Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Туганбаев, Модули над наследственными нётеровыми первичными кольцами, *УМН*, 2000, том 55, выпуск 2, 151–152

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm283>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 05:43:58

МОДУЛИ НАД НАСЛЕДСТВЕННЫМИ НЕТЕРОВЫМИ ПЕРВИЧНЫМИ КОЛЬЦАМИ

А. А. ТУГАНБАЕВ

Модуль M называется π -проективным, если для любых его подмодулей U и V таких, что $U + V = M$, существует такой эндоморфизм f модуля M , что $f(M) \subseteq U$ и $(1 - f)(M) \subseteq V$.

ЛЕММА 1 [1; 55.16, 53.6]. Если A – полуцепное артиново кольцо, то A – кольцо конечного типа представлений, и каждый A -модуль является прямой суммой циклических цепных квазипроективных модулей.

ЛЕММА 2. Пусть A – наследственное нётерово первичное кольцо.

- (1) Все собственные фактор-кольца кольца A являются полуцепными артиновыми.
- (2) Все A -модули без кручения являются плоскими.
- (3) A – либо ограниченное, либо примитивное кольцо. (Если A – ограниченное примитивное кольцо, то A – простое артиново кольцо.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) доказано в [2; 25.5.1]. (2) доказано в [2; 2.4.7]. (3) доказано в [3].

ТЕОРЕМА 1. Пусть M – модуль над наследственным нётеровым первичным кольцом A , X – чистый неточный подмодуль модуля M . Тогда X – прямое слагаемое модуля M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $B \equiv r(X)$, $R \equiv A/B$, $h: M \rightarrow MB$ – естественный эпиморфизм. Можно считать, что $0 \neq B \neq A$. Так как X – чистый подмодуль в M , то $X \cap MB = XB = 0$. По леммам 2(1) и 1 R – кольцо конечного типа представлений. Поэтому все R -модули чисто-инъективны [1; 54.3] и $h(M)$ – чисто-инъективный R -модуль.

Допустим, что $h(X)$ – чистый подмодуль чисто-инъективного R -модуля $h(M)$. Тогда $h(X)$ – прямое слагаемое R -модуля $h(M)$. Пусть $h(M) = h(X) \oplus h(Y)$, где $MB \subseteq Y \subseteq M$. Тогда $M = X + Y$ и $X \cap Y = X \cap MB = 0$. Поэтому $M = X \oplus Y$.

Остается доказать, что $h(X)$ – чистый подмодуль R -модуля $h(M)$. Пусть $\overline{D} \equiv D/B$ – любой левый идеал кольца R , где D – левый идеал кольца A , содержащий B . Пусть $h(x) \in h(X) \cap h(M)\overline{D}$, где $x \in X$. Тогда существуют такие элементы $d_1, \dots, d_k \in D$, $b_1, \dots, b_n \in B$ и $m_1, \dots, m_k, t_1, \dots, t_n \in M$, что $x = \sum_{i=1}^k m_i d_i + \sum_{j=1}^n t_j b_j \in M(D+B) \cap X$. Так как X – чистый подмодуль в M , то $M(D+B) \cap X = X(D+B)$. Поэтому $h(x) \in h(XD) + h(XB) = h(X)\overline{D}$. Тогда $h(X) \cap h(M)\overline{D} \subseteq h(X)\overline{D}$ и $h(X)$ – чистый подмодуль A/B -модуля $h(M)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть A – ограниченное наследственное нётерово первичное кольцо, M – A -модуль с ненулевой периодической частью T . Тогда M имеет ненулевое цепное счетно порожденное периодическое прямое слагаемое X , которое может быть выбрано циклическим неточным модулем в случае неинъективности модуля T . Следовательно, если модуль T не инъективен, то M имеет ненулевое циклическое цепное неточное прямое слагаемое.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как M/T – A -модуль без кручения, то M/T плосок по лемме 2(2). Поэтому T чист в M [4; с. 37]. Можно считать, что A не является простым артиновым. По лемме 2(3) A не является примитивным справа. По теореме 10 из [5] T имеет ненулевое равномерное периодическое прямое слагаемое X , которое может быть выбрано циклическим неточным модулем в случае неинъективности модуля T . Так как X – прямое слагаемое чистого подмодуля T в M , то X – чистый подмодуль в M . Пусть E – инъективная оболочка равномерного модуля X . По теореме 4 из [6] E – цепной счетно порожденный модуль, у которого все собственные подмодули циклически. Тогда X – цепной модуль и либо $X = E$, либо X циклический. Поэтому достаточно доказать, что X – прямое слагаемое в M . Это так, если X инъективен. Допустим, что X циклический. По лемме 2 из [6] $r(X) \neq 0$. По теореме 1 X – прямое слагаемое в M .

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00382).

ЛЕММА 3. Пусть M и Y_i ($i \in I$) – A -модули.

- (1) Если все Y_i M -проективны, то $\bigoplus_{i \in I} Y_i$ M -проективен.
- (2) Если Y – подфактор модуля $\bigoplus_{i \in I} Y_i$, X – модуль, проективный относительно всех модулей Y_i , причем либо I конечно, либо X конечно порожден, то X Y -проективен.
- (3) Если $\bigoplus_{i \in I} Y_i$ π -проективен, то Y_i Y_j -проективен для любых несовпадающих $i, j \in I$.
- (4) Если A артиново справа, то M_A квазипроективен $\iff M_{A/r(M)}$ проективен.
- (5) Если M квазипроективен, то M π -проективен.
- (6) M_A квазипроективен (π -проективен) $\iff M_{A/r(M)}$ – квазипроективен (π -проективен).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1), (2) и (3) доказаны в [1; 18.1, 18.2, 41.14]. (4) доказано в теореме 2.3 из [7]. (5) см. в [1; с. 369]. (6) проверяется непосредственно.

ЛЕММА 4. Пусть модуль M является прямой суммой конечно порожденных модулей M_i ($i \in I$). Равносильны условия:

- (1) M – квазипроективный модуль;
- (2) M π -проективен и все M_i квазипроективны;
- (3) M_i M_j -проективен для всех $i, j \in I$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) $\implies$ (2) следует из леммы 3(5) и того, что прямые слагаемые квазипроективных модулей квазипроективны. (2) $\implies$ (3) следует из квазипроективности модулей M_i и того, что по лемме 3(3) M_i M_j -проективен для любых несовпадающих $i, j \in I$. (3) $\implies$ (1) следует из лемм 3(1) и 3(2).

ЛЕММА 5. (1) Пусть M – прямая сумма конечно порожденных квазипроективных модулей. Тогда M квазипроективен $\iff M$ π -проективен.

- (2) Если $X \oplus N$ π -проективен и Y – подфактор модуля N , то X X -проективен.
- (3) Если M – модуль над полуцелным артиновым кольцом, то M π -проективен $\iff M$ квазипроективен $\iff M$ – проективный $A/r(M)$ -модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) следует из леммы 4. (2) следует из лемм 3(3) и 3(2). (4) следует из (1), (2) и лемм 3(4) и 4.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если M – неточный модуль над наследственным нётеровым первичным кольцом A , то M_A π -проективен $\iff M_A$ квазипроективен $\iff M_{A/r(M)}$ проективен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предложение 2 следует из лемм 2(1), 3(6), 5(3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Wisbauer R. Foundations of Module and Ring Theory. Philadelphia: Gordon and Breach, 1991. [2] Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 2. М.: Мир, 1979. [3] Lenagan T. H. // J. London Math. Soc. 1973. V. 6. P. 241–246. [4] Stenström B. Rings of Quotients: An Introduction to Methods of Ring Theory. Berlin: Springer-Verlag, 1975. [5] Singh S. // Canad. J. Math. 1975. V. 27. № 4. P. 867–883. [6] Singh S. // Canad. J. Math. 1974. V. 26. № 5. P. 1173–1185. [7] Fuller K. R., Hill D. A. // Arch. Math. 1970. V. 21. P. 369–373.