_{\xi\xi}$, где ϕ получается из Φ путем факторизации конической переменной, например, если положить $\phi(\eta) = \Phi(\eta, 1)$ в некоторой канонической окрестности точки $\xi_{n+1} = 1$ (где имеем также $n = \dim X - 1$). Отметим, что размерность множества Ω^{sing} может играть важную роль в проблемах регулярности интегральных операторов Фурье [1], [4], [5], так как $\Lambda = WF'(F) \subset T^*(X \times Y)$ соответствует волновому фронту интегрального оператора Фурье F из Y в X .

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $A = D\Gamma \in \mathbb{C}^{p \times n}$ для голоморфного отображения $\Gamma: \Omega \rightarrow \mathbb{C}^p$. Предположим, что Ω^{sing} не пусто. Тогда в дополнение к оценкам теоремы 1 имеем $n - k + 1 \leq \dim_{\xi} \Omega^{\text{sing}} \quad \forall \xi \in \Omega^{\text{sing}}$. В частности, $3 \leq k \leq n - 1$ и $n \geq 4$. Кроме того,*

пусть $\xi \in \Omega^{\text{sing}}$ – регулярная точка в Ω^{sing} , $\xi = \lim_{i \rightarrow \infty} \xi_i$, $\xi_i \in \Omega^{(k)}$, и $\mathbb{G}_{n-k}(\mathbb{C}^n) \ni \kappa = \lim_{i \rightarrow \infty} \kappa(\xi_i)$. Тогда $\kappa \subset T_\xi \Omega^{\text{sing}}$.

В частности, можно заключить, что при $k \leq 2$ слоение, задаваемое κ , голоморфно продолжимо с $\Omega^{(k)}$ на все Ω . Обратное к теореме 2 утверждение выполняется на уровне существования голоморфного отображения $\Gamma: \Omega \rightarrow \mathbb{C}^p$ с $A = D\Gamma$:

ТЕОРЕМА 3. Для любых $3 \leq k \leq n-1$ и $\max\{k-1, n-k+1\} \leq d \leq n-2$ существует голоморфное отображение $\Gamma: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ такое, что $\dim \Omega^{\text{sing}} = d$ при $A = D\Gamma$. Более того, можно выбрать Γ с $\Omega \setminus \Omega^{(k)} = \Omega^{\text{sing}}$.

Случай с $A = \phi''_{\xi\xi}$, упомянутый выше, подробно рассмотрен в [1]. В этом случае условие на слоение для ядер матрицы A можно записать в терминах функции ϕ . Функция, задающая слоение, удовлетворяет системе однородных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с коэффициентами, выражающимися через функцию ϕ . С другой стороны, при заданном слоении функция ϕ , Гессиян A которой задает это слоение, удовлетворяет системе однородных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с коэффициентами, выражающимися через слоение. С этими системами связан ряд интересных задач (см. [1]).

Как следует из замечания после теоремы 2, наименьшая размерность, при которой не все особенности устранимы, это $n = 4$. Пример, где множество Ω^{sing} не пусто, можно дать с помощью функции

$$\phi(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = \xi_1 \xi_2^l + (\xi_3 - \xi_2 \xi_4)^m, \quad l, m \geq 2.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ружанский М. В. // УМН. 2000. Т. 55. № 1. С. 99–170. [2] Duistermaat J. J. Fourier Integral Operators. Basel: Birkhäuser, 1996. [3] Arnol'd V. I. Singularities of Caustics and Wave Fronts. Dordrecht: Kluwer, 1990. [4] Ruzhansky M. // Arch. Math. 1999. V. 72. № 1. P. 68–76. [5] Seeger A., Sogge C. D., Stein E. M. // Ann. of Math. 1991. V. 134. P. 231–251.

Эдинбургский университет
E-mail: ruzh@maths.ed.ac.uk

Принято редколлегией
26.01.2000