Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. А. Шамоян, О слабой обратимости в весовых анизотропных пространствах голоморфных в поликруге функций, *УМН*, 2000, том 55, выпуск 2, 153–154

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm284>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 17:39:49

О СЛАБОЙ ОБРАТИМОСТИ В ВЕСОВЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ГОЛОМОРФНЫХ В ПОЛИКРУГЕ ФУНКЦИЙ

Ф. А. ШАМОЯН

Пусть

$$U^n = \{z = (z_1, \dots, z_n), |z_j| < 1, j = \overline{1, n}\}$$

– единичный поликруг в n -мерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$,

$$\varphi(r) = (\varphi_1(r_1), \dots, \varphi_n(r_n)), \quad r = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}_+^n,$$

функции $\varphi_j, j = \overline{1, n}$, являются монотонно растущими, положительными функциями на $(0, +\infty)$. Через $A^p(\varphi)$ ($p > 0$) обозначим пространство голоморфных в U^n функций, для которых

$$(1) \quad \|f\|_{A^p(\varphi)} = \left(\int_{U^n} |f(z)|^p \exp\left(-\varphi\left(\frac{1}{1-|z|}\right)\right) dm_{2n}(z) \right)^{1/p} < +\infty,$$

где m_{2n} – $2n$ -мерная мера Лебега на U^n ,

$$\exp\left(-\varphi\left(\frac{1}{1-|z|}\right)\right) = \prod_{j=1}^n \exp\left(-\varphi_j\left(\frac{1}{1-|z_j|}\right)\right), \quad z = (z_1, \dots, z_n) \in U^n.$$

В дальнейшем вектор-функцию φ с вышеуказанными свойствами назовем весовой. Символом $H^p(U^n)$, $0 < p \leq +\infty$, обозначим классы Харди в U^n (см. [1]).

Пусть X – некоторое топологическое пространство голоморфных функций в U^n , в котором множество всех многочленов от $z_1, \dots, z_n$ всюду плотно, при этом операторы

$$\delta_z(f) = f(z), \quad T(f)(z_1, \dots, z_n) = z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n \cdot f(z_1, \dots, z_n), \quad z = (z_1, \dots, z_n) \in U^n,$$

являются непрерывными в X .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $f \in X$, $f(z) \neq 0, z \in U^n$, и существует последовательность многочленов $\{P_n\}_{n=1}^\infty$ такая, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n f = 1$, причем сходимость имеет место в топологии пространства X . Тогда говорят, что f слабо обратимый элемент пространства X .

Отметим, что слабая обратимость функции f равносильна ее цикличности для оператора сдвига $S(f)(z_1, \dots, z_n) = z_1 \cdot \dots \cdot z_n f(z_1, \dots, z_n)$, т.е. полноте системы $\{S^k(f)\}_{k \in \mathbb{Z}_+^n}$ в пространстве X .

В этой заметке мы получим полное описание тех весов φ , для которых каждая $f \in H^\infty(U^n)$, $f(z) \neq 0, z \in U^n$, является слабо обратимой в пространстве $A^p(\varphi)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ – весовая вектор-функция на $\mathbb{R}_+^n$,

$$(2) \quad m_k^{(j)} = \sup_{0 < r < 1} \left(r^k \exp\left(-\varphi_j\left(\frac{1}{1-r}\right)\right) \right),$$

$$M_k^{(j)} = \sup_{k \geq 1} (k^m m_k^{(j)}), \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

$$(3) \quad T_j(r) = \sup_{m \geq 1} \left(\frac{r^m}{M_m^{(j)}} \right), \quad r \in (0, +\infty), \quad j = \overline{1, n}.$$

Тогда если

$$(4) \quad \int_0^{+\infty} \frac{\lg T_j(r)}{r^{3/2}} dr = +\infty, \quad j = \overline{1, n},$$

то каждая $f \in H^\infty(U^n)$, $f(z) \neq 0, z \in U^n$, слабо обратима в $A^p(\varphi)$ ($1 \leq p < +\infty$).

Обратно, если функции $\varphi_j(e^y)$, $j = \overline{1, n}$, являются выпуклыми и при некотором j_0 , $1 \leq j_0 \leq n$, интеграл (4) сходится, то существует функция $f \in H^\infty(U^n)$, $f(z) \neq 0, z \in U^n$, не слабо обратимая в $A^p(\varphi)$ при всех $1 \leq p < +\infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В одномерном случае при более жестких ограничениях на регулярность роста функции φ в других терминах аналогичный результат получен Н. К. Никольским в [2], а в пространстве голоморфных в круге функций с заданным ростом коэффициентов разложения – А. Берлингом в [3].

Напомним, что (см. [1]) функция $f \in H^p(U^n)$ называется внешней, если

$$\ln |f(0)| = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T^n} \ln |f(\zeta)| dm_n(\zeta),$$

где T^n – осто́в поликруга U^n , dm_n – n -мерная мера Лебега на T^n . При $n = 1$, как установлено Н. К. Никольским (см. [2]), если $f \in A^p(\varphi)$, $1 \leq p < +\infty$, – внешняя функция, то f слабо обратима в $A^p(\varphi)$ при произвольных весах φ . Очевидно, что в этих пространствах не всякая внутренняя функция слабо обратима (см. [4]–[6]). В многомерном случае справедлива

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\varphi = (\varphi_0, \dots, \varphi_0)$ – весовая, при этом функция $y \rightarrow \varphi_0(e^y)$ выпукла на $(0, +\infty)$. Тогда следующие утверждения равносильны:

- 1) каждая внешняя функция $f \in H^\infty(U^n)$ слабо обратима в пространстве $A^p(\varphi)$, $1 \leq p < +\infty$,
- 2) $\int_1^{+\infty} \frac{\lg T_0(r)}{r^{3/2}} dr = +\infty$, где $T_0(r)$ определяется по (3),
- 3) каждая функция $f \in H^\infty(U^n)$, $f(z) \neq 0$, $z \in U^n$, (в частности, каждая внутренняя функция) слабо обратима в $A^p(\varphi)$.

Доказательство теорем 1 и 2 основано на следующих вспомогательных утверждениях.

ЛЕММА 1. Пусть $f \in H^\infty(U^n)$, $f(z) \neq 0$, $z \in U^n$,

$$D_j f(z) = z_j \frac{\partial f(z)}{\partial z_j}, \quad D^k f(z_1, z_2, \dots, z_n) = D_n^{k_n} D_{n-1}^{k_{n-1}} \dots D_1^{k_1} f(z_1, \dots, z_n),$$

$z = (z_1, \dots, z_n) \in U^n$, $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$. Тогда существует голоморфная в U^n функция ψ_k такая, что $D^k f(z) = \psi_k(z) f(z)$, причем

$$|\psi_k(z_1, \dots, z_n)| \leq \frac{C(k) \|f\|_\infty}{(1 - |z_1|)^{3k_1} \dots (1 - |z_n|)^{3k_n}}.$$

ЛЕММА 2. Пусть $f \in A^p(\varphi)$, φ – весовая вектор-функция. Если $f(z_1, \dots, z_n) = \sum_{|k|=0}^{+\infty} a_{k_1, \dots, k_n} z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}$, $z = (z_1, \dots, z_n) \in U^n$, $k = (k_1, \dots, k_n)$, то справедлива оценка

$$\frac{|a_{k_1, \dots, k_n}|}{(1 + k_1) \dots (1 + k_n)} \leq \frac{\|f\|_{A^p(\varphi)}}{\sup_{r \in \mathbb{Q}^n} \{r^k \exp\{\frac{1}{p} \varphi(\frac{1}{1-r})\}\}}, \quad k = (k_1, \dots, k_n), \quad r^k = r_1^{k_1} \dots r_n^{k_n}.$$

В следующей лемме дается оценка роста функции $f \in A^p(\varphi)$ на диагонали поликруга.

ЛЕММА 3. Пусть $f \in A^p(\varphi)$, $1 \leq p < +\infty$, $Df(z) = f(z, z, \dots, z)$, $z \in U = U^1$. Тогда имеет место оценка

$$\int_U |Df(z)|^p \exp\left(-\varphi\left(\frac{2}{1-|z|}\right)\right) (1-|z|)^{2n-2} dm_2(z) \leq c \|f\|_{A^p(\varphi)}^p.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Рудин У. Теория функций в поликруге. М.: Мир, 1974. [2] Никольский Н. К. Избранные задачи весовой аппроксимации и спектрального анализа // Труды МИАН. 1974. Т. 120. [3] Beurling A. // Acta Math. 1964. V. 112. № 3–4. P. 239–255. [4] Мергелян С. Н. // УМН. 1953. Т. 8. № 4. С. 3–63. [5] Шапиро Г. // Матем. сб. 1967. Т. 73(115). С. 320–330. [6] Шамолян Ф. А. // Изв. АН Арм. ССР. Сер. Матем. 1970. Т. 5. № 5. С. 419–433.