Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Эстеров, Плотности чисел Бетти множеств меньших значений квазипериодических функций, *УМН*, 2000, том 55, выпуск 2, 157–158

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm286>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 16:19:59

ПЛОТНОСТИ ЧИСЕЛ БЕТТИ МНОЖЕСТВ МЕНЬШИХ ЗНАЧЕНИЙ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

А. И. ЭСТЕРОВ

Для гладкой функции $f: M \rightarrow \mathbb{R}^1$ обозначим через M_c множество меньших значений $\{x \in M \mid f(x) \leq c\}$ ($c \in \mathbb{R}^1$). Для почти любой функции f на замкнутом многообразии M (т.е. для любой функции кроме множества бесконечной коразмерности в пространстве всех функций) топология множества M_c (в частности, его числа Бетти) меняется только при проходе c через одно из конечного числа критических значений функции f . Для периодической (имеющей k линейно независимых периодов) функции $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^1$ числа Бетти $b_j(M_c)$, вообще говоря, бесконечны. Нетрудно видеть, что для почти любой периодической функции существует предел

$$(1) \quad \beta_j(c) = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{b_j(B_v^k \cap M_c)}{V(B_v^k)},$$

где $B_v^k \in \mathbb{R}^k$ – замкнутый шар радиуса v с центром в нуле, а $V(B_v^k)$ – объем этого шара. Величина $\beta_j(c)$ также меняется только при прохождении одного из конечного числа критических значений функции f .

Пусть теперь f – гладкая квазипериодическая функция.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Квазипериодической функцией* называется композиция $f = \phi \circ P \circ L$ линейного мономорфизма $L: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$, естественной факторизации $P: \mathbb{R}^n \rightarrow T^n$ и гладкой функции $\phi: T^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ при условии, что образ $P \circ L$ всюду плотен в T^n .

Функция f имеет, вообще говоря, бесконечное количество критических значений, которые как-то распределены в $\mathbb{R}^1$. В некоторых моделях хаоса (см. [1]) возникает вопрос о существовании предела (1) и о характере его зависимости от c . Существование предела типа (1) для эйлеровой характеристики множества M_c и его кусочная гладкость как функции от c были доказаны в [2]. Здесь доказывается следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Для почти любой квазипериодической функции f предел (1) существует при любом c и непрерывно зависит от c .*

В формулировке теоремы “для почти любой квазипериодической функции f ” означает “для почти любой функции $\phi: T^n \rightarrow \mathbb{R}^1$, определяющей f ”.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Исчезающим циклом* критической точки x_0 индекса α функции f назовем сферу

$$S^{\alpha-1} = \{x \in M \mid u_1^2 + \dots + u_\alpha^2 = \delta; u_{\alpha+1} = \dots = u_k = 0\}$$

для достаточно малого δ , где $u_1, \dots, u_k$ – координаты в окрестности U точки x_0 , в которых f имеет вид $f(x_0) - u_1^2 - \dots - u_\alpha^2 + u_{\alpha+1}^2 + \dots + u_k^2$.

Исчезающий цикл точки x_0 не гомологичен нулю в $U \cap M_{f(x_0)} \setminus \{x_0\}$, но может быть гомологичен нулю во всем $M_{f(x_0)} \setminus \{x_0\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Назовем *радиусом обнуления* $r(x_0)$ критической точки x_0 минимальное v , при котором исчезающий цикл критической точки x_0 гомологичен нулю внутри $B_v^k \cap M_{f(x_0)} \setminus \{x_0\}$ (если такого v не существует, положим $r(x_0)$ равным бесконечности).

Теперь можно сформулировать два утверждения, из которых следует теорема 1.

ТЕОРЕМА 2. *Для почти любой квазипериодической функции при любом $c, j \in \{0, \dots, k\}$ и $r \in [0, \infty]$ существует конечная плотность критических точек индекса j с радиусом обнуления, меньшим r , лежащих в M_c . Она непрерывно зависит от c . То же самое верно и для плотности критических точек индекса j с бесконечным радиусом обнуления, лежащих в M_c .*

ТЕОРЕМА 3. Плотность $\beta_j(c)$ равна разности плотностей точек индекса j с конечным радиусом обнуления и индекса $j+1$ с бесконечным радиусом обнуления, лежащих в M_c (поэтому она существует для почти любой квазипериодической функции f и непрерывно зависит от c).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2 использует следующие факты, содержащиеся в [2]. Пусть $L: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ – линейный мономорфизм и $P: \mathbb{R}^n \rightarrow T^n$ – естественная факторизация, причем образ $P \circ L$ всюду плотен. Пусть M^{n-k} – подмногообразие в T^n , трансверсальное к образу $P \circ L$. Тогда отношение стандартных форм объема на $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^k$ задает ориентацию и форму объема ω на M^{n-k} .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Интеграл формы ω по M^{n-k} называется *трансверсальным объемом* M^{n-k} и обозначается $\tilde{V}(M^{n-k})$ (трансверсальный объем всегда положителен).

ТЕОРЕМА 4. Пусть $K = (P \circ L)^{-1}(P \circ L(\mathbb{R}^k) \cap M^{n-k})$ – дискретное подмножество в $\mathbb{R}^k$. Если трансверсальный объем M^{n-k} конечен, то существует и равна этому объему плотность множества K : $\tilde{V}(M^{n-k}) = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\#(K \cap B_v^k)}{V(B_v^k)}$, где $\#$ обозначает количество точек в множестве, $B_v^k \subset \mathbb{R}^k$ – шар радиуса v с центром в нуле, а $V(B^v)$ – объем этого шара.

Пусть M_j^{n-k} – множество точек $x \in T^n$, для которых ограничение df на подпространство $L \circ P(\mathbb{R}^k) \subset T_x T^n \cong \mathbb{R}^n$ равно нулю, а ограничение $d^2 f$ на это подпространство является невырожденной квадратичной формой индекса j . Существование плотностей, указанных в формулировке теоремы 2, следует из применения теоремы 4 к множеству M_j^{n-k} и его открытым подмножествам $M_{j,r}^{n-k}$, заданным условиями $r(x) < r$. Эти плотности равны соответственно $\tilde{V}(M_{j,r}^{n-k} \cap M_c)$ и $\tilde{V}(M_{j,\infty}^{n-k} \cap M_c) - \tilde{V}(M_{j,\infty}^{n-k} \cap M_c)$. Почти любая $\phi: T^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ не является константой ни на каком открытом подмножестве в M_j^{n-k} , и поэтому для почти любой квазипериодической функции f указанные выше объемы непрерывны как функции от c .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Рассмотрим $N_v = B_v^k \cap M_c(f)$, где $B_v^k \in \mathbb{R}^k$ – шар радиуса v с центром в нуле. Из стандартных рассуждений теории Морса (примененных к многообразию с краем) следует, что число Бетти $b_j(N_v)$ равно $K_1 - K_2 + d$, где K_1 – число критических точек x индекса j , исчезающие циклы которых гомологичны нулю в $N_v \setminus \{x\}$; K_2 – число критических точек x индекса $j+1$, исчезающие циклы которых не гомологичны нулю в $N_v \setminus \{x\}$; d ограничено по модулю суммарной кратностью вырожденных критических точек функции f в N_v и критических точек ограничения $f|_{\partial B_v}$ этой функции на границу шара. Отношение $d/V(B_v)$ стремится к нулю для почти любой функции f , так как суммарная кратность вырожденных точек конечна для почти любой функции f , а суммарная кратность критических точек $f|_{\partial B_v}$ растет пропорционально $(k-1)$ -мерному объему сферы ∂B_v . Из теоремы 2 следует, что $K_1/V(B_v)$ и $K_2/V(B_v)$ стремятся к плотностям критических точек индекса j с конечным и индекса $j+1$ с бесконечным радиусом обнуления соответственно, лежащих в M_c (когда эти плотности существуют). Переход к пределу при $v \rightarrow \infty$ в равенстве $b_j(N_v)/V(B_v) = K_1/V(B_v) - K_2/V(B_v) + d/V(B_v)$ дает утверждение теоремы 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Заславский Г. М., Захаров М. Ю., Сагдеев Р. З., Усиков Д. А., Черников А. А. // Письма в ЖЭТФ. 1986. Т. 44. № 7. С. 349–353. [2] Гусейн-Заде С. М. // Функциональный анализ и его прил. 1989. Т. 23. № 2. С. 55–56.