Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. М. Ахметьев, Вложения компактов, стабильные гомотопические группы сфер
и теория особенностей, *УМН*, 2000, том 55, выпуск 3, 3–62

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm290>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 15:56:57

УДК 515.142

ВЛОЖЕНИЯ КОМПАКТОВ, СТАБИЛЬНЫЕ ГОМОТОПИЧЕСКИЕ
ГРУППЫ СФЕР И ТЕОРИЯ ОСОБЕННОСТЕЙ

П. М. АХМЕТЬЕВ

В обзоре рассмотрены новые приложения теории гомотопий и теории особенностей в геометрической и дифференциальной топологии. Получено решение проблемы Р. Давермана о вложении сфероподобного компакта в евклидово пространство. Найдены приложения в теории псевдоизотопий и топологии многообразий малых размерностей.

Библиография: 88 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

Часть 1. Метод ортогонального проектирования в геометрической топологии	4
Введение	4
1. Предварительные сведения	10
2. Дискретная реализация отображений n -мерной сферы $S^n \rightarrow S^n$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{2n}$	16
3. Дискретная реализация отображения n -мерной сферы $S^n \rightarrow S^n$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{2n-d}$	20
4. Вложение S^n -подобных компактов в евклидовы пространства	22
Часть 2. Метод ортогонального проектирования в дифференциальной топологии	23
Введение	23
5. Формулы особенностей I -структуры погруженной 2-поверхности в $\mathbb{R}^3$	28
6. Особенности I -структуры погруженного 3-многообразия в $\mathbb{R}^4$	37
7. Диаграмма Серфа двупараметрического семейства функций	42
8. Доказательство основной теоремы 3	46
9. Аппроксимация вложениями отображений общего положения поверхностей в объемлющем пространстве $\mathbb{R}^4$. Теорема Рохлина о сигнатуре и аналоги инварианта странности для диаграммы узла ..	52
Список литературы	59

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00009).

В философской работе А. Пуанкаре “Ценность науки” [62; с. 188] находим следующее. “Для того чтобы получить математическую непрерывность n -измерений, достаточно взять n подобных шкал, ступени которых будут соответствовать различным значениям n независимых величин, называемых координатами. Таким образом, получится изображение физической непрерывности n измерений . . .” Далее в этой работе находим рассуждения, объясняющие понятие размерности наблюдаемого пространства через мускульные ощущения и проекцию на сетчатку глаза.

Результаты, полученные в статье, относятся к различным разделам топологии. Тем не менее, все они объединены общей идеей: при изучении фигуры $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ($n+1$)-измерения, например, $n+1 = 4$, мы сможем упростить задачу и перейти к изучению фигуры n измерений посредством анализа особенностей ортогонального проектирования $K \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$. В рамках этой идеи будут получены новые приложения теории гомотопических групп сфер и теории особенностей в геометрической и дифференциальной топологии. Работа разбита на две части, каждая из которых снабжена введением, материал в каждой части излагается независимо.

В ч. 1 изучаются конечномерные компакты, имеющие “сложное” локальное строение, посредством более тонкого, по сравнению с размерностью компакта, топологического инварианта, а именно, минимальной размерности евклидова пространства, в которое данный компакт допускает вложение. В частности, получено положительное решение проблемы Р. Давермана о вложении сфероподобного n -мерного компакта, $n \neq 1, 2, 3, 7$, в евклидово $2n$ -пространство (и частичные результаты в направлении ее обобщения). Новое в решении связано с применением теории стабильных гомотопических групп сфер в рамках известного спектрального критерия вложимости.

В ч. 2 изучается пространство псевдоизотопий гладкого замкнутого (односвязного) многообразия высокой размерности. Определяется новая разновидность пространства функций с умеренными особенностями, которое доставляет важную информацию об основном пространстве псевдоизотопий. При изучении гомотопических свойств построенного пространства используются алгебраическая К-теория, классификационные теоремы теории особенностей и классификация погружений многообразий малых размерностей с точностью до кобордизма. Последний раздел посвящен приложениям в топологии гладких многообразий размерностей 3 и 4.

Работа состоит из 9 разделов, причем главные результаты работы, теоремы 1–3 и предложения 1, 2, имеют независимую нумерацию. Следствия и леммы нумеруются согласованно с разделами.

Написанию работы помогли обсуждения с М. М. Постниковым, Е. В. Шепиным и В. А. Васильевым. Полезными оказались обсуждения с Н. Б. Бродским, В. М. Бухштабером, А. Ю. Воловиковым, А. В. Пажитновым, П. Е. Пушкарем, А. Б. Скопенковым, М. В. Смуровым, Ю. П. Соловьевым, А. Сючем, А. Ф. Харшиладзе, А. В. Хохловым, А. В. Чернавским и П. Дж. Эклзомб которым я искренне благодарен.

Часть 1. Метод ортогонального проектирования в геометрической топологии

Введение

Одним из основных понятий, характеризующих топологическое пространство, является понятие размерности. Это понятие было рассмотрено в работах А. Пуанка-

ре и впервые строго определяется в работах П. С. Урысона. Различные подходы при определении понятия размерности связаны с вычислением кратности покрытия, задачей продолжения отображений, понятием гомологии циклов с различными областями коэффициентов. Один из наиболее простых и геометрических подходов предложен в работе П. С. Александрова [14] и связан с понятием ε -сдвига компакта на конечномерный полиэдр. Скажем, что метрический компакт X имеет размерность, не превышающую n , если $\forall \varepsilon > 0$ существует ε -отображение $f: X \rightarrow P^n$ компакта X на n -мерный полиэдр P^n , т.е. такое отображение, для которого $\text{diam}(f^{-1}(p)) < \varepsilon, p \in P$. Ключевое свойство компактов размерности $\leq n$ выявляет следующая теорема, независимо доказанная Л. С. Понтрягиным [64] и Нёбелингом [61].

ТЕОРЕМА ВЛОЖИМОСТИ. *Пусть X – компакт размерности $\leq n$. В пространстве $C(X; \mathbb{R}^m)$ непрерывных отображений этого компакта в $\mathbb{R}^m$ подпространство всех вложений образует открытое и всюду плотное подмножество при условии $m \geq 2n + 1$.*

В самое последнее время рядом авторов [22], [48], [79] независимо были получены сильные обобщения теоремы Понтрягина–Нёбелинга. Укажем лишь на одно такое обобщение. Известно, что для компактов общего вида логарифмический закон сложения размерности имеет следующий вид $\dim(X \times X) \leq 2 \dim(X)$. Если для n -мерного компакта выполнено строгое неравенство $\dim(X \times X) < 2n$, то для такого компакта пространство $E(X, \mathbb{R}^{2n})$ вложений является всюду плотным подмножеством в пространстве $C(X, \mathbb{R}^{2n})$ всех непрерывных отображений. В настоящей работе теорема Понтрягина–Нёбелинга обобщается с другой точки зрения, что приводит к неожиданным приложениям стабильной теории гомотопий сфер. Нами рассматривается случай $m \leq 2n + 1$. Накладывая те или иные ограничения на топологию пространства X , рассмотрим проблему нахождения минимальной размерности евклидова пространства, в которое компакт X допускает вложение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Скажем, что метрический компакт X является S^n -подобным, если $\forall \varepsilon > 0$ существует ε -отображение $f: X \rightarrow S^n$ компакта на сферу размерности n .

ПРОБЛЕМА ДАВЕРМАНА О ВЛОЖЕНИИ S^n -ПОДОБНОГО КОМПАКТА [21; проблема E16]. *Верно ли, что произвольный S^n -подобный компакт можно вложить в пространство $\mathbb{R}^{2n}$?*

Понятию S^n -подобного компакта можно дать эквивалентное определение в терминах обратного предела спектра отображений n -мерной сферы. Понятие спектра мы здесь рассматриваем, как в [37]. Это определение наминается в разделе 4. Пусть X – обратный предел этого спектра, снабженный стандартной метрикой. Произвольный S^n -подобный компакт, в смысле предшествующего определения, гомеоморфен пространству X для некоторого выбора спектра.

Главным результатом первой части работы является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *В предположении $n \neq 1, 2, 3, 7$ произвольный S^n -подобный компакт допускает вложение в пространство $\mathbb{R}^{2n}$.*

Близкий по формулировке результат другим методом получен в работе [45]. Там доказано, что произвольный T^n -подобный компакт, т.е. компакт, допускающий сколь

угодно малый ε -сдвиг на n -мерный тор T^n , при условии $n \neq 1$ вкладывается в пространство $\mathbb{R}^{2n}$. При $n = 1$ проблема Давермана имеет отрицательное решение. Действительно, для произвольного натурального $p > 1$ определено пространство p -адического соленида, которое является косым произведением канторовского совершенного множества на окружность. Напомним, что это пространство получено в результате пересечения бесконечной последовательности вложенных полноториев, каждый из которых вложен в предыдущий в окрестности его средней линии со степенью p , при этом диаметры полноториев стремятся к 0. Это пространство имеет размерность 1, тем не менее не может быть вложено в плоскость. Можно ли обобщить понятие соленида на старшие размерности? На основании предложения 1.Б (формулировку см. далее) выдвигается следующая гипотеза.

ГИПОТЕЗА. *Существуют S^3 - и S^7 -подобные компакты, которые не вкладываются в евклидовы пространства размерностей 6 и 14 соответственно.*

В случае положительного решения наиболее интересной представляется проблема явного описания таких компактов, обладающих богатой структурой симметрии.

Следующая проблема является естественным обобщением проблемы Давермана.

ОБОБЩЕННАЯ ПРОБЛЕМА ДАВЕРМАНА О ВЛОЖЕНИИ S^n -ПОДОБНОГО КОМПАКТА. *Для данного натурального n найти наименьшую размерность $m = m(n)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^m$, в которое вкладывается произвольный S^n -подобный компакт.*

Автору не известно, верно ли, что функция $\overline{M}(n) = \min_{n' > n} (2n' - m(n'))$ такова, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{M}(n) = +\infty$. В направлении решения обобщенной проблемы Давермана доказан следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. *Для произвольного сколь угодно большого числа k существует число $n = n(k)$ такое, что произвольный S^n -подобный компакт вкладывается в пространство $\mathbb{R}^{2n-k}$. Эквивалентно, $\sup_n (2n - m(n)) = +\infty$.*

Решение проблем Давермана можно условно разбить на две части. Первая часть связана с геометрическими конструкциями, возникающими в процессе представления компакта как обратного предела спектра. В книге [37] доказано, что произвольный n -мерный компакт X допускает представление как обратный предел спектра, который состоит из отображений полиэдров размерности n . При этом S^n -подобный компакт представляется обратным пределом спектра отображений n -мерной сферы. Критерий вложения обратного предела спектра, который мы используем, является прямым обобщением результатов независимых работ многих авторов, см., например, [73], [75].

Вторая часть решения проблемы связана с так называемой проблемой реализации отображений, которая в интересующем нас случае связана с вычислением и описанием гомотопических групп сфер. Результаты вычислений в некоторых случаях могут быть использованы для построения вложений конкретных компактов. Решение проблемы Давермана вытекает из положительного решения гипотезы Хопфа, полученного Адамсом. Решение обобщенной проблемы Давермана следует искать, исследуя обобщенный инвариант Хопфа и связанную с этим инвариантом ЕНР-последовательность Джеймса–Уайтхеда [41], геометрическое построение которой предложено в работе [46]. Сформулируем понятие реализации отображений как основной инструмент в решении задачи вложения компактов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОНЯТИЯ ДИСКРЕТНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ. Пусть A, B, X — гладкие (A, B — замкнутые, если не оговорено противное) многообразия, $\dim(A) < \dim(X)$, $\dim(B) < \dim(X)$, $f: A \rightarrow B$ — непрерывное отображение и $I: B \subset X$ — гладкое вложение. Скажем, что отображение f *дискретно реализуется в X (rel I)* (т.е. относительно I), если существует последовательность вложений $\{h_n\}$, $h_n: A \rightarrow X$, такая, что выполнено условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A} \|h_n(x) - I \circ f(x)\| = 0.$$

Эквивалентно, отображение f *дискретно реализуется в X (rel I)*, если существует вложение $\bar{h}: A \rightarrow X$, сколь угодно близко аппроксимирующее композицию $I \circ f$ в C^0 -метрике пространства отображений. Допуская вольность речи, будем говорить, что f дискретно реализуется в X (или реализуется в X), предполагая при этом, что I задано. В интересующем нас случае A, B суть n -мерные сферы, $X = \mathbb{R}^m$ — евклидово пространство размерности m , I — стандартное вложение.

Близкое понятие изотопической реализации отображений было изучено Л. В. Келдыш в работе [44]. Строго говоря, мы рассматриваем аналогичное понятие, связанное с переходом от объемлемой изотопии пространства-образа к более часто используемому понятию изотопии вложения, а также с переходом из топологической категории в гладкую категорию. Понятие изотопической реализации используется в работе [73] для более тонкого анализа, связанного со спектральным критерием вложимости в случае, когда этажи обратного предела, определяющие компакт, не являются многообразиями. Это же понятие является основным при определении понятия “ручного” и “дикого” вложения компактов в теории М. А. Штанько, см. [74].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОНЯТИЯ ИЗОТОПИЧЕСКОЙ РЕАЛИЗАЦИИ. Скажем, что отображение f *изотопически реализуется в X (rel I)*, если существует C^∞ -гладкая гомотопия (псевдоизотопия) $F_t: A \rightarrow X$, $t \in [0; 1]$, удовлетворяющая следующим условиям.

1. Для каждого $t \in [0; 1]$ отображение $F_t: A \rightarrow X$ является гладким вложением.
2. Гомотопия F_t продолжается при $t \rightarrow 0+$ до непрерывного отображения $I \circ f = F_0: A \rightarrow X$.

Понятие изотопической реализации важно со многих точек зрения. Во-первых, на основании этого понятия в [73] доказаны не только достаточные, но и необходимые условия вложимости компактов. Во-вторых, уже в простейшем случае, когда A, B являются n -сферами, проблема изотопической реализации приводит к нерешенным задачам в топологии контролируемых отображений. Очевидно, что изотопическая реализация отображения f влечет его дискретную реализацию. Верно ли обратное?

В работе [56] доказано, что в случае, когда f — кусочно-линейное отображение размерности > 2 , обратное утверждение истинно. В работе автора [8] доказано, что при $n = 4k + 1$, $n > 5$, всякое отображение $f: S^n \rightarrow S^n$ изотопически реализуется в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$. Этот результат является технически сложным, кроме того, в дальнейшем планируется исследовать возможные обобщения и результат нельзя считать окончательным. С другой стороны, в [76] построен пример отображения $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

параметризующего дикую дугу, допускающего дискретную реализацию, но не допускающего изотопическую.¹

С. А. Мелихов недавно построил удивительный пример отображения $f: D^3 \cup P^3 \rightarrow \mathbb{R}^6$, где P^3 – трехмерный полноторий, D^3 – трехмерный диск, $D^3 \cup P^3$ – их несвязное объединение. Это отображение допускает дискретную реализацию, но не допускает изотопическую, см. [56]. (Для кусочно-линейных отображений, и даже для более широкого класса отображений, описанного в [56], понятия дискретной и изотопической реализации эквивалентны.) Легко этот пример обобщить и построить при каждом $n \geq 3$ отображение $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, которое допускает дискретную реализацию, но не допускает изотопическую; это было сделано в совместной работе С. А. Мелихова и автора [11]. При условии метастабильного ранга в этой же работе удалось описать полное алгебраическое препятствие к изотопической реализации отображения f . В частности, из этого вытекает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА ОБ ИЗОТОПИЧЕСКОЙ РЕАЛИЗАЦИИ В КОРАЗМЕРНОСТИ 1. *При условии метастабильного ранга, т.е. при условии $m > \frac{3(n+1)}{2}$, для произвольного отображения $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, которое дискретно реализуется, отображение $I \circ f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$, $I: \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$, реализуется изотопически.*

Доказательство этого факта основано на достаточно трудоемком критерии, который построен в терминах изовариантных отображений в работе [56], по аналогии с критерием Хефлигера–Хирша изотопности двух гладких вложений, в форме, предложенной в книге [1].

Понятие изотопической реализации следует рассматривать в более общей категории. Пусть $Emb[A = S^n; X = \mathbb{R}^{n+k}]$ – пространство C^0 -гладких вложений $A \rightarrow X$, снабженное C^0 -топологией. Рассмотрим пространство W , полученное пополнением пространства $Emb[S^n; \mathbb{R}^{n+k}]$ в C^0 -топологии пространства отображений. Точки из подпространства $W \setminus Emb[S^n; \mathbb{R}^{n+k}]$, которое мы будем обозначать через V , представляются сингулярными непрерывными отображениями $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$, дискретно реализующимися в пространстве $\mathbb{R}^{n+k}$.

По аналогии с определением Квинна [67] (см. также [36]) определено пространство концов $e(Emb[S^n; \mathbb{R}^{n+k}])$ исходного пространства вложений, которое состоит из всевозможных отображений $w: [0; 1[\rightarrow Emb[S^n; \mathbb{R}^{n+k}]$. Обозначим через $\bar{e} \subset e$ подпространство концов, допускающих непрерывную компактификацию $\bar{w}: [0; 1] \rightarrow W$. Определено отображение $F: \bar{e} \rightarrow W$ по формуле $F(\bar{w}) = \bar{w}(1)$. Обозначим через E образ пространства $\bar{e}$ при этом отображении.

Пространство концов $\bar{e}$ представляется теперь как пространство изотопических реализаций отображений из E . Проблема изотопической реализации может быть обобщена и переформулирована следующим образом: верно ли, что произвольной предельной точке $w_0 \in W$ соответствует некоторый конец в пространстве $\bar{e}$, иными словами, верно ли, что $E = W$? Конструкция Мелихова дает отрицательный ответ на этот вопрос. Для отображений в метастабильном ранге пространство $W \setminus E$ оказывается непустым. Каждая точка $W \setminus E$ принадлежит V , причем пространство $Emb[S^n; \mathbb{R}^{n+k}]$ в точках из $W \setminus E$ не является локально-линейно-связным. Построенное обобщение

¹Замечание при корректуре: Автору стало известно, что ранее этот пример был построен Л. В. Кнлдыш в работе “Псевдоизотопия некоторых локально-заузленных дуг в $\mathbb{E}^3$ ”, Докл. АН СССР. 1971. Т. 200. № 1. С. 21–23.

в случае $A = X = S^n$ связано с проблемой аппроксимации клеточно-подобных отображений гомеоморфизмами. Напомню, что согласно теореме Чернавского [18] пространство $\text{Homeo}(S^n; S^n)$ является локально-стягиваемым. Отсюда, как заметил С. А. Мелихов, легко вытекает, что проблема изотопической реализации для отображений $S^n \rightarrow S^n$ сфер (в сфере-образе) решается положительно, более того, сферу можно заменить на произвольное многообразие.

Теперь рассмотрим ряд простейших примеров, поясняющих понятие дискретной реализации. Очевидно, что любое отображение $A \rightarrow B$ при условии $\dim(A) = \dim(B) = n$ реализуется в $(2n+1)$ -мерном многообразии X . Более тонкие рассуждения, приведенные в [75], показывают, что произвольное отображение $f: D^n \rightarrow D^n$, $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| < 1\}$, дискретно (в действительности, изотопически) реализуется относительно стандартного вложения $I: D^n \rightarrow D^{2n}$. Кроме того, существует отображение $g: S^2 \rightarrow S^2$, которое не реализуется относительно вложения $I: S^2 \subset \mathbb{R}^3$. В качестве g можно выбрать отображение, заданное в комплексных координатах на S^2 по формуле $z \rightarrow z^2$.

Основные теоремы 1, 2 вытекают из нижеследующих предложений 1.А и 2. Предложения 1 и 2 являются важными теоремами в дифференциальной топологии. Тем не менее в рамках настоящей работы они имеют лишь вспомогательное значение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. А. *Произвольное отображение $f: S^n \rightarrow S^n$ в предположении $n \neq 7$, $n > 4$ дискретно реализуется в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$.*

Б. *При $n = 1, 3, 7$ существует отображение $f: S^n \rightarrow S^n$, которое дискретно не реализуется в $\mathbb{R}^{2n}$.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Для произвольного натурального d найдется такое число $n = n(d)$, что любое отображение $f: S^n \rightarrow S^n$ дискретно реализуется в пространстве $\mathbb{R}^{2n-d}$.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Из теоремы об изотопической реализации в коразмерности 1 сразу вытекает, что предложение 2 справедливо и для случая изотопической реализации.

ЗАМЕЧАНИЕ. В предположении $m > \frac{3(n+1)}{2}$ из теоремы Хейлигера [34], [1] вытекает, что любые два вложения $S^n \subset \mathbb{R}^m$ связаны изотопией. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что в предложениях 1 и 2 говорится о реализации соответствующего отображения относительно стандартного вложения $S^n \subset \mathbb{R}^m$. Предложение 1.А было доказано в работе [8] в частном случае $n \neq 2^l - 1$ и в работе [9] в общем случае. Краткое доказательство предложения 1.Б приводится в [8].

Теоремы 1 и 2 можно рассматривать как утверждения из теории особенностей. Рассмотрим динамическую систему $\{\alpha_i: S^n \rightarrow S^n\}$, заданную на сфере S^n . В важном частном случае $\alpha_i = \alpha$ не зависят от i . Пусть $X = \lim_{\leftarrow} \alpha_i$ — пространство траекторий динамической системы α_i . Пространство X совпадает с пространством обратного предела спектра $\{\alpha_i\}$ и к нему применимы теоремы 1 и 2. Действительно, обобщенная проблема Давермана состоит в вычислении наименьшего числа координатных функций, определенных на пространстве траекторий X и требующихся для полного разделения точек этого пространства.

Итак, доказательство основных теорем основано на новом приложении стабильной теории гомотопий и позволит по иному подойти к классическим проблемам вложения

компактов в евклидово пространство. Укажем для примера на некоторые из них. Для данного компакта X рассмотрим следующие условия.

(а) Существует T -эквивариантное отображение конфигурационных пространств:

$$(X \times X \setminus \Delta; T) \rightarrow (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \setminus \Delta; T) \approx (S^{m-1}; T).$$

Здесь T – свободная инволюция на декартовом произведении пространств X и $\mathbb{R}^m$ с удаленными диагоналями Δ , которые называются “врезанными квадратами” соответствующих пространств. Имеется естественное эквивариантное отображение $(S^{m-1}; T) \rightarrow (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \setminus \Delta; T)$, которое является гомотопической эквивалентностью пространств с инволюциями, причем на S^{m-1} инволюция является стандартной антиподальной, так что факторпространство является вещественным проективным пространством.

(б) Существует подкомпакт $Y \subset \mathbb{R}^m$ такой, что X и Y квазигомеоморфны, т.е. $\forall \varepsilon > 0$ существуют ε -отображения $X \rightarrow Y$ и $Y \rightarrow X$.

(в) Компакт X вложим в $\mathbb{R}^m$.

Очевидно, что (в) $\Rightarrow$ (б), (в) $\Rightarrow$ (а). В работе [38] замечено, что для случая, когда X есть n -мерный полиэдр и $n \leq m - 3$, $3n < 2m - 4$, все три условия равносильны. Это замечание является непосредственным следствием теоремы Вебера [87], в которой обобщены результаты Хефлигера [34] с категории гладких многообразий на категорию полиэдров. Кроме того, в работе [38] построен пример компакта, который удовлетворяет условию (б), но не удовлетворяет условию (в). В работе [77] построен пример компакта, удовлетворяющего условию (а) при $m = 2$, но не удовлетворяющего условию (в). Таким компактом оказался 3-адический соленоид. Направление для последующих обобщений дается работой М. А. Штанько [74].

Остановимся на структуре первой части работы. В разделе 1 излагаются необходимые предварительные сведения, которые включают в себя элементы теории погружений, в том числе принцип C^0 -плотности Смейла–Громова, связь теории погружений со стабильными гомотопическими группами сфер, отображение Кана–Придди, инвариант Хопфа, обобщенный инвариант Хопфа, теорему Р. Коэна о погружении гладких многообразий. Основным инструментом исследования выступает ЕНР-последовательность Джеймса–Уайтхеда. В разделах 2 и 3 изложены доказательства предложений 1 и 2, и в заключительном разделе 4 напоминаются необходимые сведения из геометрической топологии, что приводит к доказательствам теорем 1 и 2. Здесь используется спектральный критерий вложимости компактов в евклидовы пространства, необходимая модификация которого (ср. [75], [73]), содержится в [8]. Заметим, что используется лишь более легкая часть критерия, связанная лишь с достаточными (необходимые условия опускаются) условиями вложения компактов.

1. Предварительные сведения

Пусть $\varphi: N^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ – гладкое погружение, причем многообразие N^n ориентировано. На пространстве погружений n -мерных многообразий введем отношение кобордантности. Скажем, что два погружения φ_0, φ_1 связаны кобордизмом, $\varphi_0 \sim \varphi_1$, если существует погружение $\Phi: (W^{n+1}, \partial W = N_0^n \cup N_1^n) \rightarrow (\mathbb{R}^{n+m+1} \times [0, 1])$ такое, что выполнены граничные условия $\varphi_i = \Phi|_{N_i^n}: N_i^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+m} \times \{i\}$, $i = 0, 1$, причем

выполнены стандартные условия согласования ориентаций на W и ∂W . Множество классов кобордизмов погруженных ориентированных многообразий образует абелеву группу относительно операции дизъюнктного объединения погружений. Эту группу обозначим через $Imm^{so}(n, m)$. Если условие ориентируемости N^n опустить, то определена другая разновидность группы кобордизмов погружений, которую обозначим через $Imm^o(n, m)$. В предположении, что погружение φ является оснащенным, т.е. зафиксирован изоморфизм нормального расслоения $\nu(\varphi)$ и суммы Уитни m экземпляров тривиального одномерного расслоения ε над N , $\nu = k\varepsilon$, определяются группы $Imm^{so;fr}(n, m)$. При этом требуется, чтобы погружение Φ , определяющее кобордизм двух погружений φ_i , $i = 0, 1$, также было оснащенным, согласованно с оснащением границы. По аналогии с группами $Imm^{so;fr}(n, m)$ определены группы $Imm^{o;fr}(n, m)$. При этом требуется фиксировать изоморфизм $\nu(\varphi) = m\kappa$, где κ – какое-нибудь одномерное расслоение над N . Заметим, что в случае нечетного m расслоение κ необходимо совпадает с ориентирующим расслоением над M . Определение кобордантности погружений дается аналогично, при этом используется равенство $\nu(\Phi) = m\kappa$ с соответствующими условиями согласования на ∂W . По построению очевидно, что $Imm^{so;fr}(n, 1) = Imm^{so}(n, 1)$, $Imm^{o;fr}(n, 1) = Imm^o(n, 1)$. В работе [88] найдена модификация конструкции Понтрягина [65] для оснащенных кобордизмов, позволяющая доказать следующие изоморфизмы. (По поводу ориентируемого случая см. также [28].)

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Справедливы следующие изоморфизмы:*

$$\begin{aligned} Imm^{so;fr}(n, m) &= Imm^{so}(n, 1) = \lim_{k \rightarrow \infty} \pi_{n+k}(S^k) = \pi_{n+1}(\Omega^\infty \Sigma^\infty(S^1)), \\ Imm^o(n, 1) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \pi_{n+k}(\Sigma^{k-1} \mathbb{R}P^\infty) = \pi_{n+1}(\Omega^\infty \Sigma^\infty \mathbb{R}P^\infty). \end{aligned}$$

Для краткости введем обозначение $\lim_{k \rightarrow \infty} \pi_{n+k}(S^k) = \Pi_n$. Рассмотрим конкретные применения этой теоремы. В случае $n = 1$ группа кобордизма $Imm^{so}(1, 1)$ представлена ориентированной кривой (вообще говоря, несвязной), погруженной в плоскость. Изоморфизм $Imm^{so}(1, 1) = \mathbb{Z}/2$ сопоставляет погруженной кривой общего положения четность числа ее точек самопересечения. Аналогично, $Imm^o(1, 1) = \mathbb{Z}/2$. В случае $n = 2$ имеем изоморфизм $Imm^{so}(2, 1) = \mathbb{Z}/2$, см. [31], [88], [65], $Imm^o(2, 1) = \mathbb{Z}/8$, см. [31], [88], [53]. Естественный гомоморфизм $Imm^{so}(2, 1) \rightarrow Imm^o(2, 1)$ определяется мономорфизмом $\mathbb{Z}/2 \hookrightarrow \mathbb{Z}/8$. Образующая группы $Imm^o(2, 1)$ представлена погружением Боя $\psi: \mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, см. [27]. Образующая группы $Imm^{so}(2, 1)$ представлена некоторым погружением тора. Один из возможных вариантов выбора этого погружения, которое, вдобавок, удовлетворяет дополнительным замечательным свойствам, строится в разделе 5 на рис. 2–4. Это погружение называется погружением Константина.

Операции композиции $f_2 \circ f_1: S^{n_1} \rightarrow S^{n_2} \rightarrow S^{n_3}$, $\Pi_{n_1-n_2} \times \Pi_{n_2-n_3} \rightarrow \Pi_{n_1-n_3}$ в кольце стабильных гомотопических групп сфер соответствует операция прямого произведения погружений, задающих соответствующие элементы групп кобордизмов. Тем самым, определена операция

$$Imm^{so}(n_1 - n_2, 1) \times Imm^{so}(n_2 - n_3, 1) \rightarrow Imm^{so;fr}(n_1 - n_3, 2) \approx Imm^{so}(n_1 - n_3, 1).$$

В частности, для образующей $\eta_1 \in Imm^{so}(1, 1)$ произведение $\eta_1^2 \in Imm^{so}(2, 1)$ также является образующей. Построение композиций Тоды на языке теории погружений проведено в работе [46].

Далее нам потребуются гомоморфизм

$$\delta: Imm^{so}(n, 1) \rightarrow Imm^o(n - 1, 1),$$

который является обратным расщепляющим отображением для гомоморфизма Кана–Придди [2]. (По поводу связи с прочими конструкциями см. [54], [46].) Для построения гомоморфизма δ воспользуемся следующим утверждением, доказанным Хиршем в [35].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. *Пусть $f: N^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ – погружение такое, что нормальное расслоение $\nu(f)$ к погруженному многообразию $f(N)$ изоморфно прямой сумме $\mu \oplus \epsilon$, где ϵ – тривиальное одномерное расслоение и $k \geq 2$. Тогда существует регулярная гомотопия, которая связывает погружение f с погружением $I \circ g$, $g: N^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+k-1}$, $I: \mathbb{R}^{n+k-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$, для которого $\nu(g) = \mu$. При этом погружение g удастся определить с точностью до кобордантного.*

Приступим к определению δ . Пусть $\varphi: N^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ – погружение, представляющее элемент из группы $Imm^{so}(n, 1)$. Согласно теореме о приведении в общее положение отображение φ регулярно гомотопно погружению общего положения φ' , для которого множество Δ двукратных точек самопересечения представляет собой образ погруженного многообразия $\dim(\Delta) = n - 1$. Далее, не ограничивая общности, мы предполагаем, что с самого начала $\varphi = \varphi'$. Согласно наблюдению работы [47] (см. также [12]) нормальное расслоение $\nu = \nu(\Delta)$ каноническим образом представлено как сумма двух одномерных расслоений $\varkappa \oplus \epsilon$, где ϵ – тривиальное одномерное расслоение, $\varkappa$ – такое одномерное расслоение, что $w_1(\varkappa)$ совпадает с ориентирующим классом Δ . По предложению 1.2 существует погружение $g: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$, представляющее требуемый класс регулярной гомотопии. Отображение δ определено по формуле $\delta(\varphi) = g$. В случае $\delta: Imm^{so}(1, 1) \rightarrow Imm^o(0, 1)$ имеем $Imm^{so}(1, 1) = \mathbb{Z}/2$, $Imm^o(0, 1) = \mathbb{Z}/2$ и отображение δ ставит в соответствие погруженной кривой $\varphi: N^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ класс кобордизма погружения $g: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^1$ неориентированного нульмерного многообразия, который определяется четностью числа компонент. В случае $\delta: Imm^{so}(2, 1) \rightarrow Imm^o(1, 1)$ погруженной поверхности $\varphi: N^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ставится в соответствие погружение $g: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$, которое получено регулярной гомотопией оснащенной кривой двукратных точек Δ погружения φ в пространстве $\mathbb{R}^3$ к погружению в плоскость, при этом первый вектор оснащения переводится регулярной гомотопией в вектор, перпендикулярный к плоскости, второй вектор переводится в касательный к плоскости. Инвариант кобордизма в группе $Imm^o(1, 1) = \mathbb{Z}/2$ определяется числом точек самопересечения кривой $g(\Delta)$ в плоскости $\mathbb{R}^2$.

Напомним конструкцию стабильного инварианта Хопфа $h: Imm^{so}(n, 1) \rightarrow \mathbb{Z}/2$. Исходное определение можно найти, например, в [59], предложенную ниже модификацию в рамках теории погружений можно найти в работах [12], [24], [46], [50], [80]. Пусть $[\varphi] \in Imm^{so}(n, 1)$; $\psi = \delta(\varphi)$, $\psi \in Imm^o(n - 1, 1)$, $\psi: M^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $M^{n-1} = \Delta(\varphi)$. Определим характеристическое число $\langle w_1^{n-1}(M); [M] \rangle$ и обозначим это число через $h(\varphi)$.

ЛЕММА 1.3. *Отображение $h: Imm^{so}(n, 1) \rightarrow \mathbb{Z}/2$ корректно определено.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi_1: N_1 \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \varphi_2: N_2 \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ — два различных представителя элемента $[\varphi] \in Imm^{so}(n, 1)$. Рассмотрим погружения ψ_1, ψ_2 , построенные по соответствующим многообразиям кратных точек. Заметим, что многообразия $\Delta(\varphi_1)$ и $\Delta(\varphi_2)$ кобордантны, поскольку φ_1 и φ_2 по условию связаны кобордизмом. Соответствующие характеристические числа кобордантных многообразий совпадают. Лемма доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Скажем, что многообразие M^{n-1} допускает ретракцию порядка d (относительно коцикла $\varkappa$), если существует отображение $\bar{r}: M^{n-1} \rightarrow \mathbb{RP}^{n-d-2}$ такое, что коммутативна диаграмма

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} M^{n-1} & \xrightarrow{r} & \mathbb{RP}^\infty \\ & \searrow \bar{r} & \nearrow I \\ & \mathbb{RP}^{n-d-2} & \end{array},$$

в которой I — стандартное вложение проективного подпространства, а отображение r определяется коциклом $\varkappa \in H^1(M; \mathbb{Z}/2)$.

По определению произвольное многообразие M допускает ретракцию порядка -1 . Действительно, по теореме о клеточной аппроксимации произвольное отображение $r: M^{n-1} \rightarrow \mathbb{RP}^\infty$ гомотопно отображению $\bar{r}: M \rightarrow \mathbb{RP}^{n-1}$ в остов проективного пространства размерности $n-1$.

Определим понятие обобщенного инварианта Хопфа и опишем ЕНР-последовательность, связанную с этим инвариантом, следуя построениям работы [47]. Вначале определим следующие разновидности групп кобордизма погружений. Опишем лишь представителей соответствующих групп, опуская описания отношения кобордантности. Группу кобордизма оснащенных вложений $\varphi: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ n -многообразий в коразмерности m обозначим $Emb^{so;fr}(n, m)$. В соответствии с конструкцией Понтрягина имеется изоморфизм $Emb^{so;fr}(n, m) = \pi_{m+n}(S^m)$. Обозначим через $Imm^{so;fr}(n, m; r)$ группу кобордизма оснащенных вложений $\psi: M^n \subset \mathbb{R}^{m+n+r}$ таких, что отображение $\varphi = p \circ \psi: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ является погружением, где $p: \mathbb{R}^{m+n+r} \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ — стандартная проекция. При $0 < m < 2n-2$ и произвольном $r \geq 0$ имеем изоморфизм $Imm^{so;fr}(n, m; r) = \pi_{m+n+r}(S^{r+m})$. По поводу доказательств здесь и далее в этой конструкции см. [47].

Обозначим через $Imm^{o;fr}(n, m; \mathbb{RP}^r)$ группу кобордизма неориентированных оснащенных погружений $\varphi: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$, для которых зафиксирован изоморфизм $\nu(\varphi) = m\varkappa$ (неориентированное оснащение) и таких, что многообразие M^n допускает ретракцию порядка $n-r-1$ по отношению к коциклу, классифицирующему расслоение $\varkappa$. При определении отношения кобордантности также предполагается, что многообразие с краем, задающее кобордизм, допускает ретракцию того же порядка, согласованную с ретракциями границы. Имеем очевидные равенства $Imm^{so;fr}(n, m; \infty) = Imm^{so;fr}(n, m)$, $Imm^{o;fr}(n, m; \mathbb{RP}^\infty) = Imm^{o;fr}(n, m)$.

Построенные группы связаны между собой длинной точной последовательностью:

$$(2) \quad Imm^{o;fr}(n-m-1, m+1; \mathbb{RP}^r) \xrightarrow{P^{r+1}} Emb^{so;fr}(n, m) \xrightarrow{E^r} Imm^{so;fr}(n, m; r) \\ \xrightarrow{H^r} Imm^{o;fr}(n-m, m; \mathbb{RP}^{r-1}) \xrightarrow{P^r} Emb^{so;fr}(n-1; m-1) \rightarrow \dots,$$

в которой связующий гомоморфизм P определен лишь в предположении $0 < m \leq 2n - 2$.

Опишем гомоморфизмы, входящие в последовательность (2). Гомоморфизм E^r индуцирован естественным включением $\mathbb{R}^{m+n} \subset \mathbb{R}^{m+n+r}$. Гомоморфизм H^r сопоставляет классу кобордизма оснащенного погруженного многообразия $\varphi: N^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ класс кобордизма погруженного многообразия Δ двукратных точек, причем фиксируется каноническое расщепление нормального расслоения (в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n+m}$) к Δ в сумму одномерных. Подробнее, определен канонический изоморфизм нормального расслоения $\nu(\Delta)$ и расслоения $m\varepsilon \in \oplus m\mathcal{K}$, где $\mathcal{K}$ есть 1-расслоение, ассоциированное с кошиком $w_1(\mathcal{K})$ канонического накрытия $\overline{\Delta} \rightarrow \Delta$. Согласно предположению 1.2 определено погружение (с точностью до кобордизма) $\psi: \Delta^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^n$ и изоморфизм нормального расслоения $\nu(\psi) = m\mathcal{K}$, тем самым построен элемент из группы $Imm^{o;fr}(n-m; m)$.

Отображение $f: \Delta^{n-m} \rightarrow \mathbb{RP}^\infty$, классифицируемое кошиком $w_1(\mathcal{K})$, допускает ретракцию порядка r , поскольку является многообразием двойных точек самопересечения погружения, которое спроектировано из вложения из коразмерности r . Это показывает, что погружение ψ определяет элемент из группы $Imm^{o;fr}(n-m, m; \mathbb{RP}^{r-1})$.

В частном случае $m = 1, r = \infty$ гомоморфизм

$$Imm^{so}(n, 1) = Imm^{so;fr}(n, 1; r) \xrightarrow{H^\infty} Imm^{o;fr}(n-1, 1; \mathbb{RP}^\infty) = Imm^o(n-1, 1)$$

обратен к гомоморфизму Кана–Придди [3]. В общем случае гомоморфизм H^r называется обобщенным гомоморфизмом Хопфа. В случае $n = m, r = \infty$ композиция

$$Imm^{so}(n, 1) \rightarrow Imm^{so;fr}(n, m) \rightarrow Imm^{o;fr}(0, n) = \mathbb{Z}/2$$

совпадает со стабильным гомоморфизмом Хопфа h , определенным ранее. Конструкцию гомоморфизма P мы опустим, так как для наших построений она непосредственно не понадобится. Она оказывается полезной для алгебраических вычислений, например, может быть использована при доказательстве утверждения, сформулированного ниже в примере 1.6. Необходимые приложения точной последовательности основаны на следующем предложении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.5. Пусть $\varphi: N^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ – погружение общего положения. Пусть $d < [\frac{n}{2}]$. Пусть каждая компонента связности погруженного многообразия $\delta(\varphi) = \psi: \Delta^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ допускает ретракцию порядка d . Тогда композиция $I \circ \varphi: N^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{2n-d}$ аппроксимируется C^∞ -близким вложением $\overline{\varphi}: N^n \subset \mathbb{R}^{2n-d}$, $\|\overline{\varphi} - I \circ \varphi\| < \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Погружение φ определяет элемент в группе $Imm^{so}(n, 1)$. Рассмотрим включение $J: \mathbb{R}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+[\frac{n}{2}]+1}$ и индуцированное отображение $J_{[\frac{n}{2}]+1}: Imm^{so}(n, 1) \rightarrow Imm^{so;fr}(n, [\frac{n}{2}] + 1; \infty)$. Приведем погружение $J \circ \varphi$ в общее положение в пространстве $\mathbb{R}^{n+[\frac{n}{2}]+1}$. Тогда многообразие $\Delta^{n-[\frac{n}{2}]-1}$ этого погружения становится вложенным и само допускает ретракцию порядка d , относительно кошикла, классифицирующего каноническое 2-накрытие $\overline{\Delta}^{n-[\frac{n}{2}]} \rightarrow \Delta^{n-[\frac{n}{2}]}$. Следовательно, $\text{Im}(J_{[\frac{n}{2}]+1})$ лежит в подгруппе $Imm^{so;fr}(n, [\frac{n}{2}] + 1; n - [\frac{n}{2}] - d - 1)$.

Отображение $J' \circ J \circ \varphi: N^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n-d}$, $J': \mathbb{R}^{n+[\frac{n}{2}]+1} \subset \mathbb{R}^{2n-d}$ становится вложением после соответствующей малой деформации. Предложение 1.5 доказано.

Пользуясь предложением 1.5, сформулируем рецепт решения задачи дискретной реализации погружения $\varphi: N^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ в пространстве $\mathbb{R}^{2n-d}$. Вначале по классу кобордизма погруженного многообразия двукратных точек вычисляем обобщенный инвариант Хопфа, принимающий значения в группе $Imm^{o;fr}(d, n-d)$, как частичное алгебраическое препятствие в задаче устранения многообразия двукратных точек погружения $N^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{2n-d}$. Удобно воспользоваться следующей коммутативной диаграммой.

$$(3) \quad \begin{array}{ccc} Imm^{so}(n, 1) & \xrightarrow{\delta} & Imm^o(n-1, 1) \\ \downarrow J_d & & \downarrow K_d \\ Imm^{so;fr}(n, n-d) & \xrightarrow{H^\infty} & Imm^{o;fr}(d, n-d) \end{array} .$$

Пусть погружение φ , представляющее элемент $[\varphi] \in Imm^{so}(n, 1)$, таково, что $H^\infty \circ J_d([\varphi]) = 0$. Рассмотрим погружение $\delta(\varphi) = \psi: M^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Задача дискретной реализации погружения φ в пространстве $\mathbb{R}^{2n-d}$ имеет положительное решение, если погружение ψ допускает ретракцию порядка d .

ПРИМЕР 1.6. Согласно вычислениям [82] гомоморфизм надстройки

$$E^3: \pi_{13+15}(S^{13}) \rightarrow \Pi_{15}$$

является эпиморфизмом. Справедливо равенство $\Pi_{15} = \mathbb{Z}/3 \oplus \mathbb{Z}/5 \oplus \mathbb{Z}/16$. Пусть $\alpha \in \Pi_{15}$ — образующая 2-компоненты.

Используя точность ЕНР-последовательности, получаем равенство $0 = \delta \circ I_2(\alpha) \in Imm^{o;fr}(2, 13)$. В частности, имеем $h(\alpha) = 0$. Следовательно, погружение $\varphi: N^{15} \rightarrow \mathbb{R}^{16}$, представляющее элемент α , допускает ретракцию порядка 0 и композиция $N^{15} \rightarrow \mathbb{R}^{16} \rightarrow \mathbb{R}^{30}$ аппроксимируется вложением.

Нам потребуется одна из основных и наиболее сложных теорем теории погружений, доказанная Р. Козном в [20].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.7. Обозначим через $\alpha(m)$ число единиц в двоичной записи числа m . Произвольное замкнутое многообразие M , $\dim(M) = m$, допускает погружение $f: M^m \rightarrow \mathbb{R}^{2m-\alpha(m)}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пользуясь предложением 1.2, легко дать другую эквивалентную формулировку предложения 1.7. Пусть $\nu \rightarrow M^m$ — нормальное расслоение стабильной размерности, $\dim(\nu) = m+1$. Тогда расслоение ν допускает, по меньшей мере, $\alpha(m)+1$ линейно независимых сечений.

Следующее утверждение известно как принцип C^0 -плотности и было подмечено М. Громовым в [30; предложение 1.2.2].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.8. Пусть $f: M \rightarrow (N; b)$ гладкое погружение замкнутых многообразий, причем многообразие N снабжено метрикой b , $\dim(M) < \dim(N)$. Пусть $g: M \rightarrow N$ есть C^0 -отображение, гомотопное отображению f . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется погружение $h: M \rightarrow N$, для которого $\|h - g\|_{C^0} < \varepsilon$ в метрике пространства отображений, индуцированной метрикой b .

2. Дискретная реализация отображений n -мерной сферы $S^n \rightarrow S^n$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{2n}$

Пусть $I: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $J: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, $H = J \circ I: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ – стандартные вложения. Для доказательства предложения 1.А нам потребуется следующее определение. В большей общности это определение сформулировано в [8].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть $f: S^n \rightarrow S^n$ есть C^0 -отображение. Скажем, что f *локально дискретно реализуется* ($\text{rel } I$) или, иначе, C^0 -*аппроксимируется погружением*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует погружение $g = g(\varepsilon): S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ такое, что

$$\sup_{a \in S^n} \|I \circ f(a) - g(a)\| < \varepsilon.$$

Скажем, что отображение f *локально изотопически реализуется в $\mathbb{R}^{n+1}$* ($\text{rel } I$) или, иначе, C^0 -*аппроксимируется в $\mathbb{R}^{n+1}$ семейством погружений*, если существует регулярная гомотопия (т.е. гомотопия погружений)

$$\Phi_t: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \quad t \in]0; 1],$$

такая, что Φ_t продолжается по непрерывности при $t \rightarrow +0$ до непрерывного отображения $\Phi_0: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, причем $\Phi_0 = I \circ f$.

ЛЕММА 2.2. *Произвольное отображение $f: S^n \rightarrow S^n$ локально изотопически реализуется ($\text{rel } I$) в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Доказательство изложено в [8].

Приступим к доказательству первого главного результата (формулировку см. во введении).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1.А. По лемме 2.2 существует погружение общего положения $g: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, сколь угодно близкое к композиции $I \circ f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ в C^0 -топологии. Рассмотрим погружение $\psi = \delta(g): \Delta^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ (см. предложение 1.2) и разбиение многообразия $\Delta = \bigcup_i \Delta(i)$ на компоненты связности. Для погружения каждой связной компоненты рассмотрим инвариант Хопфа $h(i) = \langle w_1^{n-1}(\Delta(i)); [\Delta(i)] \rangle \in \mathbb{Z}/2$, см. лемму 1.3. В работах [24], [46], [50] замечено, что для каждого $n \neq 1, 3, 7$ выполнено равенство $h(i) = 0$. Доказательство этого использует результат Адамса [2] об инвариантах Хопфа.

ЛЕММА 2.3. *При условиях $n \neq 1, 3, 7$ для каждого i многообразие $\Delta(i)$ допускает ретракцию порядка 0 относительно коцикла, классифицирующего каноническое накрытие $\overline{\Delta}(i) \rightarrow \Delta(i)$, в смысле определения 1.4.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим диаграмму отображений, задающую ретракцию, в которой r задан ориентирующим 1-коциклом, $\overline{r}$ – ретракция порядка 0:

$$(4) \quad \begin{array}{ccc} \Delta^{n-1}(i) & \xrightarrow{r} & \mathbb{RP}^\infty \\ \overline{r} \searrow & & \nearrow \\ & \mathbb{RP}^{n-2} & \end{array}.$$

По теореме о клеточной аппроксимации можно построить гомотопию F , переводящую отображение r в некоторое r_1 , такую, что $\text{Im}(r_1) \subset \mathbb{RP}^{n-1} \subset \mathbb{RP}^\infty$. Перейдем к $\mathbb{Z}/2$ -эквивариантному отображению двулистных накрытий $r_1^!: \widehat{\Delta}^{n-1}(i) \rightarrow S^{n-1}$. Воспользуемся тем, что r — ориентирующий коцикл. Многообразие $\widehat{\Delta}^{n-1}(i)$ ориентировано, и определена целочисленная степень отображения $\deg(r_1^!)$, причем $\deg(r_1^!) = \deg(r_1) \pmod{2}$. По теореме Адамса $\deg(r_1) = 0 \pmod{2}$. Рассмотрим два случая. При $n \equiv 0 \pmod{2}$ многообразие $\mathbb{RP}^{n-1}$ ориентировано, степень отображения $r_1^!$ не зависит от выбора гомотопии F и равна 0.

В случае $n \equiv 1 \pmod{2}$ условие $\deg(r_1) = 0 \pmod{2}$ позволяет определить эквивариантную гомотопию G , переводящую $r_1^!$ в $r_2^!$, причем $\text{Im}(r_2^!) \subset S^{n-2} \subset S^{n-1}$. Переходя к факторотображению $\bar{r} = r_2^!/T$, где через T обозначена инволюция на двулистном накрытии, получаем доказательство леммы 2.3.

По лемме 2.3, предложению 1.5 и конструкции, изложенной в разделе 1 сразу после предложения 1.5, отображение $f \circ H: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{2n}$ может быть сколь угодно близко C^0 -аппроксимировано гладким вложением. Предложение 1.А доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1.Б. Построим отображения $S^1 \rightarrow S^1, S^3 \rightarrow S^3, S^7 \rightarrow S^7$, не реализующиеся в пространствах $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^6, \mathbb{R}^{14}$ соответственно. Результат для $n = 1$ элементарен, в [75] замечено, что двулистное накрытие $S^1 \rightarrow S^1$ не реализуется в плоскости. Изложим построение отображения $\Xi: S^7 \rightarrow S^7$ с указанными свойствами. Построение для S^3 совершенно аналогично.

КОНСТРУКЦИЯ. Пусть $\varphi: \mathbb{RP}^6 \rightarrow S^7$ — погружение общего положения. Согласно теории погружений такое погружение существует, поскольку определена тривиализация расслоения $\tau \oplus \kappa \rightarrow \mathbb{RP}^6$, где $\tau \oplus \kappa$ — сумма Уитни касательного расслоения к $\mathbb{RP}^6$ и одномерного ориентирующего расслоения. Выбор такой тривиализации определяет погружение φ с точностью до регулярной гомотопии. Далее, определим погружение $\widehat{\varphi}: S^6 \rightarrow S^7$ как $\widehat{\varphi} = \varphi \circ p$, где $p: S^6 \rightarrow \mathbb{RP}^6$ — каноническое 2-накрытие.

Построим гомотопию $\xi_t: S^6 \times I \rightarrow S^7, I = [0; 1]$, такую, что при $t \neq 1$ ξ_t является погружением, $\xi_0 = \widehat{\varphi}$, ξ_1 — отображение в точку и ξ_t имеет стандартный вид в окрестности значения параметра $t = 1$. Для этого построения требуется следующая лемма.

ЛЕММА 2.4. *Любые два погружения $\xi_i: S^6 \rightarrow \mathbb{R}^7, i = 1, 2$, связаны регулярной гомотопией.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно результатам [78] достаточно доказать равенство $\pi_6(SO(7)) = 0$. Рассмотрим каноническое расслоение $j: SO(8) \rightarrow S^7$ со слоем $SO(7)$. Существует сечение $j^{-1}: S^7 \rightarrow SO(8)$. Для построения j^{-1} можно отождествить S^7 с унимодулярными числами Кэли Ca^1 . По произвольному числу из Ca^1 каноническим образом строится оператор из $SO(8)$, см., например, [66]. Рассмотрим точную последовательность гомотопических групп, индуцированную расслоением j :

$$(5) \quad \cdots \longrightarrow \pi_7(SO(8)) \xrightarrow{j_\#} \pi_7(S^7) \xrightarrow{\partial_\#} \pi_6(SO(7)) \xrightarrow{i_\#} \pi_6(SO(8)) \longrightarrow \cdots$$

В этой последовательности $\text{Im}(\partial_\#) = 0$, поскольку $j_\#$ — эпиморфизм. В соответствии с теоремой Ботта имеем $\pi_6(SO(8)) = 0$, см., например, [23]. Равенство $\pi_6(SO(7)) = 0$ и лемма 2.4 доказаны.

Рассмотрим, пользуясь доказанной леммой, регулярную гомотопию ξ_t , связывающую погружение $\widehat{\varphi}$ со стандартным вложением, параметризующим малую границу окрестности точки. Гомотопия ξ_t задает продолжение отображения $\varphi: \mathbb{RP}^6 \rightarrow S^7$ на клетку старшей размерности в многообразии $\mathbb{RP}^7$. Тем самым, определено отображение $\Lambda: \mathbb{RP}^7 \rightarrow S^7$. Гомотопию ξ_t выберем такой, чтобы отображение Λ имело степень 1. Этот выбор осуществляется в соответствии со следующими простыми рассуждениями.

Сначала выберем гомотопию ξ_t произвольной, что определяет некоторое предварительное отображение Λ_0 , для которого $\deg(\Lambda_0)$, вообще говоря, не равно 1. Далее определим модификации Λ_1^+ и Λ_1^- отображения Λ_0 , которые совпадают с Λ_0 всюду, за исключением малой окрестности точки $x_0 \in \mathbb{RP}^7$ – центральной точки клетки старшей размерности. При этом выполнены равенства $\deg(\Lambda_1^+) = \deg(\Lambda_0) + 1$, $\deg(\Lambda_1^-) = \deg(\Lambda_0) - 1$.

Для построения модификаций удобно условиться о выборе ориентации на $\mathbb{RP}^7$ такой, что отображение Λ_0 , ограниченное на малую окрестность U_0 точки x_0 , является диффеоморфизмом степени +1. В частности, это определяет ориентацию на границе ∂U_0 окрестности. Далее рассмотрим диффеоморфизм $I_+: (S^7, y_0) \rightarrow (S^7, \Lambda_0(x_0))$ степени 1. Ограничим I_+ на ∂V_0 , где V_0 – малая окрестность точки $y_0 \in S^7$ такая, что $I_+(V_0)$ лежит внутри $\Lambda_0(U_0)$. Заметим, что ∂V_0 снабжена канонической ориентацией. Рассмотрим регулярную гомотопию $F_t: S^6 \rightarrow \text{Im}(\Lambda_0(U_0))$ такую, что $F_0 = I_+|_{\partial V_0}$, $F_1 = \Lambda_0|_{\partial U_0}$. Выбор параметризаций $S^6 \times \{0\} \cup \{1\}$ начальных и конечных значений гомотопии произведем так, чтобы отображение

$$I_+|_{S^7 \setminus V_0} \bigcup_{\partial U_0} F_t \bigcup_{\partial V_0} \Lambda_0|_{\mathbb{RP}^7 \setminus U_0} = \Lambda_1^+$$

являлось бы отображением ориентированного многообразия в соответствии с правилами выбора ориентации на границах окрестностей V_0 и U_0 . Отображение Λ_1^+ является искомым, а отображение Λ_1^- строится совершенно аналогично.

Теперь для построения искомого отображения Λ , для которого $\deg(\Lambda) = +1$, можно начать с произвольного отображения Λ_0 и далее применить одну из описанных модификаций необходимое число раз. Дополнительно потребуем выполнение следующего условия (У).

- (У) Гомотопия ξ_t при $t \in [0; +\delta]$ определяет тривиализацию погруженной трубчатой окрестности W погружения $\varphi(\mathbb{RP}^6)$.

Завершив конструкцию и определим Ξ как композицию $\Xi = \Lambda \circ p: S^7 \rightarrow \mathbb{RP}^7 \rightarrow S^7$. (Здесь допущена некоторая вольность в обозначениях, и через $p: S^7 \rightarrow \mathbb{RP}^7$ обозначено каноническое 2-накрытие.) Требуемое отображение построено.

Приступим к доказательству того, что отображение Ξ не реализуется в пространстве $\mathbb{R}^{14}$. Рассмотрим произвольное гладкое отображение $\Lambda': \mathbb{RP}^7 \rightarrow S^7$, задающее малую C^0 -аппроксимацию отображения Λ . Технически будет удобно помечать области определений аппроксимирующих отображений нижним индексом 1. Выбор константы C^0 -аппроксимации ε_1 будет указан позднее. По свойствам общего положения, которые всегда можно считать выполненными, после, быть может, дополнительной

деформации отображения Λ' стратифицированное подмногообразие критических значений отображения Λ' находится в общем положении с однопараметрическим семейством погружений ξ_t , задающим отображение Λ . Кроме того, Λ' регулярно вдоль семейства погружений, которое определяет многообразие $\varphi(\mathbb{RP}^6)$ и в точке $\Lambda(x_0)$. Для каждого $t \in [\varepsilon_1; 1[$ определено множество $L'_t \subset \mathbb{RP}_1^7$ по формуле $L'_t = \Lambda'^{-1}(\text{Im}[\xi_t])$. Определено также множество $\widehat{L}'_t \subset S_1^7$ по формуле $\widehat{L}'_t = p^{-1}(L'_t)$.

По свойствам общего положения множество L'_t при всех значениях параметра t , кроме, быть может, их конечного числа, наделено структурой погруженного в $\mathbb{RP}_1^7$ многообразия. Такая структура вводится после разрешения особенностей, связанных с точками самопересечения образа погружения ξ_t , посредством погружения q_t ($\widehat{q}_t$), для всех значений параметра t , за исключением, быть может, конечного множества Υ критических значений параметра. В произвольной малой δ -окрестности критического значения $\tau \in \Upsilon$ погруженные подмногообразия $L'_{\tau-\delta}$ и $L'_{\tau+\delta}$ отличаются на морсовскую перестройку.

Определим $M' = \bigcup_t L'_t$, $t \in [\varepsilon_1; 1 - \varepsilon]$. Теперь заметим, что из условия (У) и свойств общего положения вытекает, что при малых значениях параметра ε_1 , много меньших диаметра регулярной окрестности погружения $\varphi(\mathbb{RP}^6)$ и диаметра окрестности $\Lambda(U_0)$, многообразие M' допускает вложение $M' \subset M$, где M – замкнутое многообразие, определенное теми же формулами, что и M' , при $t \in]0; 1[$, а в окрестности $]0; \varepsilon_2[$ (где ε_2 – некоторое положительное число, не превышающее ε_1) допускающее компактификацию подмногообразием L'_0 – центральным подмногообразием нетривиальной трубчатой окрестности, погруженной в $\mathbb{RP}_1^7$ и образованной семейством погруженных подмногообразий L'_t .

По построению многообразия M определены отображение $j: M \rightarrow \mathbb{RP}_1^7$ и отображение $q': M' \rightarrow S_1^7$, $q' = \bigcup_t \Lambda'_t: \bigcup_t L'_t \rightarrow \text{Im}(\xi_t)$ ($\text{Im}(\xi_t)$ – погруженное подмногообразие в сфере S^7). Отображение q' продолжается до отображения $q: M \rightarrow \mathbb{RP}^7$. Кроме того, определено двулистное накрытие $\widehat{M} \rightarrow M$ и отображения $\widehat{q}: \widehat{M} \rightarrow S^7$, $\widehat{j}: \widehat{M} \rightarrow S_1^7$, двулистно накрывающие q и j соответственно. Построенные выше отображения включены в следующую коммутативную диаграмму:

$$(6) \quad \begin{array}{ccccc} S_1^7 & \xleftarrow{\widehat{j}} & \widehat{M} & \xrightarrow{\widehat{q}} & S^7 \\ \downarrow p_1 & & \downarrow \widehat{p} & \searrow \widehat{r} & \downarrow p \\ \mathbb{RP}_1^7 & \xleftarrow{j} & M & \xrightarrow{q} & \mathbb{RP}^7 \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow \Lambda \circ p \\ \searrow \Lambda \\ \xrightarrow{\Lambda} S^7 \end{array}$$

$\xleftarrow{\Lambda'} \quad \xrightarrow{\quad}$

В этой диаграмме $\widehat{r} = q \circ \widehat{p}$. Важно заметить, что $\deg(\widehat{q}) = 1$.

Теперь рассмотрим предыдущее построение многообразия $\widehat{M}$ в более общем случае. Предположим, что нам задано некоторое отображение $\Lambda'': S_1^7 \rightarrow S^7$, аппроксимирующее композицию $\Lambda \circ p$. Если выполнено точное равенство $\Lambda'' = \Lambda \circ p$, то применим описанную выше конструкцию и построим $\widehat{M}$ как двулистное накрытие над M . В общем случае многообразие M не определено, но, повторив аналогичные рассуждения, можно построить многообразие $\widehat{M}$ и определить коммутативную диаграмму гладких отображений

$$(7) \quad \begin{array}{ccccc} S_1^7 & \xleftarrow{\hat{j}} & \widehat{M} & \xrightarrow{\hat{q}} & S^7 \\ & & \downarrow \hat{p} & \searrow \hat{r} & \downarrow p \\ & & M & \xrightarrow{q} & \mathbb{RP}^7 \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow \Lambda \circ p \\ \xrightarrow{\Lambda} \\ \nearrow \Lambda'' \end{array} \quad \begin{array}{c} S^7 \\ \\ S^7 \end{array}$$

в которой снова $\hat{r} = q \circ \hat{p}$ и $\hat{p}$ – отображения степени 1.

Вернемся к доказательству предложения 1.Б. Предположим, что для любого $\varepsilon > 0$, существует отображение $\bar{\varphi}$, определяющее ε -реализацию отображения Ξ ($\text{rel } H$). Пусть $\pi: U \rightarrow S^7$ – проекция малой регулярной окрестности на стандартно вложенную сферу $H(S^7)$. Рассмотрим отображение $\varphi = \pi \circ \bar{\varphi}: S_1^7 \rightarrow S^7$. Можно положить $\Lambda'' = \varphi$ и, применив предыдущие построения, получить многообразие $\widehat{M}$, поскольку, не ограничивая общности, с самого начала можно считать, что вложение $\bar{\varphi}$ таково, что для отображения φ выполнены все необходимые условия близости и регулярности. Сформулируем это наблюдение в виде отдельной леммы, доказательство которой очевидно вытекает из построения диаграммы (7).

ЛЕММА 2.5. *Существует число $\varepsilon > 0$ такое, что по любой ε -реализации $\bar{\varphi}$ общего положения отображения $I \circ \Xi: S^7 \rightarrow \mathbb{R}^{14}$ можно определить коммутативную диаграмму гладких отображений:*

$$(8) \quad \begin{array}{ccccc} \widehat{M} & \xrightarrow{\hat{q}} & S^7 & & \\ \downarrow \hat{\varphi} & \searrow \hat{r} & \downarrow p & \searrow \Lambda \circ p & \\ U' & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{RP}^7 & \xrightarrow{\Lambda} & S^7 \end{array}$$

в которой $U' = \Lambda^*(U)$ – трубчатая окрестность многообразия $\mathbb{RP}^7$, $U' \approx \mathbb{RP}^7 \times D^7$, индуцированная как обратный образ окрестности U при отображении Λ , $\hat{\varphi}$ – отображение, индуцированное как обратный образ при отображении Λ из отображения $\bar{\varphi} \circ \hat{j}: \widehat{M} \rightarrow U'$.

Завершим доказательство предложения 1.Б. Предположим, что существует дискретная реализация $\bar{\varphi}$. Рассмотрим диаграмму (8), которая определена по лемме 2.5. В работе [26] доказано, что для произвольного $\widehat{M}$, включенного в диаграмму (8) при условии $\deg(\bar{q}) = 1$, найдется такая пара точек $x, y \in \widehat{M}$, для которой $\hat{q}(x) = T \circ \hat{q}(y)$, $\hat{\varphi}(x) = \hat{\varphi}(y)$, где $T: S^7 \rightarrow S^7$ – стандартная инволюция. С другой стороны, выполнено неравенство $\bar{\varphi}(\hat{j}(x)) \neq \bar{\varphi}(\hat{j}(y))$, поскольку $\hat{j}(x) \neq \hat{j}(y)$ на S_1^7 , а $\bar{\varphi}$ – вложение. Следовательно, и $\hat{\varphi}(x) \neq \hat{\varphi}(y)$, что приводит к противоречию. Предложение 1.Б доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ. Другое доказательство предложения 1.Б (в более слабой формулировке) имеется в работе [69].

3. Дискретная реализация отображения n -мерной сферы $S^n \rightarrow S^n$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{2n-d}$

В этом разделе будет доказано второе основное утверждение – предложение 2, сфор-

мулированное во введении. Предположим, что число $d > 0$ задано, и укажем такое число n , что произвольное отображение $S^n \rightarrow S^n$ дискретно реализуется в пространстве $\mathbb{R}^{2n-d}$. Нам потребуется следующая лемма.

ЛЕММА 3.1. Пусть $g: M^{2^{l+1}-2d-1} \rightarrow \mathbb{R}^{2^{l+1}-2d}$, $d > 0$, – произвольное погружение, представляющее элемент $[\varphi] \in \text{Imm}^o(2^{l+1}-2d-1, 1)$. Рассмотрим ориентирующий коцикл $w_1(M) \in H^1(M; \mathbb{Z}/2)$. Тогда при $l \geq 3d$ многообразие M допускает ретракцию порядка d относительно ориентирующего коцикла в смысле определения 1.4.

Пользуясь леммой 3.1, докажем, что при любом $d > 0$ произвольное отображение $f: S^n \rightarrow S^n$, $n = 2^{l+1} - 2d$, $l > 3d$, дискретно реализуется в пространстве $\mathbb{R}^{2n-d}$. Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольно малое положительное число. Мы докажем, что отображение $J \circ f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n-d}$, $J: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n-d}$, аппроксимируется вложением с константой аппроксимации ε . Рассмотрим композицию $I \circ f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $I: S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Воспользуемся леммой 2.2 и рассмотрим погружение $h: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ такое, что $\|h - I \circ f\|_{C^0} < \varepsilon/4$. Рассмотрим погружение $g = \delta(h): M^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, построенное в разделе 1. Согласно лемме 3.1 погружение g допускает ретракцию порядка d . Следовательно, согласно предложению 1.5 композиция $J \circ h: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n-d}$, $J: \mathbb{R}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{2n-d}$, аппроксимируется вложением $\psi: S^n \subset \mathbb{R}^{2n-d}$, $\|J \circ h - \psi\| < \varepsilon/2$. Утверждение о дискретной реализации и предложение 2 доказаны.

ДОПОЛНЕНИЕ К ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2. Покажем, используя теорему об изотопической реализации в коразмерности 1, формулировка которой была приведена во введении, что предложение 2 остается справедливо при замене понятия дискретной реализации на понятие изотопической реализации. Для произвольного $d > 0$ выберем число $n(d)$ по формуле $n = 2^{(3d+1)+1} - 2(d+1) + 1$. Согласно доказанному утверждению произвольное отображение $f: S^n \rightarrow S^n$ дискретно реализуется в пространстве $\mathbb{R}^{2n-d-1}$. По теореме об изотопической реализации в коразмерности 1 (доказательство которой см. в [11]) отображение f изотопически реализуется в пространстве $\mathbb{R}^{2n-d}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.1. Изложим основную идею доказательства, которое можно найти в работе [10]. Пусть $M_0^{2^l-1} \subset M^{2^{l+1}-2d-1}$ – подмногообразие, определенное как эйлеров класс (подмногообразие нулей сечения общего положения) расслоения $(2^l - 2d)\pi$. (Эйлеров класс векторного расслоения определяется как множество нулей сечения общего положения. Тем самым, применив теорему Тома о трансверсальности, эйлеров класс можно считать подмногообразием, которое определено с точностью до кобордизма вложенных подмногообразий.) По теореме Коэна (предложение 1.7) стабилизация нормального расслоения $\nu(M_0)$ размерности 2^l допускает $\alpha(2^l - 1) + 1$ линейно независимых сечений. Это число при достаточно больших l (например, при $l > 3d$) превышает $2d$. С другой стороны, нормальное расслоение $\nu(M_0)$ размерности 2^l , т.е. расслоение, возникающее при вложении $M_0 \subset \mathbb{R}^{2^{l+1}-1}$, стабильно эквивалентно расслоению $\xi = (2^l - 2d + 1)\pi$. В предположении, что число сечений этого расслоения достаточно велико (превышает $2d$), удастся доказать существование ненулевого сечения расслоения ξ . Это условие влечет существование ретракции порядка d для многообразия M_0 , а значит, и для исходного многообразия M . Идея доказательства изложена.

4. Вложение S^n -подобных компактов в евклидовы пространства

В этом разделе мы докажем основные теоремы, пользуясь предложениями 1 и 2.

В категории топологических пространств обратным спектром $\{Y_i; f_i\}$ (далее – спектром) называется семейство топологических пространств Y_i с индексами из направленного множества $\Lambda = \{i\}$ и семейство непрерывных отображений $f_i^j: Y_j \rightarrow Y_i$, определенных при условии $i \leq j$, для которых выполнены следующие условия:

$$(9) \quad \begin{aligned} f_i^i &= \text{Id}: Y_i \rightarrow Y_i, \quad i \in \Lambda, \\ f_i^k &= f_i^j \circ f_j^k: Y_k \rightarrow Y_i, \quad i \leq j \leq k, \quad i, j, k \in \Lambda. \end{aligned}$$

Ниже рассматривается частный случай спектра, когда Λ является множеством натуральных чисел. В этом случае мы пишем $f_i^{i+1} = f_{i+1}: Y_{i+1} \rightarrow Y_i$, а произвольное отображение f_i^j , $j > i$, определяется соответствующей композицией рассмотренных отображений.

Определен (обратный) предел $Y = \lim_{\leftarrow} f_i$ спектра $\{Y_i, f_i\}$, $i \in \mathbb{N}$, состоящий из всевозможных последовательностей $\{y_i \in Y_i\}$ таких, что $f_{i+1}(y_{i+1}) = y_i$.

Если каждое пространство Y_i является компактным метрическим пространством с метрикой ρ_i диаметра $\leq d$, то и предельное пространство Y само является метрическим компактом с метрикой

$$(10) \quad \text{dist}(u; v) = \sum_i 2^{-i} \rho_i(u_i; v_i),$$

где $\{u_i\} = u$, $\{v_i\} = v$.

В книге [37] доказано, что произвольный метрический компакт X лебеговой размерности n гомеоморфен обратному пределу Y спектра $\{Y_i; f_i\}$, состоящего из полиэдров размерности n и симплициальных отображений. Следующая лемма является спецификацией этого в случае сфероподобных компактов.

ЛЕММА 4.1. *Произвольный S^n -подобный компакт X гомеоморфен пространству обратного предела $\lim_{\leftarrow} \alpha_i$ спектра $\{\alpha_i: S_{i+1}^n \rightarrow S_i^n\}$, $i \geq 1$, отображений n -сфер.*

Доказательство изложено в [8].

ЛЕММА 4.2. *Пусть $\{\alpha_i: S_{i+1}^n \rightarrow S_i^n\}$, $i \geq 1$, – спектр отображений n -сфер. Пусть каждое отображение α_i дискретно реализуется относительно стандартного вложения $S^n \subset \mathbb{R}^{2n-d}$, $d \leq n/2$. Тогда пространство X обратного предела этого спектра, $X = \lim_{\leftarrow} \alpha_i$, вкладывается в пространство $\mathbb{R}^{2n-d}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Изложим лишь набросок доказательства. Согласно теореме Хефлигера [34] (см. также [1]) произвольное вложение $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n-d}$ при условии $d \leq n/2$ изотопно стандартному. В частности, вложение f является оснащенным. Лемма доказывается аналогично следствию 5 из работы [8], где разбирается случай $d = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Согласно предложению 1.А каждое отображение спектра $\{S^n; \alpha_i\}$, $n > 4$, $n \neq 7$, реализуется в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$. Следовательно, согласно лемме 4.2 пространство X допускает вложение в пространство $\mathbb{R}^{2n}$. По лемме 4.1 произвольный S^n -подобный компакт вкладывается в пространство $\mathbb{R}^{2n}$. Теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. В силу предложения 2 для произвольного натурального d определено число $n = n(d)$ такое, что произвольное отображение $\alpha: S^n \rightarrow S^n$ дискретно (и даже изотопически) реализуется в пространстве $\mathbb{R}^{2n-d}$. Следовательно, по лемме 4.2 пространство X вкладывается в пространство $\mathbb{R}^{2n-d}$. По лемме 4.1 произвольный S^n -подобный компакт вкладывается в пространство $\mathbb{R}^{2n-d}$. Теорема 2 доказана.

Часть 2. Метод ортогонального проектирования в дифференциальной топологии

Введение

Идея понижения размерности пространства, содержащего образ фигуры при ортогональном проектировании, лежит в основе геометрического построения обобщенного инварианта Хопфа и используется в первой части работы. Во второй части мы собираемся ту же идею применить для изучения диаграмм Серфа двупараметрического семейства функций, определенных на многообразии $M^m \times I$ со значениями на отрезке, где размерность m многообразия M^m достаточно велика. Коротко говоря, диаграммой Серфа многопараметрического семейства функций называется поверхность критических значений, которая рассматривается в пространстве значений+параметров. Диаграммы Серфа являются основным инструментом при изучении гомотопического типа пространства псевдоизотопий многообразия M^m , т.е. пространства автоморфизмов многообразия $M^m \times I$, тождественных на нижнем основании. Для удобства мы напомним основные конструкции, связанные с понятием псевдоизотопии, полученные разными авторами в работах [17], [33], [32], [39], [40], [25], [58].

Результаты в этой части работы были доказаны при попытке обобщить результаты В. И. Арнольда [16], полученные для функций одной переменной, на случай функций многих переменных. В этой работе В. И. Арнольда было подмечено, что конструкция Понтрягина и Тома, известная в теории кобордизмов, переносится на вещественнозначные функции. Изоморфизму Понтрягина между гомотопическими группами сфер и группами кобордизмов оснащенных многообразий соответствует изоморфизм между гомотопическими группами пространства функций на прямой с умеренными особенностями и группами кобордизма вложенных плоских кривых без горизонтальных касательных перегибов (в старших размерностях – вложенных гиперповерхностей, удовлетворяющих специальным условиям на особенности ортогональной проекции).

Мы переходим от пространства функций на прямой или окружности к пространству функций с умеренными особенностями (обобщенными морсовскими особенностями), определенными на гладком многообразии $M^m \times I$ высокой размерности. При этом мы дополнительно предполагаем, что на страте морсовских особых точек A_1 зафиксирована коориентация. Условие о коориентации является ключевым, идея определения принадлежит И. А. Володину.

Строго говоря, идея Володина является более общей. Она состоит в том, что при правильном определении пространства с высшими особенностями необходимо зафиксировать структурную группу, в которой лежат матрицы, отвечающие за примыкание стабильных сепаратрисных дисков вдоль страта фиксированного типа особенности. Нами рассмотрен первый шаг в осуществлении этой программы. Для этого мы определим пространство функций $PSO(M^m)$, соответствующее редукции структурной группы O роста подмногообразия стабильных сепаратрисных дисков в особенностях типа “рождения-гибели” к подгруппе $SO \subset O$. Оказалось, что при вычислении гомотопических групп построенного функционального пространства $PSO(M^m)$ естественно провести конструкцию Понтрягина в форме Уэллса. Приходится рассматривать уже не вложенные многообразия критических точек, а погруженные многообразия критических значений, т.е. диаграммы Серфа. При этом оказалось, что композиционному умножению (скобкам Тода) в стабильных гомотопических группах сфер (напоминание см. в разделе 1 ч. 1) соответствуют алгебраические соотношения, которым удовлетворяют особенности диаграмм Серфа. Такие соотношения выявляются в рамках алгебраической К-теории. Открытая аналогия между скобками Тода и соотношениями, связанными с особенностями диаграмм Серфа, может быть по аналогии продолжена на случай семейств функций с умеренными особенностями, зависящих от большего числа параметров. Это гипотеза.

Другой мотив в исследовании является методологическим и состоит в следующем. В теории псевдоизотопий (см. определение в разделе 7) введено большое число различных функциональных пространств, определение которых мы ниже напомним (см. диаграмму (11)). Задача вычисления гомотопического типа пространства псевдоизотопий сводится к соответствующей задаче в алгебраической К-теории. С другой стороны, вычисление гомотопического типа того или иного пространства функций с умеренными особенностями проводится методами алгебраической топологии при помощи построения соответствующего формального аналога как подпространства в пространстве сечений расслоения струй, см. [86]. Само же пространство псевдоизотопий не является гомотопически эквивалентным своему формальному аналогу, см. [51], [25].

Естественно было бы выяснить, какие свойства пространства функций с той или иной структурой особенностей можно выявить при помощи методов алгебраической К-теории и сохраняются ли эти свойства при переходе от пространства функций к соответствующему формальному аналогу? При исследовании этого вопроса пришлось выйти за рамки теории псевдоизотопий и развить теорию Васильева для особенностей плоской проекции погруженной замкнутой 2-поверхности в евклидово пространство. Дискриминант таких особенностей мы называем I -структурой. Ниже будут изучены лишь инварианты Васильева нулевого порядка в этой теории. Такие инварианты позволяют восстановить класс регулярной гомотопии (кобордизма) погруженной поверхности по структуре особенностей ее гиперпроекции. Эти формулы можно рассматривать как обобщение известной формулы Уитни, которая восстанавливает класс регулярной гомотопии плоской погруженной кривой, см., например, [15]. Для изучения инвариантов Васильева I -структуры порядка более чем 1 развитых методов оказывается недостаточно.

Приступим к определению необходимых понятий. Пусть M^m — гладкое замкнутое многообразие, причем $m > 6$. Обозначим через $\pi: M^m \times I(x) \rightarrow I(y)$ стандартную проекцию. Здесь и далее через $I(x)$ обозначен единичный отрезок числовой оси, снаб-

женной вещественной координатой, которая обозначается через x . Аналогичные обозначения $I(y)$, $I(t)$, $I(\tau)$ также будут употребляться далее. В теории псевдоизотопий изучается пространство $H(M^m)$, состоящее из C^∞ -функций, заданных на многообразии $M \times I(x)$, которые принимают значения на отрезке $I(y)$, не имеют критических точек и совпадают (после отождествления $I(x) = I(y)$) с проекцией π вблизи границы $\partial(M^m \times I(x)) = M^m \times \{0\} \cup M^m \times \{1\}$. Согласно конструкции Серфа [17] пространство $H(M^m)$ является ретрактом пространства псевдоизотопий многообразия M^m , т.е. пространства всех автодиффеоморфизмов многообразия $M^m \times I(x)$, тождественных в окрестности нижней границы $M \times \{0\}$.

Для изучения гомотопического типа пространства $H(M^m)$ в теории псевдоизотопий определяются пространства функций $P(M^m)$, $P^W(M^m)$, $P^{fr}(M^m)$. Подробности, необходимые для определения, будут даны в разделе 7, ниже даются краткие определения с соответствующими ссылками.

Определим пространство $P(M^m)$ как пространство обобщенных функций Морса, т.е. функций $f: M^m \times I(x) \rightarrow I(y)$, совпадающих в малой окрестности границы с проекцией π и не имеющих особенностей, кроме особенностей следующих двух типов: морсовские критические точки A_1 и особые точки A_2 типа “рождения-гибели” пары морсовских особых точек соседних индексов $1 \leq i < i+1 \leq m$. Пространство $P(M^m)$ определяется и изучается в работе [39]. В этой работе, в частности, доказывалось, что первая $m-1$ гомотопическая группа пространства $P(S^m)$, m — достаточно велико, описываются как группы кобордизма оснащенных многообразий $(N^i; fr)$, $i = 1, \dots, m-1$, снабженных отображениями $f: N^i \rightarrow BO$, причем само многообразие N^i ограничивает как многообразие с заданным оснащением. В частности, $\pi_1(P(S^m)) = \mathbb{Z}/2$.

Определим пространство $P^{fr}(M^m)$ оснащенных обобщенных морсовских функций как пространство троек (f, μ, ξ) , где f — обобщенная функция Морса, μ — риманова метрика на $M^m \times I(x)$, ξ — некоторая дополнительная структура на множестве стабильных сепаратрисных дисков, восстановленных посредством μ в каждой морсовской особой точке функции. А именно, это — оснащение стабильного сепаратрисного диска, т.е. выбор базиса в касательном подпространстве к стабильному сепаратрисному диску в каждой критической точке. В случае, когда f имеет особенности типа “рождения-гибели”, структура ξ должна быть определена на паре родившихся морсовских особых точек согласованным образом. Пространство $P^{fr}(M^m)$ определяется и изучается в работе [40] на языке симплицальных множеств. Оказалось, в частности, что $\pi_i(P^{fr}(S^m))$, где m достаточно велико, $m > i$, нулевые.

Пространство $P^W(M^m)$ определяется как пространство обобщенных функций Морса со следующей дополнительной структурой. Для каждой функции $f \in P^W(M^m)$ морсовские особые точки разбиты на пары $x_1; x_2$ точек соседних индексов, причем для каждой такой пары выделяется вложение стандартного $(m+1)$ -мерного шара $U \hookrightarrow M^m \times I$, содержащее точки $x_1; x_2$ и такое, что ограничение функции f на этот шар задается стандартными формулами и имеет две критические точки. Указанная структура продолжается в окрестности точек “рождения-гибели”, причем в каждой такой особой точке погибает или рождается пара морсовских точек соседних индексов, которые заключены внутрь одного стандартного диска. Пространство P^W , построенное в работе [25] (см. также [58]), оказывается очень важным для изучения пространства $H(M^m)$.

Наконец, пространство $F(M^m)$ определено как пространство всех гладких функций, совпадающих с π в окрестности границы.

Мы определим новое функциональное пространство $P^{SO}(M^m)$ так, что задана следующая цепочка естественных отображений (все – вложения, за исключением предпоследнего i_0):

$$(11) \quad H(M^m) \xrightarrow{j} P^W(M^m) \xrightarrow{i_W} P^{fr}(M^m) \xrightarrow{i_{fr}} P^{SO}(M^m) \xrightarrow{i_0} P(M^m) \xrightarrow{i} F(M^m).$$

Пространство $P^{SO}(M^m)$ определено как пространство пар (O, f) , где $f: M^m \times I \rightarrow I$ – обобщенная функция Морса, O – ориентация стабильного сепаратрисного диска в каждой морсовской критической точке функции f . Подробнее, в окрестности морсовской критической точки A можно определить систему координат $(a_1, \dots, a_{m+1})$, в которой функция f определена по формуле

$$f(a_1, \dots, a_{m+1}) = \sum_{i=1}^k a_i^2 - \sum_{i=k+1}^{m+1} a_i^2.$$

Это канонический вид квадратичной формы, определенной на касательном пространстве $T_A(M^m \times I(x))$ многообразия $M^m \times I(x)$ в точке A , называемой гессианом. Структура O определяется как ориентация, заданная на базисе касательных векторов отрицательного подпространства гессиана. При замене системы координат рассматриваемая ориентация должна меняться инвариантным образом. Рассмотренная структура не зависит от выбора системы координат и определяет ориентацию в критической точке на ростке подмногообразия стабильного сепаратрисного диска функции f . При этом в окрестности критической точки типа “рождения-гибели” определенные ориентации сепаратрис для пары морсовских критических точек между собой никак не согласовываются (о точках типа “рождения-гибели” см. раздел 7). Ниже, проявляя некоторую вольность, мы будем считать, что функции пространства $P^{SO}(M^m)$ могут иметь лишь критические морсовские точки пары соседних индексов i и $i+1$, где $2 < i < i+1 < m-1$. В критических точках типа “рождения-гибели” рождается или погибает пара морсовских критических точек этих индексов. Подобное соглашение является общепринятым в теории псевдоизотопий, поскольку в малых размерностях каждое функциональное пространство слабо гомотопически эквивалентно соответствующему своему подпространству, состоящему из обобщенных морсовских точек указанных индексов. В случае семейства функций с двумя параметрами, который для наших целей достаточен, доказательство изложено в [33].

Включения пространств в диаграмме (11) позволяют, в первую очередь, изучить свойства пространства $H(M^m)$. Как замечено в работе [17], очевидно, пространство $F(M^m)$ является стягиваемым. Игуса первым заметил, что включение пар $(F(M^m); H(M^m)) \leftarrow (P(M^m); H(M^m))$ является $(m-1)$ -гомотопической эквивалентностью, см., например, [58]. Это важное следствие позволяет рассматривать лишь диаграммы Серфа семейства функций с простейшими особенностями. Аналогичное свойство выполнено при замене пространства $P(M^m)$ на пространство $P^W(M^m)$. Более того, в работах [39], [40] определяются модели (формальные аналоги) пространств $P^{fr}(M^m)$, $P^{SO}(M^m)$, т.е. некоторые пространства, определенные в терминах стабильной теории гомотопий, в которые исходные пространства

естественно отображаются посредством гомотопических $(m-1)$ -эквивалентностей. В работе [25] определяется формальный аналог пространства $P^W(M^m)$ как пространство ненулевых сечений кокасательного расслоения $T^*(M^m \times I)$, нигде не обращающихся в 0 и совпадающих со стандартным сечением вблизи границы. Естественное отображение переводит пространство $P^W(M^m)$ в это пространство сечений посредством конструкции, называемой “регуляризованный дифференциал”. Это отображение является слабой гомотопической эквивалентностью. Везде ниже, если не оговаривается противное, предполагается, что $M^m = S^m$. В этом случае конструкция формального аналога соответствующего функционального пространства упрощается. Переход к общему случаю односвязного M^m не вызывает существенных трудностей.

В случае $\dim(M) = 1$, $M^1 = S^1$ или $M^1 = \mathbb{R}^1$ задача изучения соответствующих пространств сильно упрощается. В этом случае пространства $P^{fr}(M^1)$, $P^{SO}(M^1)$ определять не приходится, поскольку все стабильные сепаратрисные диски морсовских критических точек снабжены каноническим оснащением и ориентацией. В. И. Арнольд в [16] предложил следующее полезное обобщение пространства $P(\mathbb{R}^1)$. Рассматривается пространство функций $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$, которые совпадают с некоторой заданной функцией без особых точек вне некоторого отрезка, координаты которого не фиксируются. Говорят, что функция f описанного вида принадлежит пространству $F_k(\mathbb{R}^1)$, если среди критических точек x со значением $f(x) = 0$ отсутствуют критические точки типа A_k . (То есть нули функции имеют кратность, не превышающую $k+1$.) В [86] доказано, что $\pi_n(F_k(\mathbb{R}^1)) = \pi_{n-1}(S^k)$.

Пусть Λ – двумпараметрическое семейство функций, имеющих только обобщенные морсовские особые точки, с областью определения $S^m \times I(x)$, параметры которого $(t; \tau)$ лежат в квадрате $I(t) \times I(\tau)$. В предположении, что Λ при $(t; \tau) = (0; 0)$ совпадает со стандартной проекцией π , а при $(t; \tau) \in \partial(I(t) \times I(\tau))$ Λ не имеет критических точек, семейство Λ определяет некоторый элемент из группы $\pi_2(P(S^m), H(S^m))$. Аналогично, фиксируя выбор коориентации O на стабильных сепаратрисных дисках семейства, получим семейство функций, представляющее элемент из группы $\pi_2(P^{SO}(S^m), H(S^m))$. Для изучения гомотопического типа, не ограничивая общности, можно считать, что функции семейства Λ имеют лишь морсовские критические точки с парой соседних индексов $3 \leq i, i+1 \leq m-2$. Тогда поверхность S критических значений, которая лежит (возможно, с самопересечениями) в пространстве $I(y) \times I(t) \times I(\tau)$ значений-параметров, разбивается кривой Σ критических значений типа “рождения-гибели” на две, возможно несвязные, компоненты $S = S_+ \cup S_-$. Компонента S_+ (S_-) соответствует критическим значениям индекса $i+1$ (i). При ортогональной проекции пространства значений-параметров $I(y) \times I(t) \times I(\tau)$ на плоскость параметров $I(t) \times I(\tau)$ листы поверхности S_+ и S_- проектируются без особенностей. Поверхность S содержит кривую особенностей Σ , причем S_+ примыкает к Σ сверху, а S_- снизу. После малой деформации, сглаживающей углы вдоль Σ , поверхность превращается в погруженную поверхность S' общего положения, а проекция погруженной поверхности S' на плоскость $I(t) \times I(\tau)$ имеет особую кривую складки Σ' , расположенную в малой окрестности кривой Σ . При этом по-прежнему кривая складки Σ' делит поверхность S' на компоненту S'_+ , примыкающую к кривой сверху, и компоненту S'_- , примыкающую снизу.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Скажем, что поверхность S , расположенная (возможно, с самопересечениями) в пространстве $I(y) \times I(t) \times I(\tau)$ и удовлетворяющая описанным выше свойствам, моделирует диаграмму Серфа двупараметрического семейства функций, представляющего элемент из группы $\pi_2(P^{SO}(S^m), H(S^m))$.

ПРОБЛЕМА РАСПОЗНАВАНИЯ ЛОЖНЫХ ДИАГРАММ СЕРФА. *Найти необходимые и достаточные условия, при которых поверхность, моделирующая диаграмму Серфа, действительно соответствует некоторой диаграмме Серфа, т.е. служит поверхностью критических значений какого-либо двупараметрического семейства функций, представляющего элемент $\pi_2(P^{SO}(S^m); H(S^m))$.*

Основным результатом второй части является следствие 7.2 теоремы 3 (см. раздел 7). Показано, что не любая поверхность S , моделирующая диаграмму Серфа, служит поверхностью критических значений. Причина состоит в следующем. Предположим, что для поверхности S выполнены следующие два условия.

1. Каждая связная компонента $\Sigma_0 \subset \Sigma$ при проекции на плоскость $I(t) \times I(\tau)$ самопересекается в четном числе точек.
2. Поверхность S' имеет ненулевой инвариант Арфа. (По поводу определения инварианта Арфа погруженной поверхности см. [31].)

В этом случае S не соответствует никакой диаграмме Серфа двупараметрического семейства функций с коориентированным стратом особенностей A_1 . Показано (см. следствие 7.2), что класс поверхностей, удовлетворяющих условиям 1 и 2, не пуст.

Изложим краткое содержание ч. 2. В разделах 5, 6 развивается теория дискриминантов, что приводит к формулам (13), (15), восстанавливающим класс кобордизма погруженной поверхности $\varphi: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ по особенностям проекции $\pi \circ \varphi: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ на плоскость. Для полноты изложения рассматриваются также формулы для неориентированной погруженной поверхности, хотя для доказательства основной теоремы 3, которое завершается в разделе 8, используется лишь ориентируемый случай. Эти результаты были получены в работе [4]. Здесь мы рассмотрим более простые доказательства формул.

В разделе 9 изложены результаты работ [6], [13]. Исследуется вопрос, при каких условиях отображение общего положения $\varphi: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ реализуется в пространстве $\mathbb{R}^4$? (Определение реализуемости см. в ч. 1.) Оказалось, что частичное препятствие к решению этой задачи связано с теоремой Рохлина о сигнатуре 4-многообразия. Попытка рассмотреть целочисленный аналог препятствия приводит к новой интерпретации первого инварианта Васильева V_2 как инварианта, обобщающего число странности (в смысле В. И. Арнольда [15]) плоской кривой общего положения.

5. Формулы особенностей I -структуры погруженной 2-поверхности в $\mathbb{R}^3$

Под I -структурой ($I = \text{intersection}$) понимается список мультиособенностей проекции общего положения гладкого n -многообразия, погруженного в $(n + k)$ -мерное евклидово пространство, на гиперпространство $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+k}$. Нас будут интересовать случаи $n = 2, 3$; $k = 1$.

В этом разделе мы развиваем технический аппарат, близкий по духу построениям работы [52]. А именно, будут перечислены особенности I -структуры, которые возникают в общем положении при $n = 2, k = 1$. Формулируется предложение 5.1, согласно

первой части которого класс кобордизма погруженной поверхности общего положения в трехмерном пространстве восстанавливается по списку особенностей I -структуры этой поверхности. Кроме того, дается определение так называемой пленочной поверхности, погруженной в пространство. Пленочная поверхность не является поверхностью общего положения. Такая поверхность моделирует диаграмму Серфа двупараметрического семейства функций специального вида, так называемого канонического семейства (определение канонического семейства дается в разделе 8, это понятие необходимо при доказательстве основной теоремы 3). Пленочная поверхность имеет особенности I -структуры специального вида, которые также перечисляются. Класс кобордизма пленочной поверхности (как погруженной ориентированной поверхности) восстанавливается по списку особенностей в третьей части предложения 5.1. Доказательство проводится в следующем разделе.

Пусть $\varphi: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ – погружение, $\pi: \mathbb{R}^3(x, y, z) \rightarrow \mathbb{R}^2(x, y)$ – ортогональная проекция. Рассмотрим диаграмму мультиособенностей проекции $\pi \circ \varphi: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$:

$$(12) \quad \begin{array}{ccc} \varphi(M^2) & \supset & \Sigma^1 \supset \Sigma^{1,1} \\ \cup & & \cup \\ \Delta_2 & \supset & Q \\ \cup & & \\ \Delta_3 & & \end{array} .$$

В этой диаграмме $\Sigma^{1,1} \subset \Sigma^1$ – стратифицированная кривая складки с точками сборки, $\Delta_3 \subset \Delta_2$ – стратифицированная кривая кратных точек погружения φ , $Q = \Sigma^1 \cap \Delta_2$. Диаграмму (12) можно рассматривать как одномерный полиэдр K , вложенный в пространство $\mathbb{R}^3$. Проекция $\pi(K)$ полиэдра на плоскость $\mathbb{R}^2$ имеет дополнительные изолированные особенности:

$\pi\Sigma \odot \pi\Sigma$ – точка самопересечения кривой $\pi\Sigma^1$;

$\pi\Sigma \odot \pi\Delta_2$ – точка пересечения двух ветвей кривых $\pi\Sigma^1$ и $\pi\Delta_2$, которая не получается проектированием никакой особенности на погруженной поверхности, а образуется на плоскости при проекции;

$\pi\Delta \odot \pi\Delta$ – точки самопересечения кривой $\pi\Delta_2$.

Для упрощения обозначений будем пользоваться сокращениями $\pi\Sigma\Sigma$, $\pi\Sigma\Delta$, $\pi\Delta\Delta$. Иллюстрации особенностей приведены на рис. 1.

Заметим, что кривая $\pi\Sigma^1$ является коориентированной, причем стандартная ориентация плоскости позволяет определить на Σ^1 каноническую ориентацию такую, что при обходе кривой $\pi\Sigma^1$ в положительном направлении поверхность $\varphi(M)$ проектируется слева по направлению обхода. В соответствии с направлением вектора ориентации точки сборки делятся на два типа. В положительной точке сборки $x \in \Sigma_+^{1,1} \subset \Sigma^{1,1}$ вектор ориентации $O(x)$ кривой складки направлен в положительном направлении оси проекции π .

Особенности πQ и $\pi\Sigma\Sigma$ разделим на типы в соответствии со следующим правилом. Рассмотрим вектор ориентации $O(x)$, $x \in Q$. Вектор $O(x)$ трансверсален листу поверхности $S \subset \varphi(M)$, не содержащему кривой Σ в малой окрестности точки x . Пусть этот вектор в малой окрестности U_x точки x направлен в сторону полупространства Π_+ , $\partial(\Pi_+) = S$, с границей, параллельной плоскости проекции, и содержащего положительную полуось проекции, отложенную из точки x . В этом случае скажем, что

$\pi\Sigma^{1,1}$	$\pi\Delta_3$	πQ	$\pi\Sigma\Sigma$	$\pi\Sigma\Delta$	$\pi\Delta\Delta$
<i>Bud</i> $\Sigma_+^{1,1}$		<i>Bud</i> Q_+	<i>Bud</i> $\Sigma\Sigma_+$	<i>Bud</i> $\Sigma\Delta$	
<i>Bud</i> $\Sigma_-^{1,1}$		<i>Bud</i> Q_-	<i>Bud</i> $\Sigma\Sigma_-$	<i>Bud</i> $\Sigma\Delta$	

Рис. 1

особенность x имеет разновидность πQ_+ . В другом случае, когда вектор направлен в направлении полупространства Π_- , содержащего отрицательную полуось проекции, скажем, что особенность имеет разновидность πQ_- . Особенность $\pi\Sigma\Sigma$ также разделим на две разновидности. К положительной разновидности $\pi\Sigma\Sigma_+$ отнесем те особые точки, для которых упорядоченный базис (определение порядка векторов дается далее), составленный из векторов $(O(x_1); O(x_2))$ ориентации к ветвям кривой $\pi\Sigma^1$, ориентирован положительно в плоскости $\mathbb{R}^2$. Для определения порядка векторы базиса выбирают так, что вектор $O(x_1)$ соответствует ветви кривой Σ^1 , имеющей большую координату z .

Следующее определение выделяет класс погруженных поверхностей, моделирующих диаграммы Серфа двупараметрических канонических семейств обобщенных морсовских функций (определение см. в разделе 8). Коротко говоря, канонические семейства содержат лишь критические точки двух соседних индексов $i+1, i$. При этом все морсовские критические значения индекса $i+1$ лежат на интервале $]\frac{1}{2}; 1[$, все морсовские критические значения индекса i лежат на интервале $]0; \frac{1}{2}[$, а все критические значения типа “рождения-гибели” равны $\frac{1}{2}$. Согласно предложению 8.1 подпространство канонических функций содержит всю необходимую информацию о гомотопическом типе пространства $P^{SO}(S^m)$, по крайней мере, в пределах изучаемых размерностей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Погруженная поверхность $\varphi: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ называется *пленочной*, если кривая $\Sigma \subset M$ точек складки отображения $\pi \circ \varphi: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ не содержит точек сборки и образ этой кривой при отображении φ лежит в пересечении поверхности с плоскостью $\mathbb{R}^2(x, y) \subset \mathbb{R}^3(x, y, z)$, $z = \frac{1}{2}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из определения вытекает, что произвольная пленочная поверхность M^2 разделена кривой Σ на две компоненты, вообще говоря, несвязные, обозначаемые M_+ и M_- , так, что $M_+ \cup_\Sigma M_- = M^2$. Поверхность M_+ (M_-) расположена в положительном (отрицательном) полупространстве $R_+ = \{z \geq \frac{1}{2}\}$ ($R_- = \{z \leq \frac{1}{2}\}$). Произвольная пленочная поверхность ориентирована. Условимся, что ориентация пленочной поверхности будет задаваться так, что вектор внешней нормали к ориентиро-

ванной поверхности M_+ направлен в положительном направлении оси проекции.

ЗАМЕЧАНИЕ. Естественно дается определение группы кобордизма пленочных поверхностей. Эту группу кобордизма мы будем обозначать через $Imm\Sigma^{so}(2, 1)$. Операция забывания пленочной структуры на погруженной поверхности определяет гомоморфизм $Imm\Sigma^{so}(2, 1) \rightarrow Imm^{so}(2, 1)$. Из результатов работы [19] вытекает, что этот гомоморфизм является изоморфизмом.

Наша ближайшая задача состоит в том, чтобы исследовать особенности I -структуры погруженной поверхности, в частности, пленочной поверхности и найти инвариантные функции этих особенностей при регулярной гомотопии и даже при кобордизмах. Для этого определим следующие числовые характеристики особенностей.

$\sigma \in \mathbb{Z}$ определено как алгебраическое число особенностей типа $\Sigma^{1,1}_+$,

$$\sigma = \text{ord}(\Sigma^{1,1}_+) - \text{ord}(\Sigma^{1,1}_-).$$

$\bar{\sigma} \in \mathbb{Z}$ определено как алгебраическое число особенностей типа $\Sigma^{1,1}$, с учетом веса особенности.

Вес особенности определен ориентированным индексом проекции особенности относительно погруженной кривой проекции складки. Подробнее, пусть $\text{ind}(x)$ – целочисленный индекс особой точки x' относительно ориентированной кривой $\pi\Sigma$, при этом точка x' получена из точки $x \in \pi\Sigma^{1,1}$ сдвигом в направлении острия точки возврата на малый вектор. Определим $\bar{\sigma} = \sum_i \pm \text{ind}(x_i)$, где особенности типа $\Sigma^{1,1}_+$ суммируются с положительными знаками, а особенности типа $\Sigma^{1,1}_-$ суммируются с отрицательными знаками.

$\bar{q} \in \mathbb{Z}$. Пусть $\text{ind}(x)$, $x \in \pi Q$, – индекс точки x' относительно кривой $\pi\Sigma$, где x' получена из точки x сдвигом на малый вектор в направлении коориентирующего вектора к кривой $\pi\Sigma$. Определим $\bar{q} = \sum_i \pm \text{ind}(x_i)$, где особенности разновидности πQ_+ суммируются с положительными, а особенности разновидности πQ_- с отрицательными знаками.

$\sigma\sigma \in \mathbb{Z}$ определим как алгебраическое число особенностей типа $\pi\Sigma\Sigma$,

$$\sigma\sigma = \text{ord}(\pi\Sigma\Sigma_+) - \text{ord}(\pi\Sigma\Sigma_-).$$

$\bar{\sigma}\bar{\sigma} \in \mathbb{Z}$. Пусть $m \subset \mathbb{R}^3$ – прямая, параллельная оси проекции π , проходящая через точки $x_1, x_2 \in \Sigma^1$, $\pi_1(x_1) = \pi_2(x_2) = x$, $x \in \pi\Sigma\Sigma$. Обозначим через m_{int} число точек пересечения m с поверхностью $\varphi(M^2)$, лежащих внутри отрезка $[x_1; x_2]$, включая концевые точки. Обозначим через m_{ext} число точек пересечения m с поверхностью $\varphi(M^2)$, лежащих снаружи интервала $]x_1; x_2[$, исключая концевые точки. Определим $\bar{\sigma}\bar{\sigma} = \sum_i \pm [2m_{\text{int}}(x_i) - m_{\text{ext}}(x_i)]$, где суммирование ведется по всем особенностям $x_i \in \pi\Sigma\Sigma$, причем положительный знак слагаемого выбирается для особенностей разновидности $\pi\Sigma\Sigma_+$ и отрицательный в случае $x_i \in \Sigma\Sigma_-$.

$\delta\delta \pmod{2}$ определяется как четность числа особенностей типа $\pi\Delta\Delta$.

Перейдем к рассмотрению случая пленочной поверхности. По особенностям I -структуры определим следующие числа по модулю 2.

Кривая $\pi\Delta$ точек самопересечения пленочной поверхности получена как объединение двух одномерных многообразий (компонент) вдоль краев $\pi\Delta_{+,+} \cup \pi\Delta_{-,-} = \pi\Delta$ в

соответствии с разновидностями листов поверхности, образующих кривую самопересечения. При этом граничные точки каждой компоненты $\pi\Delta_{+,+}$ и $\pi\Delta_{-,-}$ совпадают с множеством точек самопересечения кривой складки $\varphi(\Sigma)$ на плоскости $\mathbb{R}^2(x, y)$.

$\delta\delta' \pmod{2}$ определим как четность числа точек самопересечения компонент $\pi\Delta_{+,+}$ и $\pi\Delta_{-,-}$ на плоскости проекции. Для наших дальнейших целей будет удобно ввести обозначения (которые будут использоваться при доказательстве предложения 5.1) $(\delta_{++}; \delta_{++})$ и $(\delta_{--}; \delta_{--})$ для четности чисел точек самопересечения кривых $\pi\Delta_{+,+}$ и $\pi\Delta_{-,-}$ соответственно. Теперь число $\delta\delta' \pmod{2}$ можно определить по формуле $\delta\delta' = (\delta_{++}; \delta_{++}) + (\delta_{--}; \delta_{--})$. Отсюда, в частности, можно заметить, что при подсчете числа $\delta\delta$ значение $(\delta_{++}; \delta_{--})$ (которое определяется как четность числа точек пересечения кривых $\pi\Delta_{+,+}$ и $\Delta_{-,-}$, исключая граничные точки этих компонент) не учитывается.

$i\sigma\sigma \pmod{2}$. Пусть $x \in \pi\Sigma\Sigma$. Определим $\text{Ind}(x)$ как индекс точки x' относительно кривой $\pi\Delta$, причем точка x' получена из точки x в результате сдвига на малый вектор по направлению острия сборки на кривой $\pi\Delta$, две ветви которой, $\pi\Delta_{+,+}$ и $\pi\Delta_{-,-}$, примыкают к особой точке $\pi\Sigma\Sigma$. Определим $i\sigma\sigma = \sum_i \text{Ind}(x_i)$, где суммирование ведется по всем особым точкам множества $\pi\Sigma\Sigma$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. Пусть $\varphi: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ – погружение общего положения замкнутой, вообще говоря, неориентированной поверхности.

1. Класс кобордизма погружения φ в группе $\text{Int}^o(2, 1) = \mathbb{Z}/8$ определяется особенностями I -структуры по формуле

$$(13) \quad G(\varphi) = \sigma + 2\sigma\sigma + 4\delta\delta \pmod{8}.$$

2. Справедлива целочисленная формула

$$(14) \quad \overline{\sigma} + 2\overline{\sigma\sigma} + \overline{q} = 0.$$

3. Пусть ψ – пленочная поверхность. Класс кобордизма ψ в группе $\text{Int}^{so}(2, 1) = \mathbb{Z}/2$ определяется по особенностям I -структуры по формуле

$$(15) \quad H(\psi) = \delta\delta' + i\sigma\sigma \pmod{2}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Используя алгебраическую конструкцию инварианта Арфа, определенного для некоторой специальной квадратичной формы, заданной на группе гомологий неориентированных 1-циклов поверхности, погружение которой изучается, можно записать $H(\psi) = \text{Arf}(\psi)$. Аналогично, в случае неориентированной поверхности значение $G(\varphi)$ можно приравнять к обобщенному инварианту Брауна $\mathbb{Z}/4$ -значной квадратичной формы, определяемой на той же группе. Соответствующие конструкции таких форм и определения инвариантов Арфа и Брауна изложены в [31].

ЗАМЕЧАНИЕ. Формула (13) может быть обобщена на произвольные размерности для численного выражения Arf -инварианта (сигнатуры) погруженного замкнутого ориентированного многообразия $M^{2k} \rightarrow \mathbb{R}^{3k}$, $k > 1$. Формула (14) представляется интересной в связи с общей проблематикой работы [16]. Основной результат в этой части обзора (теорема 3) доказан при помощи формулы (15).

ПРИМЕР КОНСТАНТИНОВА. Построим пример пленочной поверхности $\psi: T^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, называемой тором Константинова. Эта поверхность является основным геометрическим объектом исследования в ч. 2. Она используется в следствии 7.3 основной теоремы 3, а также в разделе 9, пример 9.8.

НЕФОРМАЛЬНОЕ ЗАМЕЧАНИЕ. По поводу названия “Тор Константинова” сообщу, что в 1979 году Николай Николаевич Константинов рассказал мне об удивительной кривой на плоскости, которая была им открыта в 1961 году (подтверждением является доклад на семинаре Л. В. Келдыш и неопубликованная рукопись, датированная этим годом). Эта кривая была впоследствии независимо переоткрыта Дж. Милнором; ее рисунок можно найти, например, в книге [30; рис. 1]. Кривая Милнора доставляет нетривиальный пример пленочной поверхности. Тем не менее, мне не удалось выявить никаких интересных свойств этой пленочной поверхности в связи с проблемой распознавания ложных диаграмм Серфа. Пример пленочного тора, который строится ниже, является вариацией на тему, заданной кривой Милнора. Ряд интересных свойств этого тора выявляется следствием 7.3 теоремы 3 и далее, в последнем разделе второй части, который посвящен проблеме реализации отображений 2-поверхностей в 4-пространстве.

Пусть Π_i , $i = 1, 2, 3$, три двумерных поверхности с краем, причем $\Pi_1 \approx D^2$; $\Pi_2 \approx S^1 \times I$; $\Pi_3 \approx T^2 \setminus D^2$. Поверхность тора получается в результате отождествления компонент Π_1 ; Π_2 вдоль общей границы Σ_0 и компонент Π_2 и Π_3 вдоль общей границы Σ_1 . Отображение ψ будет построено так, что при проекции $\pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ кривые Σ_0 и Σ_1 являются кривыми складки и не содержат точек сборки.

Опишем погружение $g_3 = \pi \circ \psi|_{\Pi_3}: \Pi_3 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Рассмотрим на рис. 2 криволинейный плоский шестиугольник $k = ABCDEF$.

Рис. 2

Второй экземпляр $k' = A'B'C'D'E'F'$ шестиугольника выбираем симметричным первому. Определена поверхность $\Pi_3 = k \cup_{\partial} k'$, при этом пары отрезков $AB, A'B', CD, C'D', EF, E'F'$ на границах шестиугольников отождествляются между собой. Построим погружение $g_3: \Pi_3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ так, что $g_3(k)$ пересекается с $g_3(k')$ по шестиугольнику $abcdef$. Образ погружения g ограничен кривой $\pi\Sigma_1 = g(\partial\Pi_3)$. Опишем погружение $g_2 = \pi \circ \psi|_{\Pi_2}: \Pi_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ в соответствии с рис. 3.

Рис. 3

Рассмотрим криволинейный четырехугольник $l = KLMN$, изображенный жирной линией. Еще два экземпляра четырехугольника, конгруэнтные исходному, обозначим через $l' = K'L'O'P'$ и $l'' = K''L''M''N''$. Отождествим соответствующие отрезки в четырехугольниках l, l', l'' , помеченные одинаковыми буквами. В результате отождествления получим цилиндр $L \cup_{\partial} L' \cup_{\partial} L'' = \Pi_2$, ограниченный кривыми Σ_0, Σ_1 . Этот цилиндр, погруженный в плоскость посредством отображения g_2 , осуществляет гомотопию кривых $\pi\Sigma_0$ и $\pi\Sigma_1$, изображенных на рис. 4.

Рис. 4

Погружение $g_1: \Pi_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ параметризует диск с граничной кривой $\pi\Sigma_0$. Отождествив три построенные поверхности в соответствии с указанным выше правилом, получим проекцию тора $g: T^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, имеющую лишь особенности складки на кривых Σ_0, Σ_1 . Чтобы построить погружение ψ такое, что $\pi \circ \psi = g$, достаточно погрузить эти кривые в плоскость, части поверхности Π_1, Π_3 погрузить в верхнюю полуплоскость с

границей $\mathbb{R}^2$, а поверхность Π_2 погрузить в нижнюю полуплоскость посредством задания подходящих функций ρ_i , $i = 1, 2, 3$, высоты вдоль оси проекции. При этом функцию высоты следует выбирать тождественно равной 0 на Σ_j , $j = 1, 2$, положительной на $\Pi_1 \setminus \partial\Pi_1$ и отрицательной на $\Pi_2 \setminus \partial\Pi_2$. Построение примера закончено.

Изучим I -структуру погруженной пленочной поверхности Константинова. Удобно воспользоваться методом “шляпных диаграмм”, описанным в книге [27]. Заметим, что “шляпные диаграммы” и I -структура поверхности зависят от выбора функций высоты ρ_i . Для некоторого выбора этих функций I -структура пленочной поверхности Константинова изображена на рис. 5.

Рис. 5

Заметим, что функции ρ_i выбраны так, что поверхность Константинова симметрична относительно поворота на угол $2\pi/3$ относительно оси, проходящей через центральную точку a_1 типа $\pi\Delta_3$ и перпендикулярной плоскости проекции. Отрезки линии самопересечения изображены на рисунке линиями различной толщины. Три отрезка $[b_6, b_1]$, $[b_2, b_3]$, $[b_4, b_5]$, изображенные жирной линией, соответствуют кривой $\pi\Delta_+$ и образованы в результате самопересечения поверхности $\psi(\Pi_3)$. Точки b_i , $i = 1, \dots, 6$, на концах этих отрезков имеют особенность типа $\pi\Sigma\Sigma$. Участки линии самопересечения, помеченные тонкой линией, соответствуют кривой $\pi\Delta_-$ и образованы самопересечением поверхности $\psi(\Pi_2)$. Точки самопересечения кривых $\pi\Delta_+$ и $\pi\Delta_-$ обозначены на рисунке через c_i , $i = 1, 2, 3$.

Рассмотрим малую деформацию общего положения $\psi \rightarrow \varphi$, где I -структура поверхности $\varphi(T^2)$ изображена на рис. 6.

Рис. 6

Важно проследить за деформацией в окрестности точек типа $\pi\Sigma\Sigma$. Выбор деформации определяется типами точек, помеченных на рис. 6. При этом каждый касп b_i деформируется в пару точек $q_{i,+}$, $q_{i,-}$ типа πQ противоположных знаков. Вне окрестности указанных особенностей I -структура поверхности не изменяется.

Вычислим значения слагаемых в формулах (12)–(14) на примере погружения Константинова. Очевидны равенства $\sigma(\varphi) = \bar{\sigma}(\varphi) = 0$. Далее,

$$\begin{aligned} \sigma\sigma(d_{i,+}) &= 1, \quad \sigma\sigma(d_{i,-}) = -1, \quad i = 1, \dots, 6; \quad \delta(c_j) = 1, \quad j = 1, 2, 3; \\ m_{\text{ext}}(d_{i,+}) &= m_{\text{ext}}(d_{i,-}) = 0, \quad m_{\text{int}}(d_{i,+}) = m_{\text{int}}(d_{i,-}) = 2; \\ \bar{\sigma}\bar{\sigma} &= \sum_i [2m_{\text{int}}(d_{i,+}) - m_{\text{ext}}(d_{i,+})] - [2m_{\text{int}}(d_{i,-}) - m_{\text{ext}}(d_{i,-})] = 0; \\ \bar{q}(q_{i,+}) &= +1, \quad \bar{q}(q_{i,-}) = -1; \quad (\delta_{++}, \delta_{++}) = (\delta_{--}, \delta_{--}) = 0; \\ \text{Ind}(b_{2j}) &= 0, \quad \text{Ind}(b_{2j-1}) = 1, \quad i\sigma\sigma = \sum_j \text{Ind}(b_{2j-1}) = 1 \pmod{2}, \quad j = 1, 2, 3; \\ (\delta_{+,+}, \delta_{-,-}) &= 1; \quad \delta\delta = 1, \quad \delta\delta' = 0. \end{aligned}$$

При подстановке значений в формулы (13) и (15) получаем

$$G(\varphi) = 4 \pmod{8}, \quad H(\psi) = 1 \pmod{2}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Формула (14) содержит ненулевые слагаемые для поверхностей Боя и для погруженной сферы, двулистно накрывающей эту поверхность. Эти вычисления можно найти в [4].

6. Особенности I -структуры погруженного 3-многообразия в $\mathbb{R}^4$

В этом разделе будет доказано предложение 5.1. Пусть N^3 – гладкое трехмерное многообразие с краем $\partial(N^3) = M^2$, $\psi: (N^3, M^2) \rightarrow (\mathbb{R}^3 \times [0; +\infty), \mathbb{R}^3 \times \{0\})$ – погружение общего положения этого многообразия в 4-мерное евклидово пространство, $\pi: \mathbb{R}^3 \times [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^2 \times [0; +\infty)$ – стандартная ортогональная проекция. Если край не пуст, предположим, что особенности I -структуры проекции π , ограниченные на край M^2 , находятся в общем положении. Мультиособенности проекции $\pi \circ \psi: N^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \times [0; +\infty)$ включены в следующую диаграмму:

$$(16) \quad \begin{array}{ccccccc} \psi(M^3) & \supset & \Sigma^1 & \supset & \Sigma^{1,1} & \supset & \Sigma^{1,1,1} \\ \cup & & \cup & & \cup & & \\ \Delta_2 & \supset & Q & \supset & S & & \\ \cup & & \cup & \nearrow & & & \\ \Delta_3 & \supset & T & & R & & \\ \cup & & & & & & \\ \Delta_4 & & & & & & \end{array} .$$

В этой диаграмме $\Sigma^{1,1,1} \subset \Sigma^{1,1} \subset \Sigma^1$ – стратифицированная поверхность сборки, содержащая кривые складки и изолированные особенности типа “ласточкин хвост”, $\Delta_4 \subset \Delta_3 \subset \Delta_2$ – стратифицированная поверхность кратных точек погружения ψ , причем точки кратности 3 образуют кривые Δ_3 , вдоль которых поверхность Δ_2 самопересекается с кратностью 3, точки Δ_4 кратности 4 образуют конечное множество, причем в окрестности каждой точки пересекаются 6 листов поверхности Δ_2 и 4 ветви кривой Δ_3 . Поверхности Σ^1 и Δ_2 на многообразии $\psi(N^3)$ пересекаются вдоль кривой Q . Конечное множество особенностей типа T состоит из точек пересечения кривой Δ_3 и поверхности Σ^1 на погруженном многообразии $\psi(M^3)$. Аналогично, конечное множество S образовано пересечением кривой $\Sigma^{1,1}$ и поверхности Δ_2 . Конечное множество особенностей типа R образовано в результате самопересечения поверхности $\psi(\Sigma^1)$ в пространстве $\mathbb{R}^4$. Другим способом особые точки типа R могут быть определены как критические точки проекции $\pi: \Delta_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Особенности, определенные диаграммой (16), образуют двумерный полиэдр специального вида, причем проекция этого полиэдра в $\mathbb{R}^3$ имеет особенности самопересечения общего положения. Проекцию этого полиэдра будем называть полиэдром I -структуры погружения ψ . Тем самым, после введения очевидных обозначений возникают следующие три типа особых кривых, лежащих в пространстве $\mathbb{R}^3$:

$$\pi\Delta_2 \odot \pi\Sigma^1, \quad \pi\Delta_2 \odot \pi\Delta_2, \quad \pi\Delta_2 \odot \pi\Sigma^{1,1},$$

и 10 типов изолированных особых точек:

$$\begin{aligned} &\pi\Delta_2 \odot \pi\Delta_2 \odot \pi\Delta_2, \quad \pi\Delta_2 \odot \pi\Delta_2 \odot \pi\Sigma^1, \quad \pi\Delta_2 \odot \pi\Sigma^1 \odot \pi\Sigma^1, \\ &\pi\Sigma^1 \odot \pi\Sigma^1 \odot \pi\Sigma^1, \quad \pi\Delta_3 \odot \pi\Delta_2, \quad \pi\Delta_3 \odot \pi\Sigma^1, \\ &\pi Q \odot \pi\Delta_2, \quad \pi Q \odot \pi\Sigma^1, \quad \pi\Sigma^{1,1} \odot \pi\Sigma^1, \quad \pi\Sigma^{1,1} \odot \pi\Delta_2. \end{aligned}$$

Заметим, например, что множество особенностей $\pi\Delta_2 \odot \pi\Sigma^1$ не совпадает, вообще говоря, с множеством $\pi\Delta_2 \cap \pi\Sigma^1$, так как к первому относятся не все точки пересечения указанных кривых на плоскости, а лишь те, которым соответствуют различные

прообразы при проектировании. Для сокращения обозначений будем использовать символы $\pi\Delta\Delta$, $\pi\Sigma\Sigma$, $\pi\Sigma\Delta$ не только для изолированных особенностей I -структуры для $n = 2$ в диаграмме (12), но и для соответствующих ветвей особых кривых в диаграмме (16) при $n = 3$.

Согласно мультиструйному аналогу теоремы Тома о трансверсальности множество погружений, имеющих только описанные особенности I -структуры, образует открытое и всюду плотное подпространство в пространстве всех погружений $Imm(N^3; \mathbb{R}^4)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ФОРМУЛЫ (13). Приступим к доказательству формул предложения 5.1. Докажем, что выражение $G(\varphi)$ является инвариантом кобордизма. Пусть $\varphi_i: M_i \rightarrow \mathbb{R}^3$; $i = 1, 2$, погружения, $\psi: N^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \times I$ — кобордизм, связывающий погружения φ_1, φ_2 , такой, что $\partial N^3 = M_1 \cup M_2$; $\psi|_{M_1} = \varphi_1$; $\psi|_{M_2} = \varphi_2$. Особенности I -структуры погружений φ_1, φ_2 связаны кобордизмом особенностей I -структуры погружения ψ . Это означает, что полиэдры вида (16) особенностей I -структуры погружений φ_1, φ_2 ограничивают двумерный полиэдр особенностей I -структуры погружения ψ , заданный диаграммой вида (15). Рассмотрим список изолированных особых точек I -структуры погружения ψ , примыкающих к особой кривой $\pi\Sigma^1 \odot \pi\Sigma^1$:

$$\pi R, \quad \pi\Sigma^1 \odot \pi\Sigma^1 \odot \pi\Sigma^1, \quad \pi\Sigma^1 \odot \pi\Sigma^1 \odot \pi\Delta_2, \quad \pi Q \odot \pi\Sigma^1.$$

Следующий список составляют изолированные особенности, содержащие в малой своей окрестности особые кривые $\pi\Delta_2 \odot \pi\Delta_2$:

$$\pi T, \quad \pi R, \quad \pi\Delta_2 \odot \pi\Delta_2 \odot \pi\Delta_2, \quad \pi\Delta_2 \odot \pi\Delta_2 \odot \pi\Sigma^1, \quad \pi Q \odot \pi\Delta_2.$$

Следующий список составляют изолированные особенности, содержащие в малой своей окрестности кривые πQ :

$$\pi T, \quad \pi R, \quad \pi S, \quad \pi Q \odot \pi\Sigma^1, \quad \pi Q \odot \pi\Delta_2.$$

Выражение G и каждое слагаемое σ , $\sigma\sigma$ и $\delta\delta$ определяют одномерные коцепи на 1-остове полиэдра I -структуры. Проверка инвариантности выражения G при кобордизмах состоит в том, что мы доказываем, что коцепь G является коциклом по модулю 8. Аналогичное утверждение ранее использовалось в [84].

Среди перечисленных особенностей имеются три, в окрестности которых коцепь G имеет особенность, связанную с примыканием 1-ребер с носителем G различных типов, а именно:

$$\pi\Sigma^{1,1,1}, \quad \pi R, \quad \pi\Sigma^{1,1} \odot \pi\Sigma^1.$$

Рассмотрим каждую особенность по отдельности.

К особой точке $\pi\Sigma^{1,1,1}$ примыкают два ребра α, α' особенности $\pi\Sigma^{1,1}$ и одно ребро $\gamma \subset \pi\Sigma^1 \odot \pi\Sigma^1$. Легко проверяется тождество:

$$\sigma(\alpha) + \sigma(\alpha') + 2\sigma\sigma(\gamma) = 0,$$

где слагаемые выражения обозначают значения коцепей на соответствующих 1-симплексах. Здесь и далее проверка этого и аналогичных тождеств происходит в соответствии с изложением [2].

К особенности πR примыкают две пары вертикальных ребер $\pi\Sigma^1 \odot \Sigma^1$, обозначаемых через $(\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2})$, $(\alpha_{2,1}, \alpha_{2,2})$, и ребро $\varepsilon \in \pi\Delta\Delta$. Справедливо равенство:

$$2\sigma\sigma(\alpha_{1,1}) + 2\sigma\sigma(\alpha_{2,1}) + 4\delta\delta(\varepsilon) = 2\sigma\sigma(\alpha_{1,2}) + 2\sigma\sigma(\alpha_{2,2}).$$

Заметим, что кощепь $\delta\delta$ не является целочисленной и равенство следует понимать по модулю 8.

К особенности $\pi\Sigma^{1,1} \odot \pi\Sigma^1$ примыкает пара вертикальных ребер α_1, α_2 типа $\pi\Sigma^{1,1}$ и пара ребер $\gamma, \gamma' \in \pi\Sigma^1 \odot \pi\Sigma^1$. Справедливы равенства:

$$\sigma\sigma(\gamma) + \sigma\sigma(\gamma') = 0, \quad \sigma(\alpha_1) = \sigma(\alpha_2).$$

Проведенные вычисления доказывают, что $G(\varphi_1) = G(\varphi_2)$, если φ_1 и φ_2 лежат в одном классе кобордизма группы $Imm^o(2, 1)$. В соответствии с вычислением значения G из раздела 5 для погружения Константинова $\varphi: T^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ имеем $G(\varphi) = 4 \pmod{8}$. По предложению 1.1 гомоморфизм $I: Imm^{so}(2, 1) \rightarrow Imm^o(2, 1)$ является мономорфизмом. Поскольку гомоморфизм $G \circ I: Imm^{so}(2, 1) \rightarrow \mathbb{Z}/8$ является мономорфизмом, отображение $G: Imm^o(2, 1) \rightarrow \mathbb{Z}/8$ также является мономорфизмом. Формула (13) доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ФОРМУЛЫ (14). Проверим, что кощепь B является целочисленным коциклом. Перечислим изолированные особенности I -структуры, в окрестности которых имеются 1-симплексы с носителем B :

$$\begin{array}{cccc} \pi\Sigma^{1,1,1}, & \pi S, & \pi T, & \pi R, \\ \pi\Sigma^{1,1} \odot \pi\Sigma^1, & \pi\Sigma^1 \odot \pi\Sigma^1 \odot \pi\Sigma^1, & \pi Q \odot \pi\Sigma^1. \end{array}$$

К особой точке $\pi\Sigma^{1,1,1}$ примыкают два ребра $\alpha, \alpha' \subset \pi\Sigma^{1,1}$ и ребро $\gamma \subset \pi\Sigma^1 \odot \pi\Sigma^1$. Справедливо равенство:

$$\overline{\sigma}(\alpha) = \overline{\sigma}(\alpha') = -2[-m_{\text{ext}}(\gamma) + 2m_{\text{int}}(\gamma)].$$

К особой точке πS примыкает пара вертикальных ребер $\beta_1, \beta_2 \subset \pi Q$ и пара вертикальных ребер $\alpha_1, \alpha_2 \subset \pi\Sigma^{1,1}$. Имеем $\overline{q}(\beta_1) = \overline{q}(\beta_2)$, $\overline{\sigma}(\alpha_1) = \overline{\sigma}(\alpha_2)$.

К особой точке πT примыкают две пары $\beta_{i,1}, \beta_{i,2}, i = 1, 2$, вертикальных ребер πQ , пара вертикальных ребер $\pi\Delta_3$ и две пары вертикальных ребер $\varepsilon_{i,1}, \varepsilon_{i,2} \subset \pi\Sigma^1 \odot \pi\Delta_2$. Справедливо равенство $\overline{q}(\beta_{i,1}) = \overline{q}(\beta_{i,2})$.

К особой точке типа πR примыкают пара вертикальных ребер $\gamma_1, \gamma_2 \subset \pi\Sigma^1 \odot \pi\Sigma^1$, две пары вертикальных ребер $\beta_{i,1}, \beta_{i,2}, i = 1, 2$, типа πQ и одно ребро $\pi\Delta_3$. Справедливо равенство:

$$\overline{\sigma}\overline{\sigma}(\gamma_1) + \overline{q}(\beta_{1,1}) + \overline{q}(\beta_{2,1}) = \overline{\sigma}\overline{\sigma}(\gamma_2) + \overline{q}(\beta_{1,2}) + \overline{q}(\beta_{2,2}).$$

К особой точке типа $\pi\Sigma^{1,1} \odot \pi\Sigma^1$ примыкают два ребра $\gamma, \gamma' \subset \pi\Sigma^1 \odot \pi\Sigma^1$ и пара вертикальных ребер $\alpha_1, \alpha_2 \subset \pi\Sigma^{1,1}$. Справедливо тождество:

$$\overline{\sigma}\overline{\sigma}(\gamma) + \overline{\sigma}\overline{\sigma}(\gamma') + \overline{\sigma}(\alpha_1) = \overline{\sigma}(\alpha_2).$$

К особой точке типа $\pi\Sigma^1 \odot \pi\Sigma^1 \odot \pi\Sigma^1$ примыкают три пары вертикальных ребер $\gamma_{i,1}, \gamma_{i,2}, i = 1, 2, 3$, типа $\pi\Sigma^1 \odot \pi\Sigma^1$. Справедливо равенство:

$$\sum_i \overline{\sigma\sigma}(\gamma_{i,1}) = \sum_i \overline{\sigma\sigma}(\gamma_{i,2}).$$

(Заметим, что $\overline{\sigma\sigma}(\gamma_{i,1}) \neq \overline{\sigma\sigma}(\gamma_{i,2})$.)

К особой точке $\pi Q \odot \pi\Sigma^1$ примыкают пара вертикальных ребер β_1, β_2 особой кривой πQ , пара α_1, α_2 вертикальных ребер особой кривой $\pi\Sigma^1 \odot \pi\Sigma^1$ и пара вертикальных ребер особой кривой $\pi\Sigma^1 \odot \pi\Delta_2$. Справедливо равенство

$$\overline{q}(\beta_1) + \overline{\sigma\sigma}(\alpha_1) = \overline{q}(\beta_2) + \overline{\sigma\sigma}(\beta_2).$$

Проведенные вычисления доказывают, что для погружений φ_1, φ_2 , лежащих в одном классе кобордизма $Imm^o(2, 1)$, справедливо равенство $B(\varphi_1) = B(\varphi_2)$. По теореме 1.1 имеем $Imm^o(2, 1) \otimes Q = 0$. Формула (14) доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ФОРМУЛЫ (15). Определим группу $Imm\Sigma^{so}(2, 1)$ как одну из разновидностей группы кобордизмов погружений, следуя построениям работы [19]. Пусть $\varphi: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ – погружение ориентированной поверхности M^2 . Скажем, что погружение φ имеет регулярную складку, если проекция $\pi \circ \varphi: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ не имеет точек сборки и вектор внешней нормали к поверхности в точках кривых складки $\Sigma^1 \subset M^2$ проектируется в коориентирующий вектор к кривой $\pi\Sigma$, т.е. внешним образом по отношению к проекции поверхности. Определено разбиение $M = M_+ \bigcup_{\Sigma} M_-$ в соответствии с направлениями векторов внешней нормали вдоль оси проекции.

Естественным образом определяется отношение кобордантности на множестве погружений с регулярными складками. Скажем, что два погружения φ_1, φ_2 кобордантны в группе $Imm\Sigma^{so}(2, 1)$, если кобордизм $\psi: N \rightarrow \mathbb{R}^3 \times I$, связывающий построенные погружения в группе $Imm^{so}(2, 1)$, не имеет кривых сборки при проекции $\pi \circ \psi: N \rightarrow \mathbb{R}^2 \times I$ и имеет регулярную поверхность складки в смысле предшествующего определения. Определено естественное отображение $p: Imm^{so}\Sigma(2, 1) \rightarrow Imm^{so}(2, 1)$, которое согласно [19] является изоморфизмом.

Пусть $\psi: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ – пленочная поверхность. Ориентируем поверхность M^2 так, что вектор внешней нормали к листу M_+ (M_-) направлен в положительную (отрицательную) сторону оси проекции π . Заметим, что при таком выборе ориентации погружение ψ обладает регулярной складкой.

Пусть $\varphi: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ есть C^∞ -близкое к ψ погружение общего положения. По особенностям I -структуры погружения φ определим следующее числовое выражение:

$$\overline{H}(\varphi) = (\delta_{++}; \delta_{++}) + (\delta_{--}; \delta_{--}) + (\delta_{+-}; \delta_{+-}) + (\delta_{++}, \delta_{+-}) + i(q_-) \pmod{2}.$$

Определим каждое слагаемое в этом выражении. Числа $(\delta_{++}; \delta_{++})$ и $(\delta_{--}; \delta_{--})$ были определены ранее (в частном случае пленочной поверхности) при формулировке предложения 5.1. Разобьем кривую $\pi\Delta$ на три компоненты $\pi\Delta_{++}$, $\pi\Delta_{--}$, $\pi\Delta_{+-}$ в соответствии с обозначениями листов M_+ и M_- поверхности M , образующих в пересечении рассматриваемую компоненту.

Число $(\delta_{++}; \delta_{++})$ определено как четность числа точек самопересечения кривой $\pi\Delta_{++}$ на плоскости, которые возникают при проектировании. В частности, это означает, что точка тройного самопересечения поверхности не вносит вклада в выражение. Аналогично определим

$$\begin{aligned}(\delta_{--}; \delta_{--}) &= \text{ord}(\pi\Delta_{--} \odot \pi\Delta_{--}) \pmod{2}, \\(\delta_{+-}; \delta_{+-}) &= \text{ord}(\pi\Delta_{+-} \odot \pi\Delta_{+-}) \pmod{2}, \\(\delta_{++}, \delta_{+-}) &= \text{ord}(\pi\Delta_{++} \odot \pi\Delta_{+-}) \pmod{2}.\end{aligned}$$

Определим разновидности πQ_+ и πQ_- особенностей типа πQ . Скажем, что $q \in \pi Q_+$, если один из листов поверхности, не содержащий кривую складки, имеет разновидность M_+ . В противном случае $q \in \pi Q_-$. Для каждой точки $q_j \in \pi Q_-$ определим $i(q_-)$ как индекс точки q'_j относительно кривой $\pi\Delta$, где q'_j получена из q_j в результате малого сдвига вдоль коориентирующего вектора к кривой $\pi\Sigma$. Далее определим $\text{ind}(q_-) = \sum_j \text{ind}(q_j) \pmod{2}$, $q_j \in \pi Q_-$.

ЛЕММА 6.1. *Для поверхности φ с регулярной складкой выражение $\overline{H}(\varphi)$ не зависит от выбора погружения в классе кобордизма в группе $\text{Int}\Sigma^{so}(2, 1)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\psi: N^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \times I$ — кобордизм погружений φ_1 и φ_2 . Исследуем список изолированных особенностей I -структуры, малая окрестность которых содержит компоненты особых кривых $\pi\Delta\Delta$, πQ , но не содержит ветви кривой $\pi\Sigma^1$. Список состоит из следующих особенностей:

$$\pi T, \quad \pi R, \quad \pi Q \odot \pi\Sigma^1, \quad \pi Q \odot \pi\Delta, \quad \pi\Delta \odot \pi\Delta \odot \pi\Delta, \quad \pi\Delta \odot \pi\Delta \odot \pi\Sigma^1.$$

Докажем, что 1-коцикл $\text{mod } 2$, построенный по $\overline{H}$, когомологичен $0 \pmod{2}$. Содержательная проверка возникает для случаев особенностей типов πT , πR , $\pi Q \odot \pi\Delta$.

Рассмотрим особенность $\pi Q \odot \pi\Delta$. Разберем два случая в зависимости от разновидности особой кривой πQ_+ или πQ_- в окрестности особенности. К особенности, образованной πQ_+ , примыкают две вертикальные ветви особой кривой $\pi\Delta\Delta$, которые имеют одну из трех возможных пар разновидностей:

$$[(++), (++)]; (+-), (++)], \quad [(++), (--); (+-), (--)], \quad [(++), (+-); (+-), (+-)].$$

Напомним, что разновидности $(+-)$ и $(-+)$ совпадают. Значения коцепи $\overline{H}$ в каждом случае на паре вертикальных ветвей особой кривой совпадают. Две вертикальные ветви кривой πQ_+ также имеют совпадающие значения коцепи $\overline{H}$.

Рассмотрим особенность $\pi Q \odot \pi\Delta$, в окрестности которой расположена кривая πQ_- . В окрестности этой особенности расположены две вертикальные ветви особой кривой $\pi\Delta\Delta$, которые имеют одну из трех возможных пар разновидностей:

$$[(+-), (++)]; (--), (++)], \quad [(+-), (--); (--), (--)], \quad [(+-), (+-); (--), (+-)].$$

Значения коцепи $\overline{H}$ в каждом случае на паре вертикальных ветвей особой кривой различаются. В окрестности этой особенности расположено две ветви вертикальной кривой πQ_- , причем значения коцепи $\overline{H}$ на ветвях особой кривой различаются.

Следовательно, в каждом разобранным случае коцикл $\overline{H}$ является коциклом в окрестности особой точки $\pi Q \odot \pi \Delta$.

Рассмотрим случай особенности πT . К особой точке примыкают пара вертикальных ребер особенности $\pi \Delta \Delta$ и две пары вертикальных ребер особенности πQ . Перечислим разновидности пары особых кривых типа πQ :

$$(\pi Q_{1,+}, \pi Q_{2,+}), \quad (\pi Q_{1,-}, \pi Q_{2,-}), \quad (\pi Q_{1,-}, \pi Q_{2,-}).$$

Две пары вертикальных ребер $\pi \Delta \Delta$ имеют разновидности

$$[(+,+), (+,-); (+,-), (++)], \quad [(+,-), (+,-); (--), (++)], \quad [(+,-), (--); (--), (+,-)].$$

В первом и третьем случаях значения коцикла $\overline{H}$ на соответствующих парах вертикальных ребер особенности $\pi \Delta \Delta$ совпадают. В первом случае значения $\overline{H}$ на каждой паре вертикальных ребер особенности πQ совпадают, в третьем на каждой паре различаются. Во втором случае значения коцикла $\overline{H}$ на паре вертикальных ветвей кривой πQ_+ совпадают, на паре ветвей кривой πQ_- различаются и на паре ветвей особой кривой $\pi \Delta \odot \pi \Delta$ различаются. Следовательно, $\overline{H} \pmod{2}$ является коциклом в окрестности рассмотренных особенностей.

Рассмотрим случай особенности πR . К особой точке примыкают две пары вертикальных ребер особенности πQ и одно ребро особенности $\pi \Delta \Delta$. Значение коцикла $\overline{H}$ на ребре $\pi \Delta \Delta$ равно 0. Значения $\overline{H}$ на соответствующих парах вертикальных ребер особенности πQ совпадают. Мы доказали, что $\overline{H}$ является коциклом. Лемма 6.1 доказана.

Завершим доказательство формулы (15). Пусть $\psi: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ – пленочная поверхность, $\varphi: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ – погружение общего положения, C^∞ -близкое к погружению ψ . При этом кривая складки Σ ортогональной проекции поверхности на плоскость уже не лежит в этой выделенной плоскости.

Рассмотрим выражение $\overline{H}(\varphi) \pmod{2}$. По лемме 6.1 это выражение не зависит от представителя в классе кобордизма. С другой стороны, очевидно равенство $H(\psi) = \overline{H}(\varphi)$. Последнее утверждение легко проиллюстрировать примером. I -структура для поверхностей Константинова и C^∞ -близкой поверхности общего положения изображена на рис. 4 и 5 соответственно. По вычислениям предыдущего раздела получим $\overline{H}(\varphi) = H(\psi) = 1 \pmod{2}$. Предложение доказано.

7. Диаграмма Серфа двупараметрического семейства функций

Пусть $C(M)$ – пространство псевдоизотопий гладкого односвязного многообразия M , $m = \dim(M) > 5$. Для простоты изложения рассмотрим случай $M = S^m$, хотя все построения переносятся на случай произвольного ориентируемого многообразия. Зафиксируем на сфере S^m стандартную риманову метрику и напомним определения, следуя [17]. Элемент пространства $C(S^m)$ представляется диффеоморфизмом $\alpha: S^m \times I \rightarrow S^m \times I$, причем $\alpha|_{S^m \times \{0\}} = \text{Id}$. Определено отображение $p: C = C(S^m) \rightarrow H = H(S^m) \subset F = F(S^m)$, где F – пространство функций $f: S^m \times I \rightarrow I$, $f(S^m \times i) = i$, $i = \{0\}; \{1\}$, совпадающих со стандартной проекцией в малой окрестности границы, $H \subset F$ – подпространство функций, не имеющих критических точек.

Отображение p определено по формуле $\alpha \rightarrow \pi \circ \alpha$, где $\pi: S^m \times I \rightarrow I$ – стандартная проекция. Отображение p является гомотопической эквивалентностью, и пространство F является стягиваемым. Таким образом, при всех s имеем $\pi_s(C) = \pi_s(H) = \pi_{s+1}(F, H)$. Элемент этой гомотопической группы в интересующем нас случае $s = 1$ может быть описан следующим образом.

Обозначим через $I(x), I(y), I(t), I(\tau)$ четыре экземпляра пространства единичного отрезка $[0; 1]$ с соответствующей координатой. Пусть $\Lambda: S^m \times I(x) \rightarrow I(y)$ – двупараметрическое семейство функций общего положения, $(t, \tau) \in I(t) \times I(\tau)$ такое, что ограничение семейства Λ на границу $\partial(I(t) \times I(\tau))$ значений параметров не имеет критических значений. Ограничение семейства Λ в точке (t, τ) пространства параметров будем обозначать через $\lambda(t, \tau)$. Внутри пространства значений+параметров множество критических значений семейства Λ образует поверхность $S \rightarrow I(y) \times I(t) \times I(\tau)$. Гомотопиям представителей в заданном классе эквивалентности $\pi_2(F, H)$ соответствуют деформации семейства Λ в классе описанных семейств в пространстве 3 параметров. В частности, семейство Λ представляет нулевой элемент в относительной гомотопической группе тогда и только тогда, когда существует деформация $\Lambda \rightarrow \Lambda'$, при которой деформация на границе пространства параметров $\partial(I(t) \times I(\tau))$ происходит в классе функций без критических значений, причем семейство Λ' также не имеет критических значений.

Особенности функций семейства Λ описываются локальными нормальными формами, которые в интересующем нас случае $s = 1$ имеют следующий вид.

1. Невырожденная критическая точка (особенность типа Морса)

$$-x_1^2 - \dots - x_i^2 + x_{i+1}^2 + \dots + x_m^2 + x_{m+1}^2.$$

2. Критическая точка типа рождения или гибели пары морсовских критических точек при деформации в однопараметрическом семействе функций

$$-x_1^2 - \dots - x_i^2 + x_{i+1}^2 + \dots + x_m^2 + x_{m+1}^3.$$

3. Критическая точка типа “ласточкин хвост”, образованная в результате слияния или распада пары особых точек типа “рождения или гибели” при деформации в двупараметрическом семействе функций

$$-x_1^2 - \dots - x_i^2 + x_{i+1}^2 + \dots + x_n^2 \pm x_{n+1}^4.$$

При двупараметрических деформациях функций общего положения критических точек более высокой кратности вырождения не встречается.

Согласно результатам [37] произвольное семейство Λ , определяющее элемент гомотопической группы $\pi_2(F, H)$, может быть продеформировано в семейство, имеющее лишь особые точки типа 1 двух соседних индексов $i, i + 1$ и точки типа 2.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.1. Семейство функций Λ называется $(i + 1, i)$ -нормальным (при этом подразумевается, что каждая функция $\lambda(t, \tau)$ семейства лежит в пространстве $P^{SO}(S^m)$), если выполнены два следующих условия.

1. Семейство Λ не содержит особых точек типа “ласточкин хвост” и содержит только морсовские особые точки сигнатуры $i + 1, i$, где $m > i + 1 > i > 1$.
2. На каждом сепаратрисном диске семейства, восстановленном в критической точке семейства индекса $i + 1$ или i , введена ориентация, непрерывно зависящая от выбора сепаратрисного диска в семействе.

ЗАМЕЧАНИЕ. Правильное обобщение настоящего определения на случай семейств с большим числом параметров, содержащих высшие особенности, вероятно, связано с результатами В. А. Васильева [84], который построил комплекс особенностей вещественнозначных функций с учетом естественной коориентации стратов особенностей. Наш результат связан с рассмотрением простейших стратов $\Sigma^1 = A_1 \supset \Sigma^{1,1} = A_2$, при этом естественная коориентация на страте Σ^1 не определена, но вводится дополнительно условием 2 из определения 7.1. Важные результаты при изучении комплекса Васильева получены М. Э. Казаряном в работе [43].

Перейдем к формулировке основной теоремы. Для любого нормального (точнее, $(i, i+1)$ -нормального) семейства определена поверхность критических значений S и кривая $\Sigma \subset S$ критических значений типа “рождения-гибели”. При этом на кривой Σ имеется дополнительная структура, так что определено разбиение на компоненты $\Sigma = \Sigma_+ \cup \Sigma_-$, вообще говоря, несвязные. К компоненте Σ_+ отнесем те критические точки, в окрестности которых рождается (погибает) пара морсовских особых точек индексов $(i+1, i)$, для которых коэффициент инцидентности сепаратрисных траекторий равен $+1$. Если этот коэффициент равен -1 , то соответствующая компонента кривой обозначается Σ_- . Определены группы кобордизмов $ImmLM(s)$, $s = 1, 2$, s -параметрических нормальных семейств, причем отношение кобордантности задается $(s+1)$ -параметрическими семействами, также удовлетворяющими условиям 1, 2. Определены гомоморфизмы

$$\begin{aligned}\varkappa_s: ImmLM(s) &\longrightarrow Imm^{so}(s, 1), \\ \rho_s: ImmLM(s) &\longrightarrow Imm^{so}(s-1, 1).\end{aligned}$$

Гомоморфизм $\varkappa_2$ сопоставляет двумпараметрическому нормальному семейству Λ класс кобордизма сглаженной погруженной поверхности S' критических значений в трехмерном пространстве $I(t) \times I(\tau) \times I(y)$ значений и параметров. При этом ориентация на поверхности критических значений нормального семейства выбирается такой, что вектор внешней нормали к листу поверхности, образованному критическими значениями индекса $i+1$, направлен в положительном направлении вдоль оси значений $I(y)$.

Гомоморфизм ρ_2 сопоставляет двумпараметрическому нормальному семейству Λ класс кобордизма кривой Σ_- критических значений типа “рождения-гибели” отрицательной разновидности (тот же класс кобордизма определен кривой Σ_+ положительной разновидности), которая проектируется на пространство параметров $I(t) \times I(\tau)$.

ТЕОРЕМА 3. Следующая диаграмма

$$(17) \quad \begin{array}{ccc} ImmLM(2) & \xrightarrow{\varkappa_2} & Imm^{so}(2, 1) \\ \rho_2 \downarrow & & \delta_2 \downarrow \\ Imm^{so}(1, 1) & \xrightarrow{j_2} & Imm^o(1, 1) \end{array}$$

(в которой гомоморфизм δ_2 определен в первой части работы как обратный к гомоморфизму Кана–Придди, изоморфизм j_2 индуцирован забыванием ориентации) оказывается коммутативной, причем оба гомоморфизма $\varkappa_2$ и ρ_2 являются эпиморфизмами.

(Для удобства читателя напомним, что в случае рассматриваемых размерностей оба гомоморфизма δ_2 и j_2 являются изоморфизмами.)

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае $s = 1$ также определена коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} ImmLM(1) & \xrightarrow{\varkappa_1} & Imm^{so}(1, 1) \\ \rho_1 \downarrow & & \delta_1 \downarrow \\ Imm^{so}(0, 1) & \xrightarrow{j_1} & Imm^o(0, 1) \end{array}$$

посредством аналогичных построений. Автору не известно, обобщается ли теорема 3 на случай семейств с числом параметров $s > 2$ в предложенной форме. В работе [32] имеются обсуждения, относящиеся, возможно, к проблеме построения диаграммы при $s = 3$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема 3 допускает эквивалентную переформулировку. Пусть $\varkappa_i \in \Pi_i$, $i = 1, 2$, — элемент стабильной гомотопической группы сфер, определенный диаграммой Серфа i -параметрического семейства, $\rho_i \in \Pi_{i-1}$ — элемент стабильной гомотопической группы сфер, представленный $(i - 1)$ -мерным подмногообразием особенностей сборки отрицательной разновидности. Справедливы тождества: $\alpha \circ \rho_i = \varkappa_i$, где $\alpha \in \Pi_1$ — образующая, $\Pi_1 \circ \Pi_{i-1} \rightarrow \Pi_i$ — композиция. Тогда в стабильных гомотопических группах сфер (см. введение).

ЗАМЕЧАНИЕ. Ниже в предложении 8.3 приводится пример двухпараметрического нормального семейства $\Lambda(t, \tau)$ такого, что погруженная поверхность $\varkappa_2(\Lambda)$ является образующей в группе кобордизмов $Imm^{so}(2, 1)$. Этот пример строится по аналогии с примером образующей группы $\pi_2(F_3(\mathbb{R}^1))$ (по поводу определений см. введение к ч. 2) из работы В. А. Васильева [86], см. также книгу [85; рис. 20]. Формально говоря, этот пример потребуется для доказательства эпиморфности гомоморфизма $\varkappa_2$. Эпиморфность гомоморфизма ρ_2 вытекает тогда из коммутативности диаграммы.

СЛЕДСТВИЕ 7.2. Пусть поверхность S , моделирующая диаграмму Серфа двухпараметрического нормального семейства функций, удовлетворяет условиям 1 и 2, сформулированным во введении, т.е. после сглаживания углов погруженная поверхность S' в пространстве $I(y) \times I(t) \times I(\tau)$ имеет ненулевой Argf -инвариант u , кроме того, проекция каждой компоненты кривой критических значений типа “рождения-гибели” на плоскость $I(t) \times I(\tau)$ самопересекается в четном числе точек. Тогда поверхность S не может быть реализована как поверхность критических значений диаграммы Серфа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть нашлось семейство Λ , для которого S служит поверхностью критических значений. По условию $\varkappa_2(\Lambda) = 1$, $\rho_2(\Lambda) = 0$. По теореме 1.2 ч. 1 гомоморфизм $\delta: Imm^{so}(2, 1) \rightarrow Imm^o(1, 1)$ является изоморфизмом. Эти условия противоречат коммутативности диаграммы (17). Следствие 7.2 доказано.

СЛЕДСТВИЕ 7.3. Пусть поверхность S моделирует диаграмму Серфа канонического семейства функций (определение см. в следующем разделе), при этом после сглаживания углов поверхность S превращается в погруженную поверхность Константина. Тогда поверхность S не может служить диаграммой Серфа ни для какого канонического двухпараметрического семейства функций Λ .

ЗАМЕЧАНИЕ. Если вдобавок потребовать выполнение нижеперечисленных условий 1, 2, 3, то предыдущее следствие вытекает из результатов Игусы [40].

1. Ограничение семейства Λ на границу пространства параметров совпадает со стандартной проекцией на сомножитель $I(x)$.
2. Все компоненты кривой сборки имеют положительный тип.
3. Все элементы из группы $\pi_1(SO(i+1))$, которые задают функцию склейки стабильных сепаратрисных дисков вдоль каждой компоненты кривой сборки, обращаются в нуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 7.3. В соответствии с вычислениями раздела 5 Argf -инвариант поверхности Константинова равен 1, и, следовательно, поверхность удовлетворяет условиям в следствии 7.2. Доказательство закончено.

8. Доказательство основной теоремы 3

Изложим предварительные алгебраические сведения, следуя книге [57]. Пусть L – кольцо (для простоты изложения коммутативное). Рассмотрим подгруппу $E(n, L) \subset GL(n, L)$ в группе обратимых матриц размера $n \times n$, порожденную всевозможными элементарными матрицами $e_{i,j}^\lambda$, где элемент $\lambda \in L$ стоит на (i, j) -месте, $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$, все диагональные элементы равны 1, а на остальных местах стоят нули. Определим $E(L) = \lim_n E(n, L)$ и $K_2(L) = H_2(E(L); \mathbb{Z})$. Группа $K_2(L)$ допускает описание в терминах образующих и соотношений.

Пусть $n \geq 3$. Рассмотрим группу $St(n; L)$, порожденную образующими $x_{i,j}^\lambda$ и соотношениями

$$(18) \quad x_{i,j}^\lambda x_{i,j}^\mu = x_{i,j}^{\lambda+\mu},$$

$$(19) \quad [x_{j,i}^\lambda, x_{l,i}^\mu] = x_{l,i}^{-\lambda\mu}, \quad i \neq l, \quad \text{где } [a, b] = aba^{-1}b^{-1},$$

$$(20) \quad [x_{i,j}^\lambda, x_{k,l}^\mu] = 1, \quad j \neq k, \quad i \neq l.$$

Далее определим $St(L) = \lim_n St(n, L)$. Определен канонический гомоморфизм $\varphi: St(L) \rightarrow GL(L)$ формулой $\varphi(x_{i,j}^\lambda) = e_{i,j}^\lambda$. Группа $K_2(L)$ совпадает с подгруппой $\ker \varphi$ и является центром группы $St(L)$.

Нас будет интересовать случай, когда кольцо L совпадает с кольцом целых чисел. Согласно теореме Милнора справедливо равенство $K_2(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2$, причем изоморфизм $t: K_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \pi_1(SO) = \mathbb{Z}/2$ устанавливается следующим правилом. Пусть $\prod_{s=1}^k x_{i_s, j_s}^{\lambda_s}$ представляет элемент из $K_2(\mathbb{Z})$. Определим отображение $h: S^1 \rightarrow GL(\mathbb{R})$ по формуле $h(t) = \prod_{s=1}^k \varphi(x_{i_s, j_s}^{\lambda_s t})$, $0 \leq t \leq 1$, где матрица $h(t)$, зависящая от параметра, представляется произведением обратимых унимодулярных матриц над полем вещественных чисел. По построению $h(0) = h(1) = E$. Гомотопическая эквивалентность $SO \subset GL(\mathbb{R})$ определяет элемент $\pi_1(SO) = \mathbb{Z}/2$ (см., например, [23], [66]), и гомоморфизм t является изоморфизмом.

Нам потребуется несколько технических обозначений. Для числа $u \in \mathbb{Z}$ определим символ $w_{i,j}(-1) = x_{i,j}^{-1} x_{j,i}^1 x_{i,j}^{-1}$, $h_{i,j}(-1) = w_{i,j}^2(-1)$. Матрица $\varphi(h_{i,j}(-1))$ является диагональной, причем отличается от единичной только элементами $a_{i,i} = a_{j,j} = -1$. Определим $p_{i,j,k} = w_{i,j}(-1) h_{k,j}(-1)$, где все числа i, j, k попарно различны. Матрица $\varphi(p_{i,j,k})$ переставляет элементы базиса с номерами (i, j) и обращает вектор базиса

с номером k . Далее для сокращения формул будем использовать обозначение $p_{i,j,k}$ (и аналогичные обозначения) не только для символа, но и для матрицы.

Напомним основные конструкции работы [33], в которой соответствующие построения проводились для более общего случая неодносвязного многообразия. Пусть $\lambda: S^m \times I \rightarrow I$ — функция Морса, имеющая лишь невырожденные критические точки индексов $i+1$, i с попарно различными критическими значениями. Предположим, что в окрестности каждой критической точки индекса $i+1$ зафиксирована ориентация стабильного сепаратрисного диска размерности $i+1$ и в окрестности критической точки индекса i зафиксирована ориентация нестабильного сепаратрисного диска размерности $m+1-i$. Упорядочим множества $\{a_1, \dots, a_q\}$, $\{b_1, \dots, b_q\}$ критических точек индексов $i+1$, i в соответствии с возрастанием (убыванием) критических значений. Определен цепной комплекс $\mathbb{Z}$ -модулей

$$(21) \quad 0 \longrightarrow C_{i+1} \xrightarrow{A} C_i \longrightarrow 0,$$

порожденный клеточным разбиением многообразия $S^m \times I(x)$, построенным по функции λ и ориентации сепаратрисных дисков. Комплекс (21) точен, и группы цепей снабжены выделенными базисами, согласованными с нумерацией критических точек.

Пусть $\lambda(t): S^m \times I \rightarrow I$ — однопараметрическое семейство функций общего положения, $t \in I(t)$. Для всех значений параметра t , кроме конечного числа особых значений, функция $\lambda(t)$ является морсовской с различными критическими значениями. На многообразии $S^m \times I$ зафиксируем стандартную риманову метрику. Для конечного числа значений параметра t функция $\lambda(t)$ имеет особенности одного из следующих типов.

A1. Особенность типа “рождения или гибели” пары морсовских критических точек. В соответствии со значениями коэффициентов инцидентности сепаратрисных дисков различаются две разновидности особенности Σ_+ , Σ_- . Условимся, что в окрестности каждой такой особенности стабильный $(i+1)$ -мерный и нестабильный $(m-i+1)$ -мерный сепаратрисные диски двух морсовских особых точек не содержат никаких сепаратрисных траекторий, за исключением единственной, которая сами точки соединяет. Этого можно добиться в результате дополнительной деформации функции (не являющейся, вообще говоря, деформацией общего положения) в малой окрестности критической точки, после которой все дополнительные траектории сокращаются при помощи особенностей A2, A4 (см. ниже).

A2. Особенности V_+ (V_-) образованы градиентными траекториями, соединяющими два критических морсовских значения одного индекса $i+1$ (i соответственно). При этом для сокращения формулировок под особенностью указанного типа мы иногда будем понимать концевые точки особой траектории, что позволит нам рассматривать эти особенности не только в многообразии $S^m \times I(x)$, но и в пространстве параметров+значений. Для удобства читателя опишем эту особенность подробнее.

Пусть при $t = t_0 - \varepsilon$ функция $\lambda(t)$ имеет две критических точки a, b индекса i с различными критическими значениями $\lambda(a) < y_0 < \lambda(b)$. Пусть $D_+(a)$ — сепаратрисный диск, образованный входящими градиенто-подобными траекториями функции $\lambda(t)$ в критической точке a . Этот диск имеет размерность $n+1-i$ и пересекает подмногообразие $\lambda^{-1}(y_0) \subset S^n \times I$ по вложенной сфере $S_a^{n-i}(t)$ размерности $n-i$. Аналогично, пусть $D_-(b)$ — сепаратрисный диск размерности i , образованный выходящими градиенто-подобными траекториями функции $\lambda(t)$ в критической точке b . Этот диск

пересекает то же многообразие $\lambda^{-1}(y_0)$ по вложенной сфере $S_b^{i-1}(t)$. Особенность V_- связана с точкой трансверсального пересечения сфер $S_a^{n-i}(t)$, $S_b^{i-1}(t)$ в многообразии $\lambda^{-1}(y_0)$, образованной в момент времени $t = t_0$. Особая сепаратрисная траектория, соединяющая критические точки a, b индекса i , проходит через точку пересечения $S_a^{n-i}(t_0)$ и $S_b^{i-1}(t_0)$. Описание особенности V_+ аналогично.

А3. Особенность Δ_+ (Δ_-) совпадения двух критических значений одинаковых индексов $i + 1$ (i соответственно). Особенность $\Delta_{+,-}$ совпадения двух критических значений разных индексов.

А4. Особенность сокращения пары сепаратрисных траекторий с противоположными алгебраическими знаками, соединяющих пару критических точек соседних индексов.

Рассмотрим особенности двухпараметрического нормального семейства общего положения $\Lambda(t, \tau)$, представляющего элемент $ImmLM(2)$. Поверхность критических значений такого семейства имеет особенности типов А1–А4 и изолированные особые точки следующих четырех типов.

В1. Изолированные особенности I -структуры поверхности критических значений в пространстве значений-параметров.

В2. Особенности пересечения общего положения особых кривых V_+ , V_- с особенностями I -структуры поверхности критических значений.

В3. Изолированные особые сепаратрисные траектории W_+ и W_- , связанные с соотношениями (19), (20) в группе $St(\mathbb{Z})$. Концевые точки этих траекторий служат вершинами одномерного графа с ребрами, образованными концевыми точками особых траекторий V_+ , V_- .

В4. Особенности типа “обмена” сепаратрисных траекторий. Эти особенности связаны с перестройками особых траекторий, соединяющих критические точки одинакового индекса. (Определения и свойства см. в [37].) Каждая особенность этого вида является отрезком сепаратрисы в $S^m \times I(x)$, концы которого соединяют вершины одномерного графа особых кривых V_+ , V_- . Эту особенность можно рассматривать не только в многообразии $S^m \times I(x)$, но и на диаграмме Серфа. Для удобства читателя опишем эту особенность подробнее.

Пусть при значениях параметров $t = t_0$, $\tau = \tau_0$ функция $\Lambda(t, \tau)$ имеет критическую точку a индекса i и критическую точку b индекса $i + 1$, причем $\Lambda(a) > y_0 > \Lambda(b)$, так что функция $\Lambda(t, \tau)$ в окрестности рассматриваемых значений параметров не является правильной. Пусть $D_-(a)$ – сепаратрисный диск точки a , образованный выходящими сепаратрисными градиенто-подобными траекториями размерности i . Пусть $D_+(b)$ – сепаратрисный диск точки b размерности $n - i$, образованный входящими градиенто-подобными траекториями размерности $n - i$. Диски $D_-(a)$ и $D_+(b)$ пересекают подмногообразие уровня $\lambda^{-1}(y_0)$ по сферам $S_a^{i-1}(t, \tau)$, $S_b^{n-i-1}(t, \tau)$ размерности $i - 1$, $n - i - 1$ соответственно. При $(t, \tau) = (t_0, \tau_0)$ сферы $S_a^{i-1}(t_0, \tau_0)$, $S_b^{n-i-1}(t_0, \tau_0)$ имеют точку самопересечения, неустранимую при рассмотрении деформации особенности в двухпараметрическом семействе. Отрезок особой сепаратрисной траектории проходит через эту точку.

Для дальнейших рассмотрений нам потребуется случай специальных семейств не общего положения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КАНОНИЧЕСКОГО ДВУПАРАМЕТРИЧЕСКОГО СЕМЕЙСТВА ФУНК-

ций. Скажем, что семейство Λ является *каноническим*, если выполнено следующее условие: поверхность критических значений $S \hookrightarrow I_y \times I_t \times I_\tau$ является пленочной в смысле определения из раздела, при этом особые кривые типа “рождения-гибели”, соответствующие точкам складки пленочной поверхности, имеют критические значения $1/2$.

Чтобы иметь возможность перестраивать особенности В4 типа “обмена” сепаратрисных траекторий, требуется, чтобы диаграмма Серфа канонического семейства допускала особенности $\pi\Sigma\Sigma$ двух различных разновидностей. Сформулируем это утверждение подробнее.

C1. Особенности $\pi\Sigma\Sigma$ допускают две разновидности. Особенности первой разновидности являются границами пары ветвей каждой из кривых V_+ и V_- . Окрестность особенности $\pi\Sigma\Sigma$ второй разновидности не содержит кривых V_+ и V_- .

Поясним, как устроены особенности обеих разновидностей. Пусть $\lambda(t, \tau_0 - \varepsilon_2)$, $t \in [t_0 - \varepsilon_1; t_0 + \varepsilon_1]$, — однопараметрическое семейство функций (по параметру t), заданное в малой окрестности критической точки $(t_0; \tau_0)$ типа C1, где $1 \gg \varepsilon_1 \gg \varepsilon_2 > 0$. В окрестности критического значения расположены две ветви кривой диаграммы Серфа. Предположим, что при каждом значении параметра ε_2 семейство функций λ имеет особую точку типа Δ_+ при $t = t_1(\varepsilon_2)$, особую точку типа Δ_- при $t = t_2(\varepsilon_2)$ и две особые точки типа “гибели” при значениях t , превышающих t_2 , причем $t_1(\varepsilon_2) > t_2(\varepsilon_2)$ при каждом $\varepsilon_2 > 0$. При $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ имеем $t_1 = t_2 = t_0$. Пусть при каждом ε_2 при некотором значении $t_3(\varepsilon_2)$ параметра t на паре ветвей диаграммы имеется особенность типа V_+ и при некотором t_4 имеется особенность V_- , причем $t_3 > t_1$. В зависимости от условий $t_4 > t_2$ или $t_4 < t_2$ следует различать два случая. В первом случае дополнительной деформацией особенности V_+ и V_- удастся сократить так, что в окрестности особого значения (t_0, τ_0) особенностей типов V_+ и V_- не появляется, этот случай соответствует особенности C1 второй разновидности. Во втором случае сократить особенности, не меняя при этом структуру самопересечения поверхности критических значений, не удастся. Этот случай соответствует особенности первой разновидности.

Фактически, рассмотрение канонических семейств не приводит к потере общности. Более формально, справедливо следующее предложение, которое доказано в [5].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.1. *Произвольный класс кобордизма нормальных семейств из группы $\text{Int}LM(2)$ представляется каноническим семейством.*

КОНСТРУКЦИЯ 8.2. Опишем ключевую конструкцию, необходимую для доказательства основной теоремы. Пусть $\Lambda(t, \tau)$ — каноническое семейство функций. Пусть τ_0 — неособое значение параметра деформации, при котором семейство $\lambda(t) = \Lambda(t; \tau)|_{\tau=\tau_0}$ имеет особенности типов A1–A3. Определим элемент $\Phi(\tau) \in K_2(\mathbb{Z})$.

Пусть $t = t_0$ — значение параметра деформации, при котором функция $\lambda(t)|_{t=t_0}$ является правильной функцией Морса. Пусть $A(t_0): C_{k+1} \rightarrow C_k$ — оператор границы в цепном комплексе (21), $\dim(C_k) = \dim(C_{k+1}) = s$. Определим расширения групп цепей $\overline{C}_{k+1}, \overline{C}_k$, добавляя две образующие, индексированные 0 и -1 . Построим оператор $\overline{A}(t_0): \overline{C}_{k+1} \rightarrow \overline{C}_k$, который будем называть оператором в пополненном цепном

комплексе. Зададим матрицу оператора $\overline{A}(t_0)$ по формуле:

$$(22) \quad |\overline{A}(t_0)| = \begin{pmatrix} a_{-1,-1} & 0 & 0 \\ 0 & a_{0,0} & 0 \\ 0 & 0 & A(t_0) \end{pmatrix},$$

где числа $a_{-1,-1}$, $a_{0,0}$ принимают значения $+1$, -1 и вычисляются согласно следующему правилу. Пусть $a(t_0)$ – количество особенностей типа Σ_- семейства $\lambda(t)$ в промежутке значений параметра $0 < t \leq t_0$. Пусть $b(t_0)$ – количество особенностей типа Δ совпадения пары критических значений при тех же значениях параметра. Заметим, что четность чисел $a(t_0)$ и $b(t_0)$ не изменится, если перейти к рассмотрению соответствующих особенностей на промежутке $t_0 < t \leq 1$. Определим $a_{-1,-1} = (-1)^{b(t_0)}$, $a_{0,0} = (-1)^{a(t_0)}$.

Пусть $T = \{t_1, \dots, t_l\}$ – множество особых значений параметра в семействе $\lambda(t)$. Опишем цепочку элементарных преобразований матриц расширенных операторов $\overline{A}(t)$ в окрестности каждого критического значения параметра из множества T :

$$(23) \quad E = \overline{A}(t_1 - \varepsilon) \xrightarrow{w(t_1)} \overline{A}(t_1 + \varepsilon) = \overline{A}(t_2 - \varepsilon) \xrightarrow{w(t_2)} \dots \\ \dots \xrightarrow{w(t_{l-1})} \overline{A}(t_{l-1} + \varepsilon) = \overline{A}(t_l - \varepsilon) \xrightarrow{w(t_l)} \overline{A}(t_l + \varepsilon) = E.$$

Начальный и конечный члены цепочки образованы единичной матрицей E . Разберем случаи различных типов особенностей и определим преобразования w для каждого типа в соответствии со следующими правилами.

1. Особенность типа Σ . Пусть функция $\lambda(t_i)$, $t_i \in T$, имеет особую точку типа “рождения” пары морсовских критических точек e_s, f_s . В дальнейшем соответствующий символ, например $h_{0,q}(-1)$, мы будем понимать так же, как и матрицу $\varphi(h_{0,q}(-1))$, для сокращения обозначений. Рассмотрим две разновидности особенности. Для особенности разновидности Σ_+ , т.е. в случае $\text{lk}(e_q, f_q) = +1$ (где lk – коэффициент инцидентности), определим $w(t_i)$ как тождественное преобразование. Для особенности разновидности Σ_- , т.е. в случае $\text{lk}(e_q, f_q) = -1$, преобразование определим по формулам $\overline{A}(t_i + \varepsilon) = \overline{A}(t_i - \varepsilon)h_{0,q}(-1)$. Для особенности типа “гибели” пары морсовских критических точек определим $w(t_i)$ обратными формулами. В частности, для особенности разновидности Σ_- определим $\overline{A}(t_i + \varepsilon) = \overline{A}(t_i - \varepsilon)h_{0,q}^{-1}(-1)$.

2. Особенность типа V . Преобразование $w(t_i)$ определено нижеследующими формулами в соответствии с разновидностью особенности, подробнее см. [37].

$$V_+. \quad \overline{A}(t_i + \varepsilon) = e_{j,k}^\lambda \overline{A}(t_i - \varepsilon).$$

$$V_-. \quad \overline{A}(t_i + \varepsilon) = \overline{A}(t_i - \varepsilon)e_{k,j}^\lambda.$$

3. Особенность типа Δ . Будем различать два типа преобразований в соответствии с разновидностями особенности Δ_+ , Δ_- . Каждый тип преобразования подразделяется на две разновидности в соответствии со значением коэффициента $a_{-1,-1}$ в матрице $\overline{A}(t_i + \varepsilon)$ оператора.

$$1_{(+).} \Delta_+. \quad m_{-1,-1}(t_i - \varepsilon) = 1.$$

$$\overline{A}(t_i + \varepsilon) = p_{j,j+1,-1} \overline{A}(t_i - \varepsilon).$$

$$1_{(-)} \cdot \Delta_+ \cdot m_{-1,-1}(t_i - \varepsilon) = -1.$$

$$\overline{A}(t_i + \varepsilon) = [p_{j,j+1,-1}]^{-1} \overline{A}(t_i - \varepsilon).$$

$$2_{(+)} \cdot \Delta_- \cdot m_{-1,-1}(t_i - \varepsilon) = 1.$$

$$\overline{A}(t_i + \varepsilon) = \overline{A}(t_i - \varepsilon) p_{j,j+1,-1}.$$

$$2_{(-)} \cdot \Delta_- \cdot m_{-1,-1}(t_i - \varepsilon) = -1.$$

$$\overline{A}(t_i + \varepsilon) = \overline{A}(t_i - \varepsilon) [p_{j,j+1,-1}]^{-1}.$$

Описанная цепочка преобразований (23) определяет элемент $\Phi(\tau) \in St(\mathbb{Z})$. По построению $\varphi(\Phi(\tau))$ совпадает с единичной матрицей, в частности, $a_{-1,-1} = a_{0,0} = 1$. Таким образом, $\Phi(\tau) \in K_2(\mathbb{Z})$. Описание конструкции завершено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Изложим краткое доказательство, а полное доказательство можно найти в [8]. Согласно предложению 8.1 достаточно доказать коммутативность диаграммы (17) для случая канонического семейства $\Lambda(t, \tau)$. Рассмотрим функцию $\Phi(\tau)$, зависящую от переменной $\tau \in I(\tau)$. Изучим точки разрыва функции на всей области определения. Необходимо проверить, что функция $\Phi(t)$ непрерывна при всех значениях параметра τ , за исключением критических значений с особенностями $\pi\Delta\Delta$, $\pi\Sigma\Sigma$.

В особых точках $\pi\Delta\Delta$ непрерывность функции зависит от разновидности особенности. В точках пересечения особых кривых $\pi\Delta_+$ и $\pi\Delta_-$ функция $\Phi(\tau)$ непрерывна. В точках самопересечения особых кривых $\pi\Delta_+$ и $\pi\Delta_-$ функция имеет разрыв.

В особых точках τ типа $\pi\Sigma\Sigma$ функция изменяется в соответствии с формулой

$$(24) \quad \Phi(\tau_i - \varepsilon) - \Phi(\tau_i + \varepsilon) = \frac{1}{2} [(-1)^{[\text{sign}(x_i) + \text{Ind}(x_i)]} - 1] \pmod{2},$$

где $\text{sign}(x_i) = 1$, если $x_i \in \pi\Sigma_- \odot \pi\Sigma_-$, и $\text{sign}(x_i) = 0$, если $x_i \in \pi\Sigma_+ \odot \pi\Sigma_+$ или $x_i \in \pi\Sigma_+ \odot \pi\Sigma_-$, $\text{Ind}(x_i)$ – индекс особой точки, определенный в разделе 5.

Доказательство теоремы 3 основывается на формуле (24). Обозначим через $\text{ord}[\delta(\Phi)]$ четность числа точек разрыва функции. Поскольку $\Phi(0) = \Phi(1)$, справедливо равенство $\text{ord}[\delta(\Phi)] = 0$. С другой стороны, это число может быть вычислено по формуле

$$\text{ord}[\delta(\Phi)] = \sum_i (-1)^{\text{sign}(x_i) + \text{Ind}(x_i)} + (\delta_{++}; \delta_{++}) + (\delta_{--}; \delta_{--}) \pmod{2}.$$

В соответствии с формулой (15) указанная сумма равна $\text{Arf}(S) + \text{ord}(\pi\Sigma\Sigma_-)$, где первое слагаемое обозначает класс кобордизма поверхности критических точек, заданный в группе $\text{Imm}^{so}(2, 1)$ числом 0 или 1. По определению гомоморфизма $\varkappa_2$ запишем $\text{Arf}(S) = \varkappa_2(\Lambda)$. Значение второго слагаемого определяется выражением $\rho_2(\Lambda)$ в группе кобордизма $\text{Imm}^{so}(1, 1)$ и также определяется числом 0 или 1. Запишем $\text{ord}(\pi\Sigma\Sigma_-, -) = \rho_2(\Lambda)$. Коммутативность диаграммы (17) доказана.

Для завершения доказательства теоремы 3 осталось воспользоваться следующим предложением, доказанным в [5].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.3. В диаграмме (17) отображение $\varkappa_2$ является эпиморфизмом.

9. Аппроксимация вложениями отображений общего положения поверхностей в объемлющем пространстве $\mathbb{R}^4$. Теорема Рохлина о сигнатуре и аналоги инварианта странности для диаграммы узла

Пусть $f: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ — гладкое отображение общего положения замкнутой ориентированной поверхности. При каких условиях композиция $i \circ f: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ аппроксимируется ε -близким гладким вложением $g: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ для произвольного $\varepsilon > 0$? Другими словами, когда отображение f дискретно реализуется в пространстве $\mathbb{R}^4$? Следующее предложение дает ответ на поставленный вопрос.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.1. *Отображение f дискретно реализуется в пространстве $\mathbb{R}^4$ тогда и только тогда, когда существует гладкое вложение $\bar{f}: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ такое, что $f = \pi \circ \bar{f}$, где $\pi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ — стандартная проекция.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Предложение 9.1 сформулировано в виде гипотезы в работе [13]. Ниже в 9.6–9.9 приводится конструкция (частичного) алгебраического препятствия к решению задачи реализации. Эта конструкция получена в совместной работе автора [13] и обобщает алгебраическую конструкцию из [6].

Отложим доказательство предложения 9.1 и сформулируем вначале необходимые и достаточные условия существования вложения $\bar{f}$. Будем говорить, что отображение f является Prem-отображением (Prem = projected embedding), см. [81], если вложение $\bar{f}$ с указанными свойствами существует. Далее в этом разделе для сокращения будем подразумевать под поверхностью не только M^2 , но и образ отображения f общего положения.

Напомним структуру особенностей для поверхности общего положения в трехмерном пространстве. Кривая Δ_2 точек самопересечения поверхности состоит из конечного числа замкнутых компонент и некоторого числа компонент с краем, погруженных в пространство. Концевые точки незамкнутых компонент соответствуют особым точкам отображения f , имеющим тип зонтика Уитни. Кривая Δ_2 , которую далее для краткости будем обозначать через Δ , вообще говоря, самопересекается в конечном множестве особых точек с кратностью 3. Эти точки самопересечения будут обозначаться через Δ_3 , они соответствуют точкам тройного самопересечения поверхности в пространстве.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ Prem-СТРУКТУРЫ. *Локальной Prem-структурой на поверхности $f(M^2)$ называется ориентация $O = \{O_i\}$ или, точнее, набор ориентаций, заданных на каждой связной компоненте $\Delta(i)$ кривой двойных точек.*

Заметим, что кривая $f^{-1}(\Delta) = \bar{\Delta}$ является погруженным многообразием в M^2 и определено двулистное накрытие $p: \bar{\Delta} \rightarrow \Delta$ всюду, за исключением граничных точек кривой Δ . По предположению M^2 ориентирована и, следовательно, накрытие p является тривиальным. Ориентация O позволяет определить каноническое разбиение компонент кривой $\bar{\Delta}$ на пару компонент $\bar{\Delta} = \bar{\Delta}_+ \cup \bar{\Delta}_-$, каждая из которых тривиально покрывает кривую Δ . К компоненте $\bar{\Delta}_+$ отнесем те ветви кривой, для которых упорядоченный базис пространства $\mathbb{R}^3$, составленный из векторов $(O(x), \xi_+(x), \xi_-(x))$, правоориентирован, где x точка на кривой Δ ; $\xi_+(x)$ ($\xi_-(x)$) — вектор нормали к ориентированному листу поверхности, содержащему ветвь кривой $\bar{\Delta}_+$ ($\bar{\Delta}_-$ соответственно), приложенный в точке x .

Обозначим через L_i , $i = 1, 2, 3$, листы поверхности $f(M^2)$ в малой окрестности трехкратной точки самопересечения $y \in \Delta_3$, упорядоченные произвольным образом. Пусть o_i – векторы ориентации к кривой Δ , приложенные в точке y , при этом o_i трансверсально L_i . Точке y сопоставим неупорядоченную тройку чисел, составленную из $+1$ или -1 . Припишем вектору o_i значение $+1$, если этот вектор сонаправлен с вектором нормали к ориентированному листу поверхности L_i , в противном случае припишем вектору значение -1 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.2. Скажем, что точка $y \in \Delta_3$ имеет тип A , если ей приписана тройка чисел $(+1; +1; -1)$ (разновидность A_+) или тройка чисел $(+1; -1; -1)$ (разновидность A_-). Скажем, что точка y имеет тип B , если ей приписана тройка $(+1; +1; +1)$ (разновидность B_+) или тройка $(-1; -1; -1)$ (разновидность B_-).

КРИТЕРИЙ 9.3. Гладкое отображение f общего положения тогда и только тогда является Ргем-отображением, когда существует ориентация O на кривой Δ , задающая локальную Ргем-структуру, для которой все точки множества Δ_3 имеют тип A .

ЗАМЕЧАНИЕ. Критерий был ранее сформулирован в других терминах в работе [29]. Использование понятия локальной Ргем-структуры на кривой Δ , о котором сообщил автору А. Сюч, позволило существенно упростить формулировку.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО КРИТЕРИЯ изложено в [6].

СЛЕДСТВИЕ 9.4. Существует погружение $\varphi: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, которое дискретно не реализуется в $\mathbb{R}^4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В качестве погружения φ можно выбрать двулистное накрытие $S^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ над поверхностью Боя $\varkappa: \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, приведенное малой деформацией в общее положение в пространстве $\mathbb{R}^3$ как граница погруженной регулярной трубчатой окрестности. Подробности см. [6].

ОСНОВНОЕ СЛЕДСТВИЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ 9.1. Пространство C^0 -отображений $[S^2; \mathbb{R}^3]$, снабженное компактно-открытой топологией, содержит открытое и всюду плотное подпространство $\mathfrak{R}$, состоящее из отображений, которые дискретно не реализуются в $\mathbb{R}^4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\widehat{\mathfrak{R}} \subset [S^2; \mathbb{R}^3]$ – дополнение к указанному подпространству, которое описывается как подпространство тех отображений $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, для которых при любом $\varepsilon > 0$ существует вложение $g: S^2 \subset \mathbb{R}^4$ такое, что $\|I \circ f - g\| < \varepsilon$, $I: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$. По определению $\widehat{\mathfrak{R}}$ замкнуто. Действительно, если f_0 лежит в замыкании $\widehat{\mathfrak{R}}$, то найдется последовательность $g_i: S^2 \subset \mathbb{R}^4$ вложений, сходящихся к f_0 , что доказывает $f_0 \in \widehat{\mathfrak{R}}$.

Пространство $\mathfrak{R}$ является всюду плотным. Действительно, для произвольного $f \in [S^2; \mathbb{R}^3]$ можно определить отображение $g = f \# \varkappa$, где $\varkappa$ построено в следствии 9.4. Выбирая $\text{diam}(\varkappa(\varepsilon))$ достаточно малым, получим $\|f - g\| < \varepsilon$. Следствие доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ. Связь предыдущего следствия с общей проблематикой вложимости полиэдров и аппроксимаций вложениями отображений полиэдров в евклидовы пространства исследуется в работах [13], [70].

Оказывается, с выбором произвольной локальной Рим-структуры поверхности $f(M^2)$ связана квадратичная форма $q: H = H_1(M^2; \mathbb{Z}/2) \rightarrow \mathbb{Z}/2$, позволяющая вычислить четность числа тройных точек типа В и препятствующая нахождению вложения $\bar{f}$, которое разрешает в 4-пространстве особую кривую Δ в соответствии с заданной локальной Рим-структурой.

Определим квадратичную форму q в соответствии со следующим правилом. Пусть $l: S^1 \subset M^2$, $L = l(S^1)$ – вложенная петля, определяющая цикл $x \in H_1(M^2; \mathbb{Z}/2)$. Обозначим через $\text{ord}(L \cap \bar{\Delta}_+)$ четность числа точек пересечения кривых L и $\bar{\Delta}_+$ на поверхности M . Обозначим через $\text{lk}(L, \psi)$ четность коэффициента самозацепления оснащенной кривой (L, ψ) в пространстве, причем оснащение ψ образовано векторами положительной нормали поверхности, восстановленными в точках кривой L .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.5. Определим значение квадратичной формы по формуле

$$q(f, O)(x) = \text{lk}(L, \psi) + \text{ord}(L \cap \bar{\Delta}_+).$$

ЛЕММА 9.6. *Значение $q(f, O) \pmod{2}$ не зависит от выбора цикла в классе гомологий, и функция q является квадратичной формой, ассоциированной с билинейной формой $\langle H, H \rangle$, определенной операцией пересечения неориентированных циклов.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.7. *Значение Argf -инварианта квадратичной формы совпадает с четностью числа особых точек Δ_3 типа В для заданной локальной Рим-структуры.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 9.6 И ПРЕДЛОЖЕНИЯ 9.7. В соответствии с разбиением $\bar{\Delta} = \bar{\Delta}_+ \cup \bar{\Delta}_-$ определено отображение $\tilde{f}: M^2 \rightarrow R^4$, $\pi \circ \tilde{f} = f$, такое, что $\tilde{f}$ – вложение всюду, за исключением изолированных особых точек $\rho_i \in R^4$, причем точки $\pi(\rho_i)$ совпадают с точками Δ_3 типа В на поверхности $f(M^2)$. Для произвольной точки $y \in \Delta \setminus U(\Delta_3)$, не лежащей в малой окрестности множества Δ_3 , прообразы $\bar{y}_1, \bar{y}_2 \in \bar{\Delta}$ упорядочены вдоль оси проекции π так, что точка $\bar{y}_2$ с большей координатой расположена на кривой $\bar{\Delta}_+$, а точка $\bar{y}_1$ с меньшей координатой расположена на ветви кривой $\bar{\Delta}_-$. Обозначим через $\bar{U}_i \subset R^4$ маленький четырехмерный шар с центром в точке ρ_i , внутри которого $\tilde{f}$ не является вложением. Шары U_i , $i = 1, \dots, k$, при этом взаимно однозначно соответствуют точкам Δ_3 . Определено замкнутое односвязное 4-многообразие K , полученное специальной перестройкой многообразия $R^4 \cup \{\infty\} \setminus \bigcup_{i=1}^k \bar{U}_i$ вдоль границы. Коротко конструкция многообразия K состоит в следующем, подробности см. [6], [13]. В результате перестройки к каждому 3-шару $\partial \bar{U}_i$ приклеивается 4-многообразие V_i , $\partial V_i = S^3$, причем $H_2(V_i, \partial V_i; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^3 \oplus \mathbb{Z}^8$, а симметрическая форма, определенная на этой группе гомологий по двойственности Пуанкаре, для точки типа B_+ изоморфна $(+1)^3 \oplus E_8$, а для точки типа B_- изоморфна $(-1)^3 \oplus (-E_8)$. При этом многообразие K^4 удовлетворяет следующим свойствам.

1. Сигнатура $\sigma(K)$ многообразия K^4 вычисляется по формуле:

$$\sigma(K) = 11(\text{ord}(B_+) - \text{ord}(B_-)).$$

2. Определено вложение $\alpha: M^2 \rightarrow K^4$, при этом поверхность $\alpha \bar{f}(M)$ является характеристической (определение характеристической поверхности см. в [31]) и индекс

самопересечения $\langle \alpha; \alpha \rangle$ поверхности в многообразии K^4 вычисляется по формуле

$$\langle \alpha; \alpha \rangle = 3(\text{ord}(B_+) - \text{ord}(B_-)).$$

3. Квадратичная форма многообразия K^4 , восстановленная по характеристической поверхности $\alpha(M)$, совпадает с квадратичной формой $q(f, O)$.

Свойство 3 и корректность определения квадратичной формы характеристической поверхности доказывает лемму 9.6.

По теореме Рохлина о сигнатуре, см. [71], [31], справедливо тождество:

$$\text{Arf}(q) = \frac{1}{8} (\sigma(K) - \langle \alpha, \alpha \rangle) \pmod{2}$$

и, следовательно,

$$\text{Arf}(q) = \text{ord}(B_+) - \text{ord}(B_-) \pmod{2}.$$

Предложение 9.7 доказано.

Оказывается, что поверхность Константинова доставляет пример поверхности, для которой множество тройных точек типа В представлено единственной точкой при соответствующем выборе локальной Ргем-структуры.

ПРИМЕР 9.8. Рассмотрим поверхность Константинова $\varphi: T^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, изображенную на рис. 5. Кривая Δ_2 имеет 3 компоненты связности. Определим ориентацию O на этой кривой. На одной из компонент определим ориентацию произвольным образом и индуцируем ориентации двух оставшихся компонент посредством вращения на угол $2\pi/3$ вокруг оси, проходящей через центральную точку Δ_3 перпендикулярно плоскости проекции. При этом центральная тройная точка будет иметь тип В, остальные три трехкратные точки будут иметь тип А. Для разновидностей $B_+, B_-; A_+, A_-$ выполнено тождество

$$(25) \quad \text{ord}(B_+) - \text{ord}(B_-) + 3\text{ord}(A_+) - 3\text{ord}(A_-) = 0.$$

В самом деле, равенство (25) вытекает из того факта, что ориентированный 1-цикл $\Delta(f)$, приведенный в общее положение с погруженной поверхностью, пересекает эту поверхность с алгебраической кратностью 0.

Разновидность центральной тройной точки зависит от выбора ориентации O . Если условиться о выборе ориентации инвариантной относительно поворота, как было указано выше, то типы и разновидности трех трехкратных точек, отличных от центральной, должны совпадать из-за симметрии. Вычисление типов и разновидностей является легким упражнением на применение формулы (25), подробнее см. [4], [6].

Пусть $f: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ — ориентированная поверхность общего положения, причем кривая Δ состоит из s компонент. Определено 2^s попарно различных ориентаций O на этой несвязной кривой. Для каждой из этих ориентаций определена квадратичная форма $q(f, O)$.

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ПРЕПЯТСТВИЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ РЕАЛИЗАЦИИ. *Определим алгебраическое препятствие (частичное) к реализации отображения $I \circ f: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ по формуле*

$$\beta(f) = \Pi_j \operatorname{Arf}(q(f, O_j)) \pmod{2},$$

где O_j пробегает множество всех ориентаций, определяющих попарно различные локальные Рим-структуры.

Важно отметить, что препятствие β определяется по отображению f и не зависит от выбора локальной Рим-структуры.

В работе [13] рассматривается модификация поверхности Константинова $\psi \rightarrow \varphi$ такая, что $\beta(\varphi) = 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Сходная алгебраическая конструкция для погруженных многообразий старших размерностей $4k + 2$ имеется в работе Джонса и Рииса [42]. Она лежит в основе доказательства знаменитой теоремы Браудера о стабильно-параллелизуемых многообразиях с инвариантом Кервера 1.

В работе [49] решается задача о построении вложения в данном классе гомотопии $g: M^2 \rightarrow N^4$ замкнутой ориентированной поверхности в замкнутое ориентированное 4-многообразие. Используется теория Дональдсона, и определяется алгебраическое целочисленное препятствие к решению этой задачи. Естественно поставить вопрос о нахождении целочисленного алгебраического аналога препятствия $\beta(f)$. Конструкция этого аналога приводит к интерпретации главного инварианта Васильева V_2 узлов, см. [85], как аналога инварианта странности плоских кривых, определенных для диаграмм узлов. Напомним определение инварианта странности плоской кривой, построенного В. И. Арнольдом в работе [15].

Каждой кривой $\varphi: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ общего положения сопоставляется число $\operatorname{St}(\varphi)$, называемое инвариантом странности кривой φ , которое удовлетворяет следующему свойству (и определяется этим свойством). Пусть φ_t , $t \in [t_0 - \varepsilon; t_0 + \varepsilon]$, — деформация кривой общего положения в классе погружений, так что при $t = t_0$ погружение φ_{t_0} имеет тройную точку самопересечения y . В окрестности точки y при $t = t_0 - \varepsilon$ возникает “исчезающий треугольник” и при $t = t_0 + \varepsilon$ рождается другой треугольник. Стороны “исчезающего треугольника” снабжены циклическим порядком, согласованным с порядком обхода вдоль кривой $\varphi(S^1)$ в положительном направлении. Этот порядок определяет ориентацию O' сторон “исчезающего треугольника”. Пусть q — число согласований ориентации O' со стандартной ориентацией O сторон треугольника, индуцированной ориентацией на окружности. Значения $\operatorname{St}(\varphi_{t_0 - \varepsilon})$ и $\operatorname{St}(\varphi_{t_0 + \varepsilon})$ инвариантов странности связаны по формуле:

$$(26) \quad \operatorname{St}(\varphi_{t_0 - \varepsilon}) - \operatorname{St}(\varphi_{t_0 + \varepsilon}) = (-1)^q.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Обозначение St для инварианта странности предложено В. И. Арнольдом в [15]. Такое же общепринятое обозначение использовалось для группы Стейнберга, см. раздел 8. Установилась также неоднозначность, связанная с понятием псевдоизотопии. Первоначально этот термин употреблялся в геометрической топологии в том же смысле, как в первой части. После работы Серфа [17] стал

употребляться в ином смысле, как в ч. 2. К сожалению, неоднозначности избежать здесь не удастся, поскольку обозначение и термин являются в каждом контексте общепринятыми.

Поскольку произвольная погруженная в плоскость кривая связана регулярной гомотопией со стандартной кривой в данном классе регулярной гомотопии (класс регулярной гомотопии определяется индексом Уитни), формула (26) определяет значение инварианта странности для любой погруженной кривой, если задано значение инварианта на стандартной. Инвариант странности не изменяется при регулярных гомотопиях кривых без особенностей тоекратного самопересечения. Нас далее будет интересовать случай индекса Уитни $+1$, в этом случае класс регулярной гомотопии погруженной кривой представлен стандартной вложенной окружностью, ориентированной против часовой стрелки. На этой кривой значение инварианта St по определению равно 0 . Наша задача интерпретировать инвариант Васильева V_2 узлов в $\mathbb{R}^3$ (см. [85]) как обобщенный инвариант странности для диаграмм проекций узлов на плоскость.

Под диаграммой узла, которую мы будем называть Ргеи-орнаментом (точнее, невырожденным Ргеи-орнаментом), будем понимать иммерсированную кривую $\varphi: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ общего положения вместе с функцией $O: \Delta(\varphi) \rightarrow \{+1, -1\}$, определенной на конечном множестве точек двукратного самопересечения. Понятие Ргеи-орнамента отличается от понятия проекции узла, так как уже в простейших конструкциях приходится рассматривать Ргеи-орнаменты более общего вида, не соответствующие проекции никакого узла, которые встречаются в однопараметрических семействах общего положения. Произвольный невырожденный Ргеи-орнамент в точности соответствует проекции узла $\pi \circ \varphi: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, при этом в точке $x_i \in \Delta_2(\varphi)$ значение функции определяется следующим образом. Рассмотрим базис ξ_1, ξ_2 на плоскости, образованный касательными векторами к ветвям кривой $\varphi(S^1)$, причем порядок векторов базиса соответствует значению координаты ветвей кривой вдоль оси проекции. Условимся, что первый вектор имеет большую координату. Значение функции O определим как $+1$, если базис положительно ориентирован в плоскости, и -1 в другом случае. Скажем, что Ргеи-орнамент является нескрученным, если индекс Уитни кривой φ равен $+1$ и выполнено тождество

$$\sum_i O(x_i) = 0, \quad x_i \in \Delta_2(\varphi).$$

Рассмотрим следующие три преобразования Ргеи-орнаментов, представленные на рис. 7 в малой окрестности особых точек и неподвижные вне этих окрестностей.

Преобразования 1, 2 соответствуют проекциям изотопии узлов в пространстве и называются преобразованиями Райдемайстера диаграмм узла. Преобразование 3 не соответствует никакой изотопии. Это преобразование будем называть δ -движением, следуя построениям Мураками и Наканиши [60]. (См. также работу С.В. Матвеева [55], в которой аналогичные построения были проведены в частном случае.)

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.9. *Два произвольных нескрученных Ргеи-орнамента (φ_1, O_1) , (φ_2, O_2) связана между собой регулярными деформациями и преобразованиями 1–3, рис. 7.*

Рис. 7

Следующее предложение дает ответ на изучаемую проблему.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.10. На пространстве Prem-орнаментов определен инвариант V_2 преобразований Райдемайстера Prem-орнаментов. При обобщенном преобразовании Райдемайстера значение инварианта меняется в соответствии с формулой:

$$(27) \quad V_2(t_0 + \varepsilon) - V_2(t_0 - \varepsilon) = \text{St}(\varphi_{t_0+\varepsilon}) - \text{St}(\varphi_{t_0-\varepsilon}),$$

где St – инвариант странности погруженной кривой, x_i , $i = 1, 2, 3$, – вершины исчезающего треугольника.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предложение вытекает из результатов работы О. Виро и М. Поляка [63], оно изложено в [7].

ПРОБЛЕМА. Интерпретировать инварианты Васильева старших порядков в терминах аналогов высших инвариантов странности Prem-орнаментов с учетом особенностей n -кратного самопересечения при $(n - 1)$ -параметрических деформациях.

ЗАМЕЧАНИЕ. Решение проблемы для узлов при $n < 5$ вытекает из результатов работ [63], [83]. Проблема особенно интересна для случая ориентированных многокомпонентных зацеплений. В этом случае проблему можно уточнить: можно ли частично определенные инварианты конечных порядков многокомпонентных зацеплений естественным образом доопределить до однозначных? Под естественностью понимается сохранение порядка инварианта. С проблемой доопределения частичных инвариантов Масси зацеплений до полных связаны результаты работы [72].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Adachi M. Embeddings and Immersions. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1993.
- [2] Adams J. F. The Kahn–Priddy theorem // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1973. V. 73. P. 43–55.
- [3] Adams J. F. On the non-existence of elements of Hopf-invariant one // Ann. of Math. (2). 1960. V. 72. P. 2–104.
- [4] Ахметьев П. М. Гладкие погружения многообразий малых размерностей. I // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 10. С. 3–23.
- [5] Ахметьев П. М. Гладкие погружения многообразий малых размерностей. II. Группы кобордизма критических значений многопараметрических семейств функций // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 12. С. 37–62.
- [6] Ахметьев П. М. Прем-отображения, тройные точки ориентированной поверхности и теорема Рохлина о сигнатуре // Матем. заметки. 1996. Т. 59. № 6. С. 803–810.
- [7] Akhmet'ev P. M. On a higher analog of the linking number of two curves // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. 1998. V. 185. P. 113–127.
- [8] Ахметьев П. М. Об изотопической и дискретной реализации отображений n -сферы в евклидовом пространстве // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 7. С. 3–34.
- [9] Ахметьев П. М. Реализация отображений n -сферы в евклидовом $2n$ -пространстве // Труды МИАН. 1996. Т. 212. С. 37–45.
- [10] Ахметьев П. М. Обобщенная проблема Давермана // Труды Международной математической конференции к 90-летию Л. С. Понтрягина. Т. 87. М.: ВИНТИ, 2000. С. 1–11.
- [11] Ахметьев П. М., Мелихов С. А. Об изотопической реализуемости непрерывных отображений // Уч. зап. науч. семин. ПОМИ (в печати).
- [12] Akhmet'ev P. M., Szucs A. On the Hopf invariant in homotopy groups of spheres, geometric approach // Math. Slovaca. 1999. V. 49. P. 71–74.
- [13] Akhmet'ev P. M., Repovs D., Skopenkov A. B. Obstruction to approximating maps of surfaces into $\mathbb{R}^4$ by embeddings // Preprint. Ljubljana: Ljubljana Univ., 1998; Topology Appl. (to appear).
- [14] Александров П. С. О размерности замкнутых множеств // УМН. 1949. Т. IV. № 6. С. 17–88.
- [15] Arnol'd V. I. Topological Invariants of Plane Curves and Caustics. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1994.
- [16] Арнольд В. И. О пространствах функций с умеренными особенностями // Функци. анализ и его прил. 1989. Т. 23. № 3. С. 1–10.
- [17] Cerf J. La stratification naturelle des espaces de fonctions différentiables réelles et le théorème de la pseudo-isotopie // Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 1970. V. 39. P. 5–173.
- [18] Чернавский А. В. Локальная стягиваемость группы диффеоморфизмов многообразия // Матем. сб. 1969. Т. 79. № 3. С. 307–356.
- [19] Chess D. Singularity theory and configuration space models of $\Omega^n S^n$ of non-connected spaces // Topology Appl. 1987. V. 25. P. 313–338.
- [20] Cohen R. L. The immersion conjecture for differentiable manifolds // Ann. of Math. (2). 1985. V. 122. P. 237–328.
- [21] Daverman R. J. Problems about finite-dimensional manifolds // Open Problems in Topology / ed. J. van Mill, G. M. Reed. Amsterdam: North-Holland, 1990.
- [22] Dranishnikov A. N., Repovs D., Scepin E. V. On the intersection of compacta of complementary dimension in Euclidean space // Topology Appl. 1991. V. 38. P. 237–253.
- [23] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. Методы теории гомологий. М.: Наука, 1982.
- [24] Eccles P. J. Codimension one immersions and the Kervaire invariant one problem // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1981. V. 90. P. 483–493.
- [25] Eliashberg Ya., Mishachev N. M. Wrinkling of smooth mappings and its applications. I // Invent. Math. 1997. V. 130. P. 345–369.

- [26] Fenn R. Some generalizations of the Borsuk–Ulam theorem and applications to realizing homotopy classes by embedded spheres // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1973. V. 74. P. 251–256.
- [27] Фрэнсис Дж. К. A topological Picturebook. Berlin: Springer-Verlag, 1987; Перевод: Книжка с картинками по топологии. М.: Мир, 1991.
- [28] Freedman M. Quadruple points of 3-manifolds in $\mathbb{R}^4$ // Comment. Math. Helv. 1978. V. 53. P. 385–394.
- [29] Giller C. Towards a classical knot theory for surfaces in $\mathbb{R}^4$ // Illinois J. Math. 1982. V. 26. P. 591–631.
- [30] Громов М. Дифференциальные соотношения с частными производными. М.: Мир, 1990.
- [31] Гийу Л., Марэн А. В поисках утраченной топологии. М.: Мир, 1986.
- [32] Hatcher A. Concordance spaces, higher simple-homotopy theory, and applications // Proc. Sympos. Pure Math. 1978. V. 32. P. 3–21.
- [33] Hatcher A. E., Wagoner J. B. Pseudo-isotopies of compact manifolds. I. The first obstruction for pseudo-isotopies // Astérisque. 1973. № 6. P. 8–238.
- [34] Heafliger A. Plongements différentiables dans le domaine stable // Comment. Math. Helv. 1962–1963. V. 37. P. 155–176.
- [35] Hirsh M. W. Immersions of manifolds // Trans. Amer. Math. Soc. 1960. V. 93. P. 242–276.
- [36] Hughes B., Ranicki A. Ends of Complexes. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996. (Cambridge Tracts in Math. V. 123.)
- [37] Гуревич В., Волмэн Г. Теория размерности. М.: ГИИЛ, 1948.
- [38] Hush L. S. ε -maps and embeddings // General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra. VI. Proceedings of the Sixth Prague Topological Symposium, 1986 / ed. Z. Frolik. Berlin: Heldermann-Verlag, 1988. P. 237–280.
- [39] Igusa K. On the homotopy type of the space of generalized Morse functions // Topology. 1984. V. 23. № 2. P. 245–256.
- [40] Igusa K. The space of framed functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1987. V. 301. № 2. P. 431–477.
- [41] James I. On the iterated suspension // Quart. J. Math. Oxford Ser. (2). 1954. V. 5. P. 1–10.
- [42] Jones J., Rees E. Kervaire's invariant for framed manifolds // Proc. Sympos. Pure Math. 1978. V. 32. P. 141–147.
- [43] Казарян М. Э. Скрытые особенности и гомологический комплекс Васильева классов особенностей // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 12. С. 119–128.
- [44] Келдыш Л. В. Топологические вложения в евклидово пространство // Труды МИАН. 1966. Т. 81. С. 3–183.
- [45] Keesling J., Wilson D. C. Embedding T^n -like continua in Euclidean space // Topology Appl. 1985. V. 21. P. 241–249.
- [46] Koschorke U. Multiple points of immersions and the Kahn–Priddy theorem // Math. Z. 1979. V. 169. P. 223–236.
- [47] Koschorke U., Sanderson B. Geometric interpretations of the generalized Hopf invariant // Math. Scand. 1977. V. 41. P. 199–217.
- [48] Krasinkewicz J. Imbeddings into $\mathbb{R}^n$ and dimension of products // Fund. Math. 1986. V. 133. P. 247–253.
- [49] Kronheimer P. B. An obstruction to removing intersection points in immersed surfaces // Topology. 1997. V. 36. № 4. P. 931–962.
- [50] Lannes J. Sur les immersions de Boy // Lecture Notes in Math. 1984. V. 1051. P. 263–270.
- [51] Laudenbach F. Formes différentielles de degré 1 non singulières: classes d'homotopie de leurs noyaux // Comment. Math. Helv. 1976. V. 51. P. 447–464.
- [52] Levine H. Classifying immersions into $\mathbb{R}^4$ over stable maps of 3-manifolds into $\mathbb{R}^2$. Berlin: Springer-Verlag, 1985. (Lecture Notes in Math. V. 1157.)
- [53] Liulevicius A. A theorem in homological algebra and stable homotopy of projective spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 109. P. 540–552.
- [54] Löffler P., Ray N. A Geometrical proof of a theorem of Kahn and Priddy // J. London Math. Soc. (2). 1981. V. 24. P. 329–334.

- [55] Матвеев С. В. Обобщенные перестройки трехмерных многообразий и представления гомотопических сфер // Матем. заметки. 1987. Т. 42. №2. С. 268–278.
- [56] Melikhov S. On maps with unstable singularities // Topology Appl. (to appear).
- [57] Milnor J. W. Введение в алгебраическую K -теорию. М.: Мир, 1974.
- [58] Мишачев Н. М. Отображения с простейшими особенностями // Добавление в книге Громова М. Дифференциальные соотношения с частными производными. М.: Мир, 1990.
- [59] Мошер Р. С., Тангора М. Когомологические операции и их применение в теории гомотопий. М.: Мир, 1970.
- [60] Murakami H., Nakanishi Y. On a certain move generating link-homology // Math. Ann. 1989. V. 284. P. 75–89.
- [61] Nöbeling G. Über eine n -dimensionale Universalmenge im R_{2n+1} // Math. Ann. 1930. V. 104. P. 71–80.
- [62] Пуанкаре А. О науке. М.: Наука, 1983.
- [63] Polyak M., Viro O. Gauss diagram formulas for Vassiliev invariants // Internat. Math. Res. Notices. 1994. №11. P. 445–453.
- [64] Pontryagin L. S. Sur une hypothèse fondamentale de la théorie de la dimension // C. R. Acad. Sci. Paris. 1930. V. 190. P. 1105–1107.
- [65] Понтрягин Л. С. Гладкие многообразия и их применение в теории гомотопий. М.: Наука, 1976.
- [66] Постников М. М. Группы и алгебры Ли. М.: Наука, 1982.
- [67] Quinn F. Local algebraic topology // Notices Amer. Math. Soc. 1981. V. 11. P. 895–899.
- [68] Repovš D., Skopenkov A. B. Embeddability and isotopy of polyhedra in Euclidean spaces // Труды МИАН. 1996. Т. 212. С. 173–187.
- [69] Repovš D., Skopenkov A. B. A deleted product criterion for approximability of maps by embeddings // Topology Appl. 1998. V. 87. P. 1–19.
- [70] Реповш Д., Скопенков А. Б. Кольца Борромео и препятствия к вложимости // Труды МИАН. 1999. Т. 225. С. 331–338.
- [71] Рохлин В. А. Доказательство гипотезы Гудкова // Функци. анализ и его прил. 1972. Т. 6. №2. С. 62–64.
- [72] Rybnikov G. On the fundamental group and triple Massey's product // Препринт. М.: Московский Независимый Университет, 1998.
- [73] Щепин Е. В., Штанько М. А. Спектральный критерий для вложения компактов в евклидово пространство // Труды Ленинградской топологической международной конференции, Т. II. М.: Наука, 1983. С. 135–142.
- [74] Штанько М. А. Вложение компактов в евклидово пространство // Матем. сб. 1970. Т. 83. №2. С. 234–255.
- [75] Sieklucki K. The realization of mappings // Fund. Math. 1969. V. 65. P. 325–343.
- [76] Sikkema C. P. Pseudo-isotopies of arcs and knots // Proc. Amer. Math. Soc. 1972. V. 31. №2. P. 615–616.
- [77] Skopenkov A. On the deleted product criterion for embeddability in $\mathbb{R}^m$ // Proc. Amer. Math. Soc. 1998. V. 126. №8. P. 2467–2476.
- [78] Smale S. The classification of immersions of spheres in Euclidean spaces // Ann. of Math. (2). 1959. V. 69. P. 327–334.
- [79] Spiez S. On pairs of compacta with $\dim(X \times Y) < \dim(X) + \dim(Y)$ // Fund. Math. 1990. V. 135. P. 213–222.
- [80] Szucs A. Geometrical proof of a theorem on suspension in homotopy groups of spheres // Colloq. Math. Soc. János Bolyai (Hungary). 1989. V. 55. P. 501–505.
- [81] Szucs A. Cobordism groups of immersions of oriented manifolds // Acta Math. Hungar. 1994. V. 64. №2. P. 191–230.
- [82] Тода Х. Композиционные методы в теории гомотопических групп сфер. М.: Наука, 1982.
- [83] Тюриня С. Д. Диаграммные формулы типа Виро–Поляка для инвариантов конечного порядка // УМН. 1998. Т. 54. №3.

- [84] Vassiliev V. A. Lagrange and Legendre Characteristic Classes. New Yourk: Gordon & Breach, 1993; русский перевод: Васильев В. А. Лагранжевы и лежандровы характеристические классы. М.: МЦНМО, 1999.
- [85] Васильев В. А. Топология дополнений к дискриминантам. М.: Фазис, 1997.
- [86] Васильев В. А. Топология пространств функций без сложных особенностей // Функц. анализ и его прил. 1989. Т. 13. № 4. С. 24–36.
- [87] Weber C. Plongements de polyèdres dans le domaine métastable // Comment. Math. Helv. 1967. V. 42. P. 1–27.
- [88] Wells R. Cobordism groups of immersions // Topology. 1966. V. 5. P. 281–294.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: pmakhmet@mi.ras.ru

Поступила в редакцию
21.12.1998