Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. И. Богоявленский, Точные глобальные равновесия плазмы, *УМН*, 2000, том 55, выпуск 3, 63–102

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm291>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 16:40:30

УДК 533.95+517.95

ТОЧНЫЕ ГЛОБАЛЬНЫЕ РАВНОВЕСИЯ ПЛАЗМЫ

О. И. Богоявленский

Выведены точные глобальные равновесия плазмы, обладающие осевой и винтовой симметриями. Эти два семейства точных решений уравнений равновесия плазмы *не являются* трансляционно-инвариантными, зависят от произвольно большого числа параметров и содержат специальные z -инвариантные равновесия. Все построенные равновесия плазмы являются гладкими и локализованными в том смысле, что они имеют конечную магнитную энергию в каждом слое $c_1 < z < c_2$. Кроме того, эти точные решения доставляют контрпримеры к известной теореме Паркера.

Библиография: 60 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Введение	63
Часть I. Глобальные осесимметричные равновесия плазмы	69
§ 2. Нетрансляционно-инвариантные глобальные равновесия плазмы	69
§ 3. Примеры квазипериодических и периодических равновесий плазмы ..	72
§ 4. Квазипериодичность глобальных равновесий плазмы	76
§ 5. Глобальные равновесия плазмы в полупространстве	78
§ 6. Контрпримеры к теореме Паркера	79
Часть II. Равновесия плазмы с винтовой симметрией	83
§ 7. Точные глобальные равновесия плазмы с винтовой симметрией	83
§ 8. Модель астрофизических струй	89
§ 9. Квазипериодичность магнитных силовых линий	92
§ 10. Винтовые равновесия плазмы, зависящие от $2K + 1$ параметров	95
§ 11. Контрпримеры к теореме Паркера, обладающие винтовой симмет- рией	98
§ 12. Заключение	99
Список литературы	100

§ 1. Введение

I. В данном обзоре представлены математические результаты автора по глобальным равновесиям плазмы и контрпримеры к известной теореме Паркера, опубликованные недавно в кратком виде в физических журналах [1]–[3]. Поиск глобальных

равновесий плазмы, удовлетворяющих уравнениям

$$(1.1) \quad \mathbf{J} \times \mathbf{B} = \text{grad } p, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{J} = \frac{1}{\mu} \text{curl } \mathbf{B},$$

продолжался в течение последних сорока лет, с тех пор как уравнения (1.1) были впервые применены к управляемому термоядерному синтезу [4]–[7] и к астрофизическим проблемам [8], [9]. Однако все найденные до сих пор точные решения уравнений (1.1), не являющиеся трансляционно-инвариантными, или имеют сингулярности, или неограниченно растут на бесконечности [10]–[14], или не являются локализованными [15]–[17]. Такие решения имеют весьма ограниченную применимость в астрофизике. Здесь $\mathbf{B}$ – магнитное поле, $\mathbf{J}$ – плотность электрического тока, p – давление плазмы и μ – магнитная проницаемость среды.

Как было отмечено впервые Ландквистом [18], уравнения (1.1) эквивалентны уравнениям равновесия идеальной несжимаемой жидкости

$$(1.2) \quad \mathbf{V} \times \text{curl } \mathbf{V} = \text{grad} \left(\frac{p}{\rho_0} + \frac{V^2}{2} \right), \quad \text{div } \mathbf{V} = 0.$$

Поэтому поиск глобальных решений уравнений (1.1) важен также для гидродинамики.

Классическая теорема Праудмана утверждает, что любое малое возмущение z -инвариантного однородного вращения идеальной несжимаемой жидкости также является z -инвариантным. Эта теорема была доказана Праудманом [19] и Тейлором [20] и позже подтверждена Тейлором экспериментально [21]. Теорема Праудмана была обобщена Паркером [22], [23] для уравнений равновесия плазмы (1.1).

II. Первоочередной целью данного обзора является представление новых точных решений уравнений равновесия плазмы, которые моделируют астрофизические струи в сопутствующей системе отсчета и солнечные протуберанцы [25]. Такие равновесия должны быть глобальными, что означает, что они должны удовлетворять следующим необходимым физическим условиям:

- а) магнитное поле $\mathbf{B}$, ток $\mathbf{J}$ и давление плазмы p являются гладкими и ограниченными функциями всюду в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$;
- б) при $r \rightarrow \infty$ магнитное поле $\mathbf{B} \rightarrow 0$, плотность тока $\mathbf{J} \rightarrow 0$, давление $p \rightarrow p_1$;
- в) все магнитные силовые линии и линии тока являются ограниченными по радиальной переменной r в цилиндрических координатах r, z, ϕ .

В ч. I мы выводим два семейства точных глобальных осесимметричных равновесий плазмы, которые зависят от произвольного числа свободных параметров. Первое семейство определено во всем евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, второе определено в полупространстве $z \geq 0$. Эти точные равновесия плазмы моделируют многообразие магнитных полей, наблюдаемых в астрофизических струях и в солнечной короне [25]. Асимптотическое значение давления p_1 в условии б) является средним давлением в астрофизическом истекающем потоке и в солнечной корональной плазме. Как обычно, гравитационная сила $-\rho \text{grad } \Psi$ включается в градиент давления в (1.1), в приближении постоянной плотности ρ . Равновесия плазмы являются локализованными в том смысле, что полная магнитная энергия в любом слое $c_1 < z < c_2$ является конечной.

Для решений второго семейства полная магнитная энергия в полупространстве $z \geq 0$ является конечной.

Общие введенные равновесные решения в $\mathbb{R}^3$ являются квази-периодическими по переменной z с $N - 1$ частотами, пропорциональными числам

$$(1.3) \quad 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{N-1}$$

с общим множителем $\sqrt{8\beta}$. Доказано, что в последовательности (1.3) имеется приближенно $6N/\pi^2$ рационально независимых квадратных корней. Поэтому магнитное поле $\mathbf{B}$ и ток $\mathbf{J}$ действительно являются квази-периодическими по переменной z .

Замечательно, что классическая теоретико-числовая проблема о ранге последовательности (1.3) над рациональными числами возникла из изучения глобальных равновесий плазмы. Эта проблема является естественным расширением теоремы Пифагора об иррациональности $\sqrt{2}$ [26].

Другим важным свойством полученных точных решений является то, что они образуют $(2N - 1)$ -мерные линейные пространства. Любая линейная комбинация соответствующих магнитных полей $\mathbf{B}$ снова является точным решением. Однако закон сложения давления плазмы p имеет более сложный квадратичный вид. Эти свойства напоминают свойства N -солитонных решений интегрируемых уравнений физики плазмы: уравнений КдФ, КП и НШ [27], [28].

Первым из построенных точных решений является гауссово распределение $\mathbf{B} = \exp(-\beta r^2)\hat{\mathbf{e}}_z$. Гауссово распределение играет решающую роль в выведенных глобальных равновесиях плазмы (1.1). Решения убывают при $r \rightarrow \infty$ так же быстро, как $c_N \exp(-\beta r^2)r^{2N}$, из чего следует сильная фокусировка астрофизической струи.

Точное решение $\mathbf{B} = \exp(-\beta r^2)\hat{\mathbf{e}}_z$, $\mathbf{J} = 4\beta^2 r \exp(-\beta r^2)\hat{\mathbf{e}}_\phi/\mu$ имеет геометрию θ -пинча. Другие точные решения с цилиндрической симметрией имеют геометрию винтового пинча; их магнитные поверхности являются цилиндрами $r = \text{const}$. Для точных трансляционно-неинвариантных равновесий плазмы магнитные поверхности являются либо цилиндрами, либо вложенными торами с круговыми магнитными осями. Распределение этих тороидальных магнитных поверхностей является квазипериодическим по переменной z . Магнитные оси зацеплены с замкнутыми магнитными силовыми линиями в соответствующих тороидальных областях.

Выведенные точные равновесия плазмы доставляют семейство динамических систем в $\mathbb{R}^3$, определяющих динамику магнитных силовых линий. Эти динамические системы являются интегрируемыми в *широком смысле* работы [29]. Общие магнитные силовые линии или являются квазипериодическими обмотками торов $\mathbb{T}^2$, или движутся на цилиндрах $\mathbb{R}^1 \times S^1$.

III. В ч. II данного обзора мы изучаем равновесия плазмы с винтовой симметрией. Существуют по крайней мере три основных физических явления, связанных с винтовыми конфигурациями плазмы: 1) внешние и внутренние кинк-моды в токамаках, 2) астрофизические струи, 3) взрывные солнечные протуберанцы. Внешние кинк-моды известны как наиболее опасные магнитогидродинамические неустойчивости, возникающие в плазменном пинче, несущем продольный ток. Внутренняя ($m = 1$) кинковая неустойчивость ассоциируется с винтовым возмущением плазмы, которое предшествует пилообразным колебаниям [30], [31] около магнитной оси токамака. Наилучшее

аналитическое описание внешних и внутренних кинк-мод для “прямого токамака” представляется равновесиями плазмы с винтовой симметрией. Эти решения были использованы в численном исследовании пинчей “обратного поля” [32].

Как известно, оптические и радиоастрономические наблюдения открыли многообразие струй в активных ядрах галактик, см. обзор [33]. Двусторонние струи моделировались автомодельными осесимметричными равновесиями плазмы [34]. Имеется также статистически значимое количество односторонних струй, характерным примером которых является струя в эллиптической галактике M87 в скоплении Вирго. Оптическое излучение этой струи является синхротронным [35]; детектируемый образ ее интенсивности не имеет осевой симметрии [36]. Мы моделируем эти сильно сконцентрированные струи равновесиями плазмы с винтовой симметрией.

Наблюдения взрывных солнечных протуберанцев обнаружили трубки плазмы, обладающие повышенной плотностью и винтовой структурой, которые предположительно совпадают со жгутами магнитного потока [37]. Известно, что солнечные протуберанцы могут оставаться в устойчивом равновесии в течение нескольких месяцев.

Все эти конфигурации плазмы с винтовой симметрией описываются уравнением ДжФКО, выведенным Джонсоном, Фриманом, Калсрудом и Оберманом в работе [38]. Это уравнение является редукцией уравнений равновесия плазмы (1.1) для решений с винтовой симметрией. Уравнение ДжФКО сводится к уравнению Грэда–Шафранова [4], [5], когда винтовая симметрия превращается в осевую. Оба уравнения широко использовались для моделирования лабораторной плазмы в токамаках, стеллараторах, гелиотронах, торзатронах и астрофизической плазмы.

Мы изучаем решения уравнения ДжФКО [38], которые определены во всем евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ и не имеют сингулярностей. Эти точные равновесия плазмы моделируют многообразие магнитных полей в кинк-модах в токамаках, в астрофизических струях и в солнечной короне. Асимптотическое значение давления p_1 в условии b) является средним давлением во внешней среде (астрофизический истекающий поток или плазма солнечной короны). Магнитное поле убывает при $r \rightarrow \infty$ так же быстро, как $c_N \exp(-\beta r^2) r^{2N}$. Отсюда следует сильная концентрация астрофизической струи и конечность магнитной энергии в любом слое $c_1 < z < c_2$. Интенсивность синхротронного излучения астрофизической струи пропорциональна B^2 [35]. Поэтому детектируемый образ интенсивности струи определяется формой и распределением поверхностей $B^2 = \text{const}$.

Для решений с винтовой симметрией магнитные поверхности являются вложенными цилиндрами, которые вращаются как спирали вокруг оси z . Наиболее внутренние цилиндры являются их магнитными осями, которые вместе образуют конечную систему спиралей. Простейшее точное решение имеет двойную спираль магнитных осей и моделирует астрофизические струи, плазменную кинк-моду с $m = 1$ и закрученные жгуты магнитного потока, наблюдавшиеся в токамаках [10], [12] и в солнечных протуберанцах [37].

Вследствие их винтовой симметрии выведенные точные решения являются периодическими по переменной z с периодом $2\pi\gamma$. Важной особенностью полученных глобальных равновесий плазмы является то, что их магнитные силовые линии являются в общем случае квазипериодическими в цилиндрических координатах r, z, ϕ . Это означает, что они никогда не повторяются в z -направлении, однако появляются произвольно близко к их начальным данным при изменении переменной z . Поэтому об-

раз вращения магнитных силовых линий вокруг друг друга непрерывно изменяется в z -направлении для построенных точных глобальных равновесий плазмы.

Мы указываем семейства точных решений с винтовой симметрией, которые образуют размерности $3, 5, \dots$. Любая линейная комбинация соответствующих магнитных полей снова является точным решением. Закон сложения давления плазмы имеет более сложную квадратичную форму. Эти свойства, так же как и в осесимметричном случае, напоминают N -солитонные решения интегрируемых уравнений физики плазмы.

Каждое $(2K + 1)$ -мерное линейное пространство точных глобальных равновесий плазмы состоит из решений с винтовой симметрией, которые *не являются* z -инвариантными и являются возмущениями исключительных z -инвариантных равновесий. Конструкция этих $(2K + 1)$ -мерных пространств точных решений основана на разрешении диофантова уравнения [39]

$$(1.4) \quad ax^2 + 2bx + 4by = 4bc$$

по отношению к двум неизвестным целым числам x и y , где a, b, c являются произвольными натуральными числами. Число $K + 1$ является числом различных пар целых неотрицательных решений x, y диофантова уравнения (1.4).

Поиск глобальных решений уравнений (1.1) важен также для магнитной гидродинамики, поскольку уравнения магнитогидродинамического равновесия

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \mathbf{V} \times \text{curl } \mathbf{V} - \mathbf{B} \times \text{curl } \mathbf{B} / (\rho\mu) &= \text{grad}(w + V^2/2), \\ \text{div } \mathbf{V} &= 0, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0, \quad [\mathbf{V}, \mathbf{B}] = 0 \end{aligned}$$

эквивалентны уравнениям (1.1) в случае параллельных векторных полей $\mathbf{B} = \lambda \mathbf{V}$ и постоянной плотности ρ ; энтальпия w удовлетворяет уравнению $dw = dp/\rho$. Поэтому точные решения, представленные в этом обзоре, описывают также глобальные равновесия плазмы с $\mathbf{B} = \lambda \mathbf{V}$, где $\lambda \neq \sqrt{\rho\mu}$.

IV. В качестве вторичной цели я хотел бы отметить, что выведенные точные решения доставляют контрпримеры к широко известной теореме Паркера [22]–[24], которая рассматривает малые возмущения z -инвариантных равновесий плазмы и которая обсуждалась в течение более чем 25 лет. В работе [22] Паркер рассматривает специальный случай проблемы: малые возмущения однородного магнитного поля $\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{e}}_z$, $B_0 = \text{const}$, $p = \text{const}$. Возмущения общих z -инвариантных равновесий изучены в ч. 14 монографии [23]. Паркер пишет (с. 374): “Рассмотрим магнитное поле $B_i(x, y) + \varepsilon b_i(x, y, z)$ в окрестности общего равновесного поля $B_i(x, y)$ ”, и после детального исследования приходит к заключению на с. 377:

“Таким образом, в общем случае мы приходим к заключению, что инвариантность $\partial b_i / \partial z = 0$ (14.51) является необходимым условием равновесия. Любое поле, в котором характер вращения меняется вдоль поля, так что (14.51) исключается его топологией, не может быть в равновесии”.

Это заключение было названо “*теоремой Паркера*” в работах [40], [41]. Отсутствие точных глобальных решений уравнений (1.1) сделало невозможной независимую проверку теоремы Паркера. Множество следствий и обобщений были получены в предположении, что теорема верна, см. работы [40]–[48].

Свойства глобальных равновесий плазмы были предметом интересной дискуссии в литературе. В 1985 году Ван Баллегойен представил в работах [49], [50] рассуждение о том, что некоторые нетрансляционно инвариантные возмущения (зависящие от z) могут быть построены с помощью разложения в степенные ряды и последовательного разрешения некоторой бесконечной системы уравнений в частных производных. Однако это рассуждение оказалось неубедительным, поскольку ни отсутствие сингулярностей в решениях бесконечной системы уравнений в частных производных не было доказано (в принципе, могут появиться каустики), ни радиус сходимости степенных рядов не был оценен (он может быть нулем или конечным числом). В дополнение к этому никаких точных решений не было найдено. Поэтому Виллата и Цинганос написали в 1993 году в работе [47; с. 2158], в полном противоречии с результатами Ван Баллегойена и в полном согласии с теоремой Паркера:

“Широко известно, что все хорошо ведущие себя МГД-равновесия, продолжающиеся во все пространство, обязаны быть трансляционно инвариантными”.

Результаты данного обзора проливают некоторый свет на эту дискуссию. Действительно, мы получили точные равновесия плазмы, которые являются гладкими и ограниченными во всем евклидовом пространстве. Эти равновесия не имеют поверхностных токов и не имеют разрывов и удовлетворяют вышеуказанным физическим условиям а), b), c). Эти точные решения также удовлетворяют всем условиям Паркера [23; с. 359–391]. В §6 мы строим семейство глобальных z -инвариантных равновесий плазмы, причем каждое N -е равновесие обладает $(2N - 1)$ -мерным линейным пространством глобальных возмущений. Наиболее важным свойством этих точных решений является то, что они *зависят* от переменной z и поэтому они *не* являются z -инвариантными. Эти осесимметричные контрпримеры доказывают, что теорема Паркера неверна. В §6 мы указываем один из источников расхождения с результатами Паркера в ч. 14 монографии [23].

Следствием z -квазипериодичности полученных равновесных решений является то, что они очень далеки не только от z -инвариантности, но даже и от z -периодичности. Вследствие z -квазипериодичности “*характер вращения*” магнитных силовых линий непрерывно меняется вдоль оси z и не повторяется.

В §11 мы строим семейство глобальных z -инвариантных равновесий плазмы, причем каждое равновесие обладает трехмерным линейным пространством глобальных возмущений с винтовой симметрией. Эти точные решения также *зависят* от переменной z , и поэтому они *не* являются z -инвариантными. Они удовлетворяют всем условиям Паркера [23; с. 359–391] и указанным выше физическим условиям а), b), c). Поэтому эти глобальные равновесия плазмы с винтовой симметрией образуют второе семейство контрпримеров к теореме Паркера.

Часть I. Глобальные осесимметричные равновесия плазмы

§ 2. Нетрансляционно-инвариантные глобальные равновесия плазмы

I. Для получения точных равновесий плазмы мы рассмотрим уравнения (1.1) для осесимметричных магнитных полей $\mathbf{B}$ [4]–[6]:

$$(2.1) \quad \mathbf{B} = \frac{\psi_z}{r} \hat{\mathbf{e}}_r - \frac{\psi_r}{r} \hat{\mathbf{e}}_z + \frac{I}{r} \hat{\mathbf{e}}_\phi,$$

где $\psi(r, z)$ есть функция магнитного потока, $\psi_x = \partial\psi/\partial x$ и векторы $\hat{\mathbf{e}}_r, \hat{\mathbf{e}}_z, \hat{\mathbf{e}}_\phi$ являются координатными единичными ортами. Плотность потока $\mathbf{J}$ имеет вид

$$(2.2) \quad \mathbf{J} = \frac{1}{\mu} \operatorname{curl} \mathbf{B} = -\frac{I_z}{\mu r} \hat{\mathbf{e}}_r + \frac{I_r}{\mu r} \hat{\mathbf{e}}_z + \frac{\Phi}{\mu r} \hat{\mathbf{e}}_\phi,$$

где $\Phi = \psi_{rr} - r^{-1}\psi_r + \psi_{zz}$. Уравнения равновесия плазмы (1.1) для осесимметричных решений эквивалентны равенствам $I = I(\psi)$, $p = p(\psi)$ и уравнению Грэда–Шафранова [4], [5], выведенному в 1958 году:

$$(2.3) \quad \psi_{rr} - \frac{1}{r}\psi_r + \psi_{zz} + I(\psi)I'(\psi) + \mu r^2 p'(\psi) = 0,$$

где $I(\psi)$ и $p(\psi)$ являются произвольными гладкими функциями. Из уравнения (2.3) следует $\Phi = -I(\psi)I'(\psi) - \mu r^2 p'(\psi)$. Для уравнений равновесия жидкости (1.2) редукция к уравнению (2.3) была получена Брэггом и Хауфорном в 1950 году [51].

ТЕОРЕМА 1. *Существует бесконечное семейство z -инвариантных глобальных равновесий плазмы, зависящих от целого числа $N \geq 0$ и вещественного числа $\beta > 0$. Для $N \geq 2$ каждое из этих равновесий содержится в $(2N - 1)$ -мерном линейном пространстве глобальных равновесий плазмы, которые не являются трансляционно-инвариантными. Эти точные решения являются либо квазипериодическими, либо периодическими по переменной z .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Предположим, что функция $I(\psi)$ линейна, $I(\psi) = \alpha\psi$, и функция $p(\psi)$ квадратична, $p(\psi) = p_1 - 2\beta^2\psi^2/\mu$, где $p_1 > (2\beta^2/\mu) \max(\psi^2(x, y, z))$ и α и $\beta > 0$ являются произвольными постоянными (константа p_1 не входит в уравнения равновесия плазмы (1.1)). Отметим, что линейная подстановка для $I(\psi)$ и квадратичная для $p(\psi)$ использовались в статьях [15], [17], [52]–[54]. Однако точные равновесия плазмы, выведенные в наших работах [1]–[3] и представленные в данном обзоре, являются более общими, чем решения, найденные в [15], [17], [52]–[54]. Ток (2.2) принимает вид

$$(2.4) \quad \mathbf{J} = -\frac{\alpha}{\mu} \mathbf{B} + \frac{4\beta^2}{\mu} \psi r \hat{\mathbf{e}}_\phi.$$

Из формул (2.1) и (2.4) следует асимптотика $\mathbf{J} \approx \alpha \mathbf{B}/\mu$ при $r \rightarrow 0$ и $\alpha \neq 0$. Уравнение Грэда–Шафранова с новой переменной $x = 2\beta r^2$ принимает вид

$$(2.5) \quad x\psi_{xx} + \frac{1}{8\beta}\psi_{zz} + \frac{1}{8\beta}\alpha^2\psi - \frac{1}{4}x\psi = 0.$$

Проверка доказывает, что гауссовское распределение

$$(2.6) \quad \psi(r, z) = \frac{1}{2\beta} e^{-\beta r^2} = \frac{1}{2\beta} e^{-x/2}$$

является точным решением уравнения (2.5) при $\alpha = 0$ и $\beta > 0$. Соответствующие параметры $\mathbf{B}$, $\mathbf{J}$ и p имеют вид

$$(2.7) \quad \mathbf{B} = e^{-\beta r^2} \hat{\mathbf{e}}_z, \quad \mathbf{J} = \frac{2\beta}{\mu} e^{-\beta r^2} r \hat{\mathbf{e}}_\phi, \quad p = p_1 - \frac{1}{2\mu} e^{-2\beta r^2}.$$

Поэтому гауссовское распределение (2.6) определяет z -инвариантное глобальное равновесие плазмы.

Подставляя $\psi(x, z) = e^{-\beta r^2} u(x, z)$ в уравнение (2.5), мы выводим

$$xu_{xx} - xu_x + \frac{1}{8\beta}(\alpha^2 u + u_{zz}) = 0.$$

Разделяя переменные посредством подстановки $u(x, z) = P(x)T(z)$, мы получаем

$$(2.8) \quad xP'' - xP' + \frac{\alpha^2 + \lambda}{8\beta}P = 0, \quad T'' = \lambda T.$$

Для $\lambda = -\omega^2$ мы находим $T(z) = a \cos(\omega z) + b \sin(\omega z)$. Для первого уравнения (2.8) нас интересуют только полиномиальные решения $P(x)$. Такие решения существуют тогда и только тогда, когда $(\alpha^2 - \omega^2)/(8\beta) = n$, где $n \geq 0$ есть целое число. Отсюда мы получаем конечный спектр допустимых значений $\omega = \omega_0, \dots, \omega_N$:

$$(2.9) \quad \omega_n = \sqrt{\alpha^2 - 8\beta n}, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad N = \left\lfloor \frac{\alpha^2}{8\beta} \right\rfloor.$$

Первое уравнение (2.8) принимает вид $xP'' - xP' + nP = 0$. Дифференцируя по x , мы получаем $xL'' + (1-x)L' + (n-1)L = 0$, где $L(x) = P'(x)$. Это уравнение определяет классические полиномы Лагерра $L_{n-1}(x)$ [55]–[57]:

$$L_m(x) = \frac{1}{m!} e^x \frac{d^m}{dx^m} (e^{-x} x^m).$$

Поэтому многочлены $P(x)$ являются первообразными функциями полиномов Лагерра. Мы обозначим их $L_n^*(x)$:

$$(2.10) \quad \begin{aligned} L_n^*(x) &= \int_0^x L_{n-1}(t) dt = -\frac{x}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n-1}), \quad L_0^*(x) = -1, \\ L_n^*(x) &= x + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k (n-1)!}{k! (k+1)! (n-k-1)!} x^{k+1}. \end{aligned}$$

Отсюда мы получаем точные решения уравнения (2.5):

$$(2.11) \quad \psi_n(r, z) = \frac{1}{2\beta} e^{-\beta r^2} (a_n \cos(\omega_n z) + b_n \sin(\omega_n z)) L_n^*(2\beta r^2).$$

Для любых постоянных α и β формулы (2.9) и (2.11) определяют N точных решений линейного уравнения (2.5). Эти решения удовлетворяют вышеуказанным условиям а) и б). Однако условие с) не выполнено, поскольку магнитная поверхность $\psi_n(r, z) = 0$ не является ограниченной по переменной r , так как она содержит бесконечное число плоскостей $z = z_k = z_0 + 2\pi k/\omega_n$.

2) Для получения глобальных решений, удовлетворяющих всем трем условиям а), б) и с), мы полагаем $\alpha^2 = 8\beta N$. Тогда $\omega_N = 0$, и точное решение (2.11) принимает вид

$$(2.12) \quad \psi_N(r) = \frac{a_N}{2\beta} e^{-\beta r^2} L_N^*(2\beta r^2),$$

что переходит в гауссовское распределение (2.6) при $N = 0$. Соответствующее магнитное поле (2.1), ток (2.4) и давление p имеют вид

$$(2.13) \quad \mathbf{B}_N = a_N e^{-\beta r^2} \left((L_N^*(x) - 2L_N^{*'}(x)) \hat{\mathbf{e}}_z + \frac{\sqrt{2N/\beta}}{r} L_N^*(x) \hat{\mathbf{e}}_\phi \right),$$

$$(2.14) \quad \mathbf{J}_N = -\frac{\sqrt{8\beta N}}{\mu} \mathbf{B}_N + \frac{4\beta^2}{\mu} \psi_N(r) r \hat{\mathbf{e}}_\phi, \quad p = p_1 - \frac{a_N^2}{2\mu} e^{-2\beta r^2} L_N^{*2}(2\beta r^2).$$

Это есть некоторое z -инвариантное глобальное равновесие плазмы.

Линейная комбинация функций магнитного потока (2.11) и (2.12) определяет $(2N - 1)$ -мерное линейное пространство точных решений уравнения (2.5):

$$(2.15) \quad \psi(r, z) = \frac{1}{2\beta} \exp(-\beta r^2) \left(a_N L_N^*(2\beta r^2) + \sum_{n=1}^{N-1} (a_n \cos(\omega_n z) + b_n \sin(\omega_n z)) L_n^*(2\beta r^2) \right),$$

где $\omega_n = \sqrt{8\beta(N - n)}$, коэффициенты a_n, b_n являются произвольными и $a_N \neq 0$. Давление $p(\psi) = p_1 - 2\beta^2 \psi^2 / \mu$ является квадратичной функцией коэффициентов a_n, b_n, a_N . Из формул (2.10) следует, что точные решения (2.15) при $r \rightarrow 0$ имеют асимптотический вид

$$(2.16) \quad \psi(r, z) \approx C_N(z) r^2, \\ C_N(z) = a_N + \sum_{n=1}^{N-1} (a_n \cos(\omega_n z) + b_n \sin(\omega_n z)).$$

Поэтому магнитное поле (2.1) и плотность тока (2.4) имеют гладкие асимптотики при $r \rightarrow 0$:

$$\mathbf{B} \approx C_N'(z) r \hat{\mathbf{e}}_r - 2C_N(z) \hat{\mathbf{e}}_z + \sqrt{8\beta N} C_N(z) r \hat{\mathbf{e}}_\phi, \quad \mathbf{J} \approx -\frac{8\beta N}{\mu} \mathbf{B}.$$

Полоидальные проекции магнитных силовых линий совпадают с линиями уровня $\psi(r, z) = \text{const}$ [4], [5]. Из формулы (2.15) следует, что эти кривые приближаются к прямым линиям $r = \text{const}$ при $r \gg 1$, так как ее главный член имеет вид $-a_N (-2\beta r^2)^N \exp(-\beta r^2) / (2\beta N!)$. Поэтому все магнитные силовые линии и все

линии тока являются ограниченными по радиальной переменной r . Таким образом, точные решения (2.15) при $a_N \neq 0$ удовлетворяют всем трем условиям а), б), с).

При $N = 2$ решения (2.15) являются периодическими функциями от z с периодом $T = \pi/\sqrt{2\beta}$. При $N \geq 3$ решения (2.15) в общем положении являются квазипериодическими функциями от z . Действительно, частоты $\omega_n = \sqrt{8\beta(N-n)}$ при $n = N-1, N-2, \dots, 1$ пропорциональны последовательности квадратных корней (1.3), которая, очевидно, содержит рационально независимые числа. Поэтому общие решения (2.15) являются квазипериодическими функциями от z , например если $a_{N-1} \neq 0, a_{N-2} \neq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При $\beta \rightarrow 0$ и $r < C < 1/\sqrt{\beta}$, $|z| \ll 1/\sqrt{8\beta N}$ функция магнитного потока (2.15) принимает вид $\psi(r, z) = c_N r^2$, $C_N = a_1 + \dots + a_N$. Эта функция определяет однородное магнитное поле

$$(2.17) \quad \mathbf{B} = -2C_N \hat{\mathbf{e}}_z, \quad \mathbf{J} = 0, \quad p = p_1.$$

Отсюда мы получаем, что равновесия плазмы (2.15) в пределе $\beta \rightarrow 0$ переходят при $r < C < 1/\sqrt{\beta}$, $|z| \ll 1/\sqrt{8\beta N}$ в однородное равновесие (2.17). То же самое справедливо для гауссовского распределения (2.7) и для z -инвариантных равновесий плазмы (2.12).

§ 3. Примеры квазипериодических и периодических равновесий плазмы

I. Первые семь многочленов $L_n^*(x)$ (2.10) имеют вид

$$\begin{aligned} L_0^*(x) &= -1, & L_1^*(x) &= x, & L_2^*(x) &= -\frac{1}{2}x^2 + x, & L_3^*(x) &= \frac{1}{6}x^3 - x^2 + x, \\ L_4^*(x) &= -\frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x, & L_5^*(x) &= \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{6}x^4 + x^3 - 2x^2 + x, \\ L_6^*(x) &= -\frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{24}x^5 - \frac{5}{12}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + x. \end{aligned}$$

Очевидно, что многочлены $L_n^*(x)$ (2.10) имеют знакопеременные коэффициенты. Поэтому все их действительные корни неотрицательны.

Используя известное тождество [55], [56] для полиномов Лагерра

$$L'_{n+1}(x) = L'_n(x) - L_n(x),$$

мы выводим тождество

$$(3.1) \quad (n+1)L_{n+1}^*(x) = (n-x)L_n^*(x) + xL_n^{*'}(x).$$

Из этого соотношения по индукции следует, что положительные корни многочленов $L_{n+1}^*(x)$ и $L_n^*(x)$ разделяют друг друга, и поэтому каждый многочлен $L_n^*(x)$ имеет $n-1$ различных положительных корней. Следовательно, все корни многочленов $L_n^*(x)$ являются простыми, так же как и для полиномов Лагерра $L_n(x)$. Пусть x_n — наибольший корень многочлена $L_n^*(x)$ и y_n — его наименьший положительный корень.

Мы имеем $x_2 = y_2 = 2$, $x_3 = 3 + \sqrt{3}$, $y_3 = 3 - \sqrt{3}$. Из указанных выше свойств следуют неравенства

$$(3.2) \quad \cdots < y_n < \cdots < y_3 < y_2 = x_2 < x_3 < \cdots < x_n < \cdots.$$

Используя рекуррентную формулу [55], [56]

$$(n+1)L_{n+1} - (2n+1-x)L_n + nL_{n-1} = 0$$

для полиномов Лагерра, мы получаем, что $x_n > 2n - 3$. Функции $L_n^*(2r^2) \exp(-r^2)$, определяющие точные решения (2.12) и (2.15), быстро убывают при $r \rightarrow \infty$, см. графики на рис. 1.

Рис. 1. Графики функций $L_5(2r^2) \exp(-r^2)$ и $L_6(2r^2) \exp(-r^2)$

II. ПРИМЕР 1. МОДЕЛЬ АСТРОФИЗИЧЕСКИХ СТРУЙ. Рис. 2 показывает распределение квазипериодических кривых уровня $\psi(r, z) = \text{const}$ для следующего конкретного точного решения (2.15) для $N = 3$, $\beta = 0.1$, $\alpha^2 = 24\beta$:

$$(3.3) \quad \psi(r, z) = \frac{1}{2\beta} \exp(-\beta r^2) \left(L_3^*(2\beta r^2) + \frac{1}{20} \sin(2\sqrt{2\beta} z) L_2^*(2\beta r^2) + \frac{1}{20} \sin(4\sqrt{\beta} (z - 1)) L_1^*(2\beta r^2) \right).$$

Линии уровня $\psi(r, z) = \text{const}$ совпадают с полоидальными проекциями магнитных силовых линий и линий тока. Эти кривые являются квазипериодическими по переменной z , поскольку частоты $2\sqrt{2\beta}$ и $4\sqrt{\beta}$ в (3.3) рационально независимы. При $r > 9$ эти кривые практически параллельны оси z . Следовательно, характерный масштаб l (по переменной r) возмущений z -инвариантного равновесия в формуле (3.3) удовлетворяет неравенству $l < 9$. Вращая кривые на рис. 2 вокруг оси z , мы получаем магнитные поверхности, составляющие непрерывные семейства цилиндров и вложенных торов. Наиболее внутренние торы являются круговыми магнитными осями. Распределение этих инвариантных тороидальных областей и их магнитных осей является квазипериодическим по переменной z . Магнитное поле имеет довольно сложную топологию: замкнутые магнитные силовые линии плотны в каждой тороидальной области и в общем случае зацеплены друг с другом.

Рис. 2. Квазипериодические магнитные силовые линии для модели астрофизических струй

Рис. 3 представляет плотность магнитной энергии $B^2(x, y, z)/(2\mu)$ для равновесия плазмы (3.3) для $y = 0$, $z = 0.5$ и $\beta = 0.1$, $\mu = 0.5$. Очевидно, что $B^2(r, z) \neq 0$ всюду и что $B^2(r, z) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Магнитная энергия сконцентрирована около оси симметрии. Это свойство означает, что указанное выше точное решение моделирует некоторую астрофизическую струю в сопутствующей системе отсчета.

Рис. 4 показывает давление плазмы $p = p_1 - 2\beta^2\psi^2(r, z)/\mu$ для равновесия (3.3), где мы полагаем $p_1 = 8.2$, $\beta = 0.1$, $z = 0.5$, $\mu = 0.5$. Очевидно, что $p \approx p_1$ при

Рис. 3. Плотность магнитной энергии $B^2(x, 0, 0.5)/(2\mu)$ для модели астрофизических струй

$r > 10$ и при $r < 0.5$. Константа p_1 является средним давлением в соответствующем истекающем потоке.

III. Рассмотрим подмножество решений (2.15), где ненулевые коэффициенты $a_n \neq 0$ соответствуют $n = n(k) = N - k^2$. Пусть $L = [\sqrt{N-1}]$. Тогда функция (2.15) принимает вид

$$(3.4) \quad \psi(r, z) = \frac{1}{2\beta} \exp(-\beta r^2) \left(a_N L_N^*(2\beta r^2) + \sum_{k=1}^L (a_{n(k)} \cos(\sqrt{8\beta} k z) + b_{n(k)} \sin(\sqrt{8\beta} k z)) L_{n(k)}^*(2\beta r^2) \right).$$

Эта функция имеет вид ряда Фурье с произвольными коэффициентами $a_{n(j)}$, a_N . Поэтому точные решения (3.4) для любого $r = r_0$ приближают любую гладкую функцию $\bar{\psi}(r_0, z)$, которая является $(\pi/\sqrt{2\beta})$ -периодической по переменной z . Таким образом, даже подмножество z -периодических точных решений (3.4) представляет довольно общие глобальные осесимметричные равновесия плазмы.

ПРИМЕР 2. Простейшее z -периодическое равновесие плазмы имеет функцию магнитного потока

$$(3.5) \quad \psi(r, z) = \frac{1}{2\beta} e^{-\beta r^2} (L_2^*(2\beta r^2) + a_1 \sin(\sqrt{8\beta} z) L_1^*(2\beta r^2)).$$

Рис. 4. Давление плазмы $p(x, 0, 0.5)$ для модели астрофизических струй

Соответствующие линии уровня $\psi(r, z) = \text{const}$ при $\beta = 0.1$, $a_1 = 0.1$ показаны на рис. 5, откуда с очевидностью следует, что характерный масштаб l (по переменной r) возмущений z -инвариантного равновесия в (3.5) удовлетворяет неравенству $l < 9$.

§ 4. Квазипериодичность глобальных равновесий плазмы

I. Зависимость функции магнитного потока (2.15) от переменных z определяется $N - 1$ частотами $\omega_n = \sqrt{8\beta(N - n)}$, принадлежащими сегменту I_N между минимальной $\omega_{N-1} = \sqrt{8\beta}$ и максимальной $\omega_1 = \sqrt{8\beta(N - 1)}$ частотами. Распределение частот ω_n на сегменте I_N не является однородным. Внутри каждого из равных интервалов $(k\sqrt{8\beta}, (k+1)\sqrt{8\beta}) \subset I_N$ имеется $2k$ частот $\omega_{N-k^2}, \dots, \omega_{N-(k+1)^2}$. Поэтому функция плотности частот $D(\omega)$ имеет вид $D(\omega) \approx \omega/(4\beta)$. Это свойство показывает, что решения (2.15) сильно отличаются от рядов Фурье, для которых все частоты являются целыми кратными базисной частоты.

II. Аналитическая сложность z -квазипериодической функции $\psi(r, z)$ (2.15) определяется точным числом рационально независимых частот ω_n или числом рационально независимых квадратных корней в последовательности (1.3). Мы обозначаем это число $d(N)$. Функция $d(N)$ довольно нетривиальна. Например, для $N = 19$ последовательность (1.3) принимает вид

$$1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, 2\sqrt{2}, 3, \sqrt{10}, \sqrt{11}, 2\sqrt{3}, \sqrt{13}, \sqrt{14}, \sqrt{15}, 4, \sqrt{17}, 3\sqrt{2}.$$

Рис. 5. Периодические по z полоидальные магнитные силовые линии

Поэтому функция $d(N)$ при $N = 2, 3, \dots, 19$ имеет следующие последовательные значения

$$d(N) = 1, 2, 3, 3, 4, 5, 6, 6, 6, 7, 8, 8, 9, 10, 11, 11, 12, 12.$$

Следовательно, число рационально независимых частот $\sqrt{8\beta(N-n)}$ для $N = 19$ равно 12.

Очевидно, что если $m_1 = p_1^{k_1} \cdots p_n^{k_n}$, то квадратный корень $\sqrt{m_1}$ рационально зависит с $\sqrt{m_0}$, где $m_0 = p_{i_1} \cdots p_{i_k}$. Поэтому базис рационально независимых корней в (1.3) не больше чем множество корней $\sqrt{p_1 \cdots p_n}$, где p_j – различные простые числа. Квадратные корни $\sqrt{p_1 \cdots p_n}$ являются рационально независимыми. Действительно, предположим, что p_n есть первое простое число такое, что существует некоторая рациональная зависимость между действительными числами $\sqrt{p_{j_1} \cdots p_{j_m}}$, где $p_j \leq p_n$ являются несовпадающими простыми числами. Тогда справедливо некоторое уравнение

$$(4.1) \quad \sqrt{p_n} \left(\sum_{\alpha} c_{\alpha} \sqrt{p_{\alpha(1)} \cdots p_{\alpha(k)}} \right) = \sum_{\beta} c_{\beta} \sqrt{p_{\beta(1)} \cdots p_{\beta(m)}},$$

где c_{α}, c_{β} являются рациональными числами и $p_{\alpha(j)}, p_{\beta(k)} < p_n$. Уравнение (4.1) означает, что $\sqrt{p_n}$ принадлежит алгебраическому расширению поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$, порожденному квадратными корнями $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{p_n-1}$. Однако классическая теорема о квадратичных расширениях [58] утверждает, что это не верно. Полученное противоречие доказывает, что все числа $\sqrt{p_1 \cdots p_n}$ рационально независимы. Этот результат следует также из более общей теоремы Безиковича [59].

Таким образом, функция $d(N)$ равна числу составных чисел $p_1 \cdots p_n < N$, не содержащих квадратов. Асимптотика этой функции при $N \rightarrow \infty$ известна из теории чисел:

$$d(N) \approx \frac{1}{\zeta(2)} N = \frac{6}{\pi^2} N,$$

см. [60]. Отсюда мы получаем, что около трех пятых всех частот ω_n в (1.3) являются рационально независимыми.

§ 5. Глобальные равновесия плазмы в полупространстве

Применим развитые методы к проблеме равновесия плазмы в полупространстве $z \geq 0$. Эта проблема хорошо известна в теории солнечных протуберанцев [11]. Полагая в уравнениях (2.8)

$$\lambda = \kappa_n^2, \quad \kappa_n = \sqrt{8\beta n - \alpha^2}, \quad n = N, N+1, \dots, \quad N \geq \frac{\alpha^2}{8\beta},$$

мы находим при $\alpha^2 \leq 8\beta N$ точные решения $P_n(x) = L_n^*(x)$, $T_n(z) = \exp(-\kappa_n z)$. Отсюда следует, что линейное уравнение (2.5) имеет точные решения

$$(5.1) \quad \psi(r, z) = e^{-\beta r^2} \sum_{n=N}^{N+m} a_n \exp(-\sqrt{8\beta n - \alpha^2} z) L_n^*(2\beta r^2),$$

где $\alpha, \beta > 0$ и a_n являются произвольными постоянными и $m \geq 0$, $N \geq 0$ – произвольные целые числа. Решения (5.1) определены в полупространстве $z \geq 0$ и быстро стремятся к нулю при $r \rightarrow \infty$ и при $z \rightarrow \infty$, если $\alpha^2 < 8\beta N$. Давление плазмы p имеет вид $p(\psi) = p_1 - 2\beta^2 \psi^2 / \mu$, где $p_1 > (2\beta^2 / \mu) \max(\psi^2(r, z))$, $z \geq 0$. Соответствующие магнитное поле (2.1), ток (2.4) и давление p не имеют сингулярностей в полупространстве $z \geq 0$. Поэтому точные решения (5.1) удовлетворяют физическим условиям а) и б). Они удовлетворяют также условию с), если $\text{sign } a_n = (-1)^n$, поскольку тогда все слагаемые в сумме (5.1) имеют одинаковый знак при $r \gg 1$, что имеет следствием ограниченность по r всех магнитных поверхностей. Поэтому полученные решения определяют глобальные равновесия плазмы в полупространстве $z \geq 0$.

Наиболее важное физическое свойство точных решений (5.1) при $\alpha^2 < 8\beta N$ состоит в том, что их полная магнитная энергия

$$E_m = \int \frac{B^2}{2\mu} dV$$

в полупространстве $z \geq 0$ является конечной. Эти глобальные равновесия плазмы моделируют солнечные протуберанцы; асимптотическое значение давления p_1 является средним давлением плазмы в солнечной короне.

ПРИМЕР 3. МОДЕЛЬ СОЛНЕЧНЫХ ПРОТУБЕРАНЦЕВ. Рис. 6 представляет полоидальные магнитные силовые линии для точного решения вида (5.1):

$$(5.2) \quad \psi(r, z) = e^{-\beta r^2} (e^{-4\sqrt{\beta} z} L_2^*(2\beta r^2) - 0.5 e^{-2\sqrt{6\beta} z} L_3^*(2\beta r^2))$$

Рис. 6. Магнитные силовые линии для модели солнечных протуберанцев

при $\alpha = 0$ и $\beta = 10$. Соответствующее магнитное поле (2.1) и ток (2.4) имеют вид

$$(5.3) \quad \mathbf{B} = \frac{\psi_z}{r} \hat{\mathbf{e}}_r - \frac{\psi_r}{r} \hat{\mathbf{e}}_z, \quad \mathbf{J} = \frac{4\beta^2 r \psi}{\mu} \hat{\mathbf{e}}_\phi.$$

Магнитное поле $\mathbf{B}$ (5.3) является чисто полоидальным, ток $\mathbf{J}$ (5.3) является чисто круговым. Все магнитные силовые линии начинаются и заканчиваются при $z = 0$ (граница солнечной фотосферы). Трехмерная структура магнитного поля $\mathbf{B}$ получается из рис. 6 вращением вокруг оси z .

При $\alpha^2 = 8\beta N$ функция магнитного потока (5.1) принимает вид

$$(5.4) \quad \psi(r, z) = e^{-\beta r^2} \left(a_N L_N^*(2\beta r^2) + \sum_{n=N+1}^{N+m} a_n \exp(-\sqrt{8\beta(n-N)} z) L_n^*(2\beta r^2) \right).$$

Эти точные решения образуют $(m+1)$ -мерное линейное пространство возмущений цилиндрически симметричного равновесия плазмы (2.12) в полупространстве $z \geq 0$. При $z \rightarrow \infty$ эти решения стремятся к равновесию (2.12).

§ 6. Контрпримеры к теореме Паркера

I. Выведенные z -инвариантные равновесия плазмы (2.12) имеют следующее важное свойство. Соответствующее магнитное поле $\mathbf{B}_N$ (2.13) и электрический ток $\mathbf{J}_N$

(2.14) отличны от нуля во всем евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$. Действительно, если, например, компонента (2.13) $B_{N_\phi}(x_1) = 0$, то $L_N^*(x_1) = 0$; отсюда $L_N^{*'}(x_1) \neq 0$, поскольку все корни многочлена $L_N^*(x)$ являются простыми. Поэтому компонента $B_{N_z}(x_1) \neq 0$. Следовательно, в любой области $0 \leq r \leq R$ мы имеем

$$(6.1) \quad |\mathbf{B}_N| > B|a_N| > 0, \quad |\mathbf{J}_N| > J|a_N| > 0.$$

Для точных решений (2.15) вариации магнитного поля $\mathbf{B} - \mathbf{B}_N$ и вариации тока $\mathbf{J} - \mathbf{J}_N$ определяются функцией магнитного потока

$$(6.2) \quad \psi - \psi_N = \frac{1}{2\beta} e^{-\beta r^2} \sum_{n=1}^{N-1} (a_n \cos(\omega_n z) + b_n \sin(\omega_n z)) L_n^*(2\beta r^2).$$

Используя формулы (2.1), (2.15) и (6.2), мы получаем (то же самое для $\mathbf{J}$)

$$(6.3) \quad \frac{|\mathbf{B} - \mathbf{B}_N|}{|\mathbf{B}_N|} < \frac{|\mathbf{B} - \mathbf{B}_N|}{B|a_N|} < A_N \frac{C(R)}{B}, \quad A_N = \frac{1}{|a_N|} \sum_{n=1}^{N-1} (|a_n| + |b_n|)$$

в области $0 \leq r \leq R$, где $C(R)$ – некоторая гладкая функция. Формулы (6.1) и (6.3) означают, что неравенства

$$(6.4) \quad \frac{|\mathbf{B} - \mathbf{B}_N|}{|\mathbf{B}_N|} \ll 1, \quad \frac{|\mathbf{J} - \mathbf{J}_N|}{|\mathbf{J}_N|} \ll 1$$

справедливы в области $0 \leq r \leq R$ при условии, что $A_N \ll 1$.

При $r \rightarrow \infty$ функция магнитного потока ψ_N (2.12) и ее вариации $\psi - \psi_N$ (6.2) имеют следующие асимптотики:

$$(6.5) \quad \begin{aligned} \psi_N(r, z) &\approx -\frac{a_N(-2\beta r^2)^N}{2\beta N!} e^{-\beta r^2}, \\ \psi - \psi_N &\approx -\frac{(-2\beta r^2)^N}{2\beta N!} e^{-\beta r^2} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{N!}{n!(-2\beta r^2)^{N-n}} (a_n \cos(\omega_n z) + b_n \sin(\omega_n z)). \end{aligned}$$

Отсюда мы получаем

$$(6.6) \quad \frac{\psi - \psi_N}{\psi_N} \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty.$$

Вследствие (6.6) отношения (6.4) стремятся к нулю при $r \rightarrow \infty$. Поэтому неравенства (6.4) справедливы также при $r > R$ и, следовательно, всюду в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ при условии, что $A_N \ll 1$.

Оценим характерный масштаб l (по переменной r) возмущений, представленных суммой в формуле (2.15). Как показано в § 3, каждый многочлен $L_n^*(x)$ имеет $n - 1$

различных положительных корней и $|a_n| = 1/n!$ для его старшего коэффициента. Отсюда мы находим $|L_n^*(x)| < x^n/n!$. Если $x > N$, то мы имеем $x^n/n! < x^{N-1}/(N-1)!$ для всех $n < N-1$. Следовательно, при $x > N$ мы получаем

$$|L_1^*(x)| + \dots + |L_{N-1}^*(x)| < \frac{x^{N-1}}{(N-2)!}.$$

Для функции магнитного потока ψ (2.15) мы имеем

$$(6.7) \quad |\psi - \psi_N| < \frac{1}{2\beta} |a_N| A_N e^{-\beta r^2} \frac{x^{N-1}}{(N-2)!}.$$

Для $x > x_N$ мы имеем $L_N^*(x) > (x - x_N)^N/N!$, где x_N является наибольшим корнем многочлена $L_N^*(x)$. Отсюда

$$(6.8) \quad |\psi_N| > \frac{1}{2\beta} |a_N| e^{-\beta r^2} \frac{(x - x_N)^N}{N!}.$$

Из формул (6.7) и (6.8) следует

$$(6.9) \quad \frac{|\psi - \psi_N|}{|\psi_N|} < A_N \frac{N(N-1)x^{N-1}}{(x - x_N)^N} < A_N \frac{N^2}{x(1 - x_N/x)^N}.$$

Отсюда мы получаем при $x > N^2 x_N$:

$$\frac{|\psi - \psi_N|}{|\psi_N|} < A_N.$$

Такие же неравенства справедливы для магнитного поля и электрического тока. Таким образом, при $A_N \ll 1$ возмущения (2.15) могут быть значительны только при $x < N^2 x_N$. Подставляя $x = 2\beta l^2$, мы получаем для характерной длины l (по переменной r) возмущений (2.15):

$$(6.10) \quad l \leq N \sqrt{\frac{x_N}{2\beta}}.$$

Например, для равновесия (3.3) мы имеем $N = 3$, $x_3 = 3 + \sqrt{3}$, $\beta = 0.1$, $A_3 = 0.1$. Отсюда характерный масштаб возмущений $l \leq 3\sqrt{x_3/(2\beta)} \approx 14.59$. Это следует также из рис. 2.

Неравенства (6.4) означают, что равновесия плазмы (2.15) при $A_N \ll 1$ являются малыми возмущениями z -инвариантного равновесия (2.12) во всем евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$. Отсюда мы получаем, что условие Паркера о том, что “*локальное возмущение поля является малым по сравнению с полным полем*” [23; с. 361], выполнено всюду. Условие Паркера о том, что длина трубки тока L является “*большой по сравнению с характерным трансверсальным масштабом l вариации поля*” [23; с. 362], выполнено, поскольку $l \leq N\sqrt{x_N/(2\beta)}$ и длина трубки тока L может

быть выбрана произвольно большой для z -инвариантного равновесия (2.12). Отсюда $L \gg l$. Условие Паркера о том, что “магнитное поле является аналитическим в его отклонении ε от инвариантного поля $B_i(x, y)$ ” [23; с. 378], выполнено, так как точные решения (2.15) являются линейными функциями малых параметров $a_1, b_1, \dots, a_{N-1}, b_{N-1}$. Все возмущения (2.15) не являются z -инвариантными. Поэтому равновесия плазмы (2.15) представляют собой контрпримеры к теореме Паркера.

Равновесия плазмы (5.4) являются возмущениями z -инвариантных равновесий (2.12) в полупространстве $z \geq 0$. Соответствующие неравенства (6.4) справедливы при

$$A_N = \frac{1}{|a_N|} (|a_{N+1}| + \dots + |a_{N+m}|) \ll 1.$$

Оценка $l \leq N \sqrt{x_N / (2\beta)}$ для характерного масштаба l возмущений (5.4) справедлива при $A_N \ll 1$. Условие Паркера об аналитичности по малому параметру ε очевидно удовлетворено. Все возмущения (5.4) не являются z -инвариантными. Поэтому точные решения (5.4) в полупространстве $z \geq 0$ являются контрпримерами к теореме Паркера.

II. Один из источников расхождения с результатами Паркера. В своей книге [23] Паркер пишет (с. 369): “Мы предположим для удобства, что хотя $B_z(x, y)$ может широко изменяться, оно не обращается в нуль и не меняет знак” и приходит к утверждению:

“Результат может быть написан в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{B_z^2} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{B_z^2} \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{B_z^2} \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0.$$

Эта форма является полностью эллиптической. В бесконечном пространстве ее единственными ограниченными решениями являются постоянные, $\Psi = C$ ”.

Доказательство теоремы Паркера на с. 369–370 [23] и доказательство ее обобщения на магнитную гидродинамику [41; с. 837, уравн. (62)] основаны на этом утверждении. Мы представим контрпример также и к этому утверждению. Выберем функцию $B_z(x, y)$ в виде

$$(6.11) \quad B_z(x, y) = F(h(x, y)), \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \Delta h = 0,$$

где $h(x, y)$ есть произвольная гармоническая функция и $F(u)$ есть произвольная гладкая функция, которая является положительной при всех u и имеет ограниченный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F^2(u) du < C_1.$$

Например, $F(u)$ может быть гауссовой функцией $e^{-\beta u^2}$, использованной выше, и $h(x, y)$ может быть $ax + by + cxy + d(x^2 - y^2)$. Функция $B_z(x, y)$ (6.11) является положительной при всех x, y . Мы определяем функцию $\Psi(x, y, z)$ формулой

$$\Psi(x, y, z) = \int_{-\infty}^{h(x, y)} F^2(u) du.$$

Очевидно, что

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{B_z^2} \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{B_z^2} \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{B_z^2} \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0.$$

Отсюда вследствие $\Delta h = 0$ получаем, что функция $\Psi(x, y, z)$ удовлетворяет вышеприведенному эллиптическому уравнению. Она очевидно ограничена, $0 < \Psi(x, y, z) < C_1$, и не постоянна.

Часть II. Равновесия плазмы с винтовой симметрией

§ 7. Точные глобальные равновесия плазмы с винтовой симметрией

Равновесия плазмы с винтовой симметрией были впервые введены Джонсоном, Фриманом, Калсрудом и Оберманом в [38]. В цилиндрических координатах r, z, ϕ эти решения зависят от двух переменных $u = z - \gamma\phi$ и r и поэтому инвариантны по отношению к винтовым преобразованиям $z \rightarrow z + \gamma\phi_0, \phi \rightarrow \phi + \phi_0$. Магнитное поле $\mathbf{B}$, ток $\mathbf{J}$ и давление p являются $2\pi\gamma$ -периодическими функциями переменной u и, следовательно, z .

Магнитное поле $\mathbf{B}$ с винтовой симметрией имеет вид

$$(7.1) \quad \mathbf{B} = \frac{\psi_u}{r} \hat{\mathbf{e}}_r - \frac{\psi_r}{r} \hat{\mathbf{e}}_u + \frac{f}{r} \hat{\mathbf{e}}_\phi,$$

где $\psi(u, r)$ и $f(u, r)$ – некоторые гладкие функции, $\psi_x = \partial\psi/\partial x$ и $\hat{\mathbf{e}}_r, \hat{\mathbf{e}}_u, \hat{\mathbf{e}}_\phi$ являются единичными касательными векторами, соответствующими координатам r, u, ϕ . Плотность тока $\mathbf{J}$ есть

$$(7.2) \quad \mathbf{J} = \frac{1}{\mu} \operatorname{curl} \mathbf{B} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{I_r}{r} \hat{\mathbf{e}}_u - \frac{I_u}{r} \hat{\mathbf{e}}_r + \Phi \hat{\mathbf{e}}_\phi \right),$$

где

$$(7.3) \quad I = \frac{r^2 + \gamma^2}{r^2} f - \frac{\gamma}{r} \psi_r,$$

$$(7.4) \quad \Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \gamma \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{f}{r^2} \right).$$

Джонсон, Фриман, Калсруд и Оберман показали в работе [38], что уравнения равновесия плазмы (1.1) для решений с винтовой симметрией эквивалентны равенствам $I = I(\psi), p = p(\psi)$ с произвольными функциями $I(\psi)$ и $p(\psi)$ и уравнению

$$(7.5) \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r}{r^2 + \gamma^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{II'(\psi)}{r^2 + \gamma^2} + \frac{2\gamma I(\psi)}{(r^2 + \gamma^2)^2} = -\mu p'(\psi),$$

где штрих означает дифференцирование по отношению к ψ . Уравнение (7.5) эквивалентно уравнению Джонсона–Фримана–Калсруда–Обермана (ДжФКО) [38], где использовалась другая переменная $u = m\phi - hz$. Мы используем переменную $u = z - \gamma\phi$, потому что только параметр $\gamma = m/h$ является существенным. При $\gamma = 0$ уравнение ДжФКО (7.5) превращается в уравнение Грэда–Шафранова (2.3) [4], [5], которое описывает осесимметричные равновесия плазмы.

Формула (7.3) при $I = I(\psi)$ дает

$$(7.6) \quad f = \frac{\gamma r \psi_r + r^2 I(\psi)}{r^2 + \gamma^2}, \quad \psi_r - \frac{\gamma f}{r} = \frac{r^2 \psi_r - \gamma r I(\psi)}{r^2 + \gamma^2}.$$

Из формул (7.1) и (7.6) следуют выражения для магнитного поля в цилиндрических координатах r, z, ϕ :

$$(7.7) \quad \mathbf{B} = \frac{\psi_u}{r} \hat{\mathbf{e}}_r + B_1 \hat{\mathbf{e}}_z + B_2 \hat{\mathbf{e}}_\phi, \quad B_1 = \frac{\gamma I(\psi) - r \psi_r}{r^2 + \gamma^2}, \quad B_2 = \frac{r I(\psi) + \gamma \psi_r}{r^2 + \gamma^2},$$

и в декартовых координатах x, y, z :

$$\mathbf{B} = \left(\frac{x \psi_u}{r^2} - \frac{y(\gamma \psi_r + r I(\psi))}{r(r^2 + \gamma^2)} \right) \hat{\mathbf{e}}_x + \left(\frac{y \psi_u}{r^2} + \frac{x(\gamma \psi_r + r I(\psi))}{r(r^2 + \gamma^2)} \right) \hat{\mathbf{e}}_y + B_1 \hat{\mathbf{e}}_z.$$

Уравнение ДжФКО (7.5) и первая формула (7.6) дают выражение для функции $\Phi/r = -\mu p'(\psi) - f I'(\psi)/r^2$. Отсюда мы получаем, что ток $\mathbf{J}$ (7.2) в цилиндрических координатах r, z, ϕ имеет вид

$$(7.8) \quad \mathbf{J} = -\frac{I'(\psi)}{\mu} \mathbf{B} - p'(\psi)(r \hat{\mathbf{e}}_\phi + \gamma \hat{\mathbf{e}}_z).$$

ТЕОРЕМА 2. *Существует бесконечное семейство глобальных равновесий плазмы, которые зависят от произвольного целого числа $N \geq 0$ и двух вещественных чисел $\beta > 0$ и γ . Эти равновесия являются z - и ϕ -инвариантными в цилиндрических координатах r, z, ϕ . Для*

$$(7.9) \quad \beta = \frac{m^2}{4\gamma^2(2N - 2n - m)}$$

и любых двух целых чисел $m \geq 1$ и $n \geq 0$, удовлетворяющих условию $2N > 2n + m$, эти равновесия содержатся в трехмерном линейном пространстве точных глобальных равновесий плазмы, которые обладают винтовой симметрией с параметром γ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Предположим, что $I(\psi) = \alpha\psi$ и $p(\psi) = p_1 - 2\beta^2\psi^2/\mu$, где $p_1 > (2\beta^2/\mu) \max(\psi^2(x, y, z))$. Тогда давление плазмы $p > 0$ всюду в $\mathbb{R}^3$. Очевидно, что постоянная p_1 не входит в уравнения равновесия плазмы. При этих предположениях уравнение ДжФКО (7.5) становится линейным:

$$(7.10) \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r}{r^2 + \gamma^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = 4\beta^2 \psi - \frac{\alpha^2 \psi}{r^2 + \gamma^2} - \frac{2\alpha\gamma\psi}{(r^2 + \gamma^2)^2}.$$

Разделяя переменные с помощью подстановки

$$(7.11) \quad \psi(r, u) = A(r)(a \cos(\omega u) + b \sin(\omega u)),$$

мы получаем уравнение

$$(7.12) \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{r}{r^2 + \gamma^2} \frac{dA(r)}{dr} \right) = \left(4\beta^2 + \frac{\omega^2}{r^2} - \frac{\alpha^2}{r^2 + \gamma^2} - \frac{2\alpha\gamma}{(r^2 + \gamma^2)^2} \right) A(r).$$

Это уравнение не принадлежит никакому известному классу интегрируемых уравнений, см. [57]. Для нахождения точных решений мы применим подстановку $A(r) = r^\lambda e^{-\beta r^2} B(x)$, $x = 2\beta r^2$, $\lambda \geq 0$, которая преобразует уравнение (7.12) в уравнение

$$(7.13) \quad (x^2 + c_1 x)B'' + (-x^2 + (\lambda - c_1)x + (\lambda + 1)c_1)B' + \left(\frac{\alpha^2 - \eta}{8\beta} x + \frac{\alpha^2 \gamma^2 - \eta \gamma^2}{4} + \frac{\alpha\gamma - c_1 - \lambda}{2} + \frac{x + c_1}{4x} (\lambda^2 - \gamma^2 \omega^2) \right) B = 0,$$

где $B' = dB(x)/dx$, $c_1 = 2\beta\gamma^2$ и $\eta = 4\beta^2\gamma^2 + 4\beta\lambda + \omega^2$. Мы интересуемся только полиномиальными решениями $B(x)$ с ненулевым свободным членом. Исследуя члены высшего и низшего порядков в (7.13), мы получаем необходимые условия

$$(7.14) \quad \frac{\alpha^2 - \eta}{8\beta} = n, \quad \lambda = |\gamma\omega|,$$

где целое число $n \geq 0$ является степенью многочлена $B(x)$. Форма решения (7.11)

$$\psi(r, u) = A(r)(a \cos(\omega z - \gamma\omega\phi) + b \sin(\omega z - \gamma\omega\phi))$$

имеет следствием то, что $\gamma\omega$ обязано быть целым числом: $|\gamma\omega| = m \geq 0$. Отсюда мы получаем $\lambda = m$, $\omega = \pm m/\gamma$ и $\eta = (2\beta\gamma + m/\gamma)^2$. Первое необходимое условие (7.14) становится уравнением

$$(7.15) \quad \alpha^2 \gamma^2 = (m + c_1)^2 + 4nc_1$$

для двух неизвестных целых чисел m и n .

Представим уравнение (7.13) в виде

$$(7.16) \quad (x^2 + c_1 x)B'' + (-x^2 + (m - c_1)x + (m + 1)c_1)B' + n(x + c_1 - k_{mn}c_1)B = 0,$$

где $k_{mn} = (m + c_1 - \alpha\gamma)/(2nc_1)$. Отметим, что уравнение (7.16) отличается от всех классических дифференциальных уравнений, которые определяют полиномы Чебышёва, Эрмита, Лагерра, Лежандра и Якоби [55]–[57].

ЛЕММА 1. Дифференциальное уравнение (7.16) при выполнении условия (7.15) имеет полиномиальное решение

$$(7.17) \quad B_{mn}(x) = \frac{d^m}{dx^m} L_{m+n}(x) - k_{mn} x \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} L_{m+n}(x),$$

где $L_m(x)$ являются полиномами Лагерра.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для нахождения полиномиальных решений $B_{mn}(x)$ мы сделаем подстановку

$$(7.18) \quad B(x) = P(x) - k_{mn} x P'(x).$$

Прямая проверка доказывает тождество

$$\begin{aligned} (x^2 + c_1 x) B'' + (-x^2 + (m - c_1)x + (m + 1)c_1) B' + n(x + c_1 - k_{mn} c_1) B \\ = (x + c_1 - k_{mn} c_1) Q - k_{mn} x(x + c_1) Q' + (nc_1 k_{mn}^2 - (m + c_1)k_{mn} - 1) x P', \end{aligned}$$

где $Q = xP'' + (1 + m - x)P' + nP$. Необходимое условие (7.15) эквивалентно уравнению

$$nc_1 k_{mn}^2 - (m + c_1)k_{mn} - 1 = 0, \quad k_{mn} = \frac{m + c_1 - \alpha\gamma}{2nc_1}.$$

Уравнение $Q = 0$, или

$$xP'' + (1 + m - x)P' + nP = 0,$$

имеет полиномиальные решения

$$P_{mn}(x) = \frac{d^m L_{m+n}(x)}{dx^m}$$

степени n , где $L_p(x)$ — полиномы Лагерра

$$(7.19) \quad L_p(x) = \frac{1}{p!} e^x \frac{d^p}{dx^p} (e^{-x} x^p) = \sum_{k=0}^p \frac{(-1)^k p!}{(k!)^2 (p-k)!} x^k.$$

Отсюда, используя формулу (7.18), мы получаем, что если два целых числа m и n удовлетворяют уравнению (7.15), то уравнение (7.16) следует из уравнения $Q = 0$ и имеет полиномиальное решение (7.17).

Окончательно мы получаем, что уравнение (7.10) имеет точное решение

$$(7.20) \quad \psi_{mn} = r^m e^{-\beta r^2} B_{mn}(2\beta r^2) (a_{mn} \cos(mu/\gamma) + b_{mn} \sin(mu/\gamma)),$$

где a_{mn} и b_{mn} являются произвольными постоянными. При $m \geq 2$ магнитное поле (7.7) $\mathbf{B}(0, z) = 0$ на оси $r = 0$. Только при $m = 1$ кинк-мода (7.20) имеет ненулевое магнитное поле при $r = 0$.

В силу линейности уравнения (7.10) мы получаем, что если алгебраическое уравнение (7.15) имеет несколько целых решений m , n , то любая линейная комбинация соответствующих функций (7.20) является точным решением уравнения (7.10).

2) При $m = n = 0$ необходимое условие (7.15) принимает вид $\alpha = 2\beta\gamma$ и уравнение (7.13) имеет решение $B = \text{const}$. Поэтому уравнение ДжФКО (7.5) имеет точное решение гауссовского вида

$$(7.21) \quad \psi_0(r) = \exp(-\beta r^2).$$

Соответствующее магнитное поле (7.7), ток (7.8) и давление p имеют вид

$$(7.22) \quad \mathbf{B} = 2\beta e^{-\beta r^2} \hat{\mathbf{e}}_z, \quad \mathbf{J} = \frac{4\beta^2}{\mu} r e^{-\beta r^2} \hat{\mathbf{e}}_\phi, \quad p = p_1 - \frac{2\beta^2}{\mu} e^{-2\beta r^2}.$$

Это некоторое глобальное равновесие плазмы, обладающее цилиндрической симметрией.

Для $m = 0$ и $n = N \neq 0$ необходимое условие (7.15) сводится к уравнению ($c_1 = 2\beta\gamma^2$)

$$(7.23) \quad \alpha^2 \gamma^2 = c_1^2 + 4Nc_1$$

и точное решение (7.20) принимает вид

$$(7.24) \quad \psi_N(r) = a_N e^{-\beta r^2} B_{0N}(2\beta r^2),$$

где многочлены $B_{0N}(x)$ определяются формулами

$$(7.25) \quad B_{0N}(x) = L_N(x) - k_N x L'_N(x).$$

Из уравнения (7.23) следует

$$(7.26) \quad \alpha\gamma = c_1 \sqrt{1 + 2N/(\beta\gamma^2)}, \quad k_N = \frac{c_1 - \alpha\gamma}{2Nc_1} = \frac{1 - \sqrt{1 + 2N/(\beta\gamma^2)}}{2N} < 0.$$

Поэтому многочлены $B_{0N}(x)$ зависят от параметра $\beta\gamma^2$.

Для функции магнитного потока (7.24) магнитное поле (7.7)

$$(7.27) \quad \mathbf{B} = \frac{\alpha\gamma\psi_N - r\psi'_N}{r^2 + \gamma^2} \hat{\mathbf{e}}_z + \frac{\alpha r\psi_N + \gamma\psi'_N}{r^2 + \gamma^2} \hat{\mathbf{e}}_\phi$$

не имеет сингулярностей и убывает при $r \rightarrow \infty$ так же быстро, как $\exp(-\beta r^2)r^{2N}$. Поэтому полная магнитная энергия в любом слое $r_1 \leq r \leq r_2$ является конечной. Магнитные поверхности $\psi_N(r) = \text{const}$ являются цилиндрами $r = \text{const}$.

Таким образом, мы продемонстрировали, что уравнение ДжФКО (7.5) имеет решения, описывающие глобальные равновесия плазмы (7.21), (7.22) и (7.24), (7.27), где два параметра $\beta > 0$ и $\gamma \neq 0$ являются произвольными. Эти равновесия обладают цилиндрической симметрией, поскольку они являются z - и ϕ -инвариантными.

3) При $m \geq 1$ функции магнитного потока $\psi_{mn}(r, u)$ (7.20) определяют магнитные поля $\mathbf{B}$ (7.7) и токи $\mathbf{J}$ (7.8), которые являются гладкими в декартовых координатах и убывают при $r \rightarrow \infty$ так же быстро, как $\exp(-\beta r^2)r^{2m}$. Поэтому вышеуказанные условия а) и б) выполнены. Однако условие с) не удовлетворено, поскольку магнитная

поверхность $\psi_{mn}(r, u) = 0$ есть геликоид $z = \gamma\phi + c$, который является неограниченным по переменной r .

Для нахождения глобальных равновесий плазмы мы рассмотрим линейную комбинацию точных решений $\psi_N(r)$ (7.24) и $\psi_{mn}(r, u)$ (7.20), которая удовлетворяет уравнению (7.10), если два необходимых условия (7.15) и (7.23) справедливы одновременно. Из этих двух условий следует неравенство $2N > 2n + m$ и формулы

$$(7.28) \quad c_1 = 2\beta\gamma^2 = \frac{m^2}{2(2N - 2n - m)}, \quad \alpha\gamma = \frac{m\sqrt{(4N - m)^2 - 16nN}}{2(2N - 2n - m)},$$

$$(7.29) \quad k_{mn} = \frac{m + c_1 - \alpha\gamma}{2nc_1} = \frac{1}{2mn} (4(N - n) - m - \sqrt{(4N - m)^2 - 16nN}).$$

Первая формула (7.28) эквивалентна условию (7.9). Таким образом, мы получаем, что уравнение ДжФКО (7.5) для любых значений параметров γ и $\alpha(\gamma)$, $\beta(\gamma)$, определенных формулами (7.28), имеет точные решения

$$(7.30) \quad \psi_{Nmn} = e^{-\beta r^2} (a_N B_{0N}(x) + r^m B_{mn}(x) (a_{mn} \cos(mu/\gamma) + b_{mn} \sin(mu/\gamma))),$$

где N, m, n — произвольные целые числа, удовлетворяющие неравенству $2N > 2n + m$, и $x = 2\beta r^2$. Функции $I(\psi)$ и $p(\psi)$ имеют вид $I(\psi) = \alpha\psi$, $p(\psi) = p_1 - 2\beta^2\psi^2/\mu$, где параметры $\alpha(\gamma)$, $\beta(\gamma)$ заданы формулами (7.28). Из неравенства $2N > 2n + m$ следует, что функция $\psi_{Nmn}(r, u)$ (7.30) имеет главный член $(-2\beta)^N a_N \exp(-\beta r^2) r^{2N}$ при $r \rightarrow \infty$. Поэтому равновесие (7.30) при $m \geq 1$ удовлетворяет вышеуказанным условиям а) и б), и все магнитные поверхности $\psi(r, u) = \text{const}$ асимптотически при $r \gg 1$ являются цилиндрами $r = \text{const}$. Поэтому все магнитные силовые линии и линии тока являются ограниченными по переменной r . Таким образом, точные решения (7.30) определяют глобальные равновесия плазмы. Эти равновесия являются периодическими по переменной z с периодом $2\pi\gamma/m$ и по переменной ϕ с периодом $2\pi/m$. При $m \geq 1$ точные решения (7.30) описывают сильно сконцентрированные вдоль оси z кинк-моды в “прямом токамаке”.

Из уравнения (7.15) при $\alpha > 0$ следует $m + c_1 < \alpha\gamma$, поэтому $k_{mn} < 0$. Отсюда, используя классические свойства полиномов Лагерра (7.19), мы получаем, что новые многочлены $B_{mn}(x)$ (7.17) имеют знакопеременные коэффициенты и каждый многочлен $B_{mn}(x)$ имеет n различных положительных корней при любом целом $m \geq 0$.

Используя формулы (7.19), мы находим первые три многочлена (7.25):

$$(7.31) \quad \begin{aligned} B_{01}(x) &= 1 - (1 - k_1)x, & B_{02}(x) &= 1 - 2(1 - k_2)x + \frac{1}{2}(1 - 2k_2)x^2, \\ B_{03}(x) &= 1 - 3(1 - k_3)x + \frac{3}{2}(1 - 2k_3)x^2 - \frac{1}{6}(1 - 3k_3)x^3. \end{aligned}$$

Первые три многочлена $B_{1n}(x)$ (7.17) имеют вид

$$(7.32) \quad \begin{aligned} B_{10}(x) &= -1, & B_{11}(x) &= -2 + (1 - k_{11})x, \\ B_{12}(x) &= -3 + 3(1 - k_{12})x - \frac{1}{2}(1 - 2k_{12})x^2. \end{aligned}$$

§8. Модель астрофизических струй

ПРИМЕР 4. При $N = 0$ существует только одно равновесие плазмы $\psi_0(x) = c \exp(-\beta r^2)$. При $N = 1$ неравенство $2N > 2n + m$ имеет одно целочисленное решение $m = 1$, $n = 0$. Формулы (7.28) дают $c_1 = 1/2$, $\alpha\gamma = 3/2$, $\beta = 1/(4\gamma^2)$; отсюда $k_1 = -1$ и многочлен $B_{01}(x)$ (7.31) есть $1 - 2x$. Таким образом, функция магнитного потока (7.30) имеет эквивалентный вид ($x = 2\beta r^2$)

$$(8.1) \quad \psi(r, z, \phi) = e^{-\beta r^2} (1 - 4\beta r^2 + a_1 r \cos(z/\gamma - \phi)).$$

Рис. 7 показывает сечение $z = 0$ магнитных поверхностей $\psi(r, z, \phi) = \text{const}$ при $a_1 = -1$, $\beta = 0.1$, $\gamma = \sqrt{5}/2$. Функция $\psi(r, 0, \phi)$ (8.1) достигает своего максимума при $r = 0.8968$, $\phi = \pi$ и минимума при $r = 3.0168$, $\phi = 0$.

Рис. 7. Магнитные поверхности при $z = 0$ для винтовой модели астрофизических струй

Двумерные магнитные поверхности получаются из кривых на рис. 7 посредством одновременного вращения по ϕ с угловой скоростью 1 и сдвига по z с угловой скоростью γ . Рис. 7 показывает, что существуют три области, заполненные цилиндрическими магнитными поверхностями: одна внешняя область и две внутренние области с двумя магнитными осями, соответствующими критическим точкам максимума и минимума функции $\psi(r, u)$. Эти магнитные оси образуют двойную спираль, представленную на рис. 8. Магнитные оси являются точными магнитными силовыми линиями.

Рис. 8. Двойная спираль магнитных осей

Рис. 9. Плотность магнитной энергии $B^2(x, 0, 0)/(2\mu)$

Рис. 10. Поверхности постоянной магнитной энергии $B^2(x, y, z) = \text{const}$ при $z = 0$

Рис. 9 представляет плотность магнитной энергии $B^2(x, y, z)/(2\mu)$ для равновесия плазмы (8.1) при $y = 0$, $z = 0$ и $a_1 = -1$, $\beta = 0.1$, $\gamma = \sqrt{5/2}$, $\mu = 0.1$. Рис. 10 показывает линии уровня $B^2(x, y, 0) = \text{const}$, $z = 0$. Магнитная энергия сконцентрирована около оси z и очень быстро стремится к нулю при $r \rightarrow \infty$. Это свойство означает, что вышеуказанное точное решение моделирует сильно сконцентрированную астрофизическую струю в сопутствующей системе отсчета. Наблюдаемый вид струи определяется ее синхротронным излучением, которое пропорционально B^2 [35]. Поэтому детектируемая форма струи приблизительно совпадает с некоторой поверхностью $B^2(x, y, z) = \text{const}$. Поверхности $B^2 = \text{const}$ получаются из кривых на рис. 10 с помощью винтовых преобразований. Из рис. 7 и рис. 10 с очевидностью следует, что магнитные поверхности $\psi = \text{const}$ и поверхности $B^2 = \text{const}$ являются различными.

Рис. 11 показывает давление плазмы $p(x, y, z) = p_1 - 2\beta^2\psi^2/\mu$ при $y = z = 0$, $p_1 = 1, 2$ для равновесия плазмы (8.1). Графики на рис. 9 и 11, очевидно, являются асимметричными по отношению к $x = 0$.

ПРИМЕР 5. При $N = 2$ неравенство $2N > 2n + m$ имеет четыре целых решения $m = 1, n = 0$; $m = 1, n = 1$; $m = 2, n = 0$ и $m = 3, n = 0$. Для $m = 1, n = 0$ мы находим из формул (7.28): $c_1 = 1/6$, $\alpha\gamma = 7/6$, $\beta = 1/(12\gamma^2)$. Поэтому $k_2 = -3/2$ и многочлен $B_{02}(x)$ (7.31) есть $1 - 5x + 2x^2$. Точное решение (7.30) имеет эквивалентный вид

$$(8.2) \quad \psi(r, z, \phi) = e^{-\beta r^2} (1 - 10\beta r^2 + 8\beta^2 r^4 + a_1 r \cos(z/\gamma - \phi)).$$

Рис. 11. Давление плазмы $p(x, 0, 0)$ для винтовой модели астрофизических струй

Сечение $z = 0$ магнитных поверхностей $\psi(r, z, \phi) = \text{const}$ показано на рис. 12 для $a_1 = -1.5$, $\beta = 0.1$, $\gamma = \sqrt{5/6}$. Функция магнитного потока $\psi(r, 0, \phi)$ (8.2) достигает своего локального максимума в двух точках $r = 4.8625$, $\phi = \pi$ и $r = 0.6940$, $\phi = \pi$ и своего минимума при $r = 2.2361$, $\phi = 0$. Поэтому имеются четыре инвариантные области в $\mathbb{R}^3$ заполненные цилиндрическими магнитными поверхностями: одна внешняя область и три внутренние области. Соответствующие три магнитные оси образуют *тройную спираль*, которая изображена на рис. 13. Кривые на рис. 7 и рис. 12 симметричны по отношению к отражению $y \rightarrow -y$.

§9. Квазипериодичность магнитных силовых линий

В координатах r, z, ϕ магнитные поверхности $\psi(r, u) = h = \text{const}$ являются вращающимися винтовыми цилиндрами C_h , см. рис. 7. Сечения $S_k : z = 2\pi\gamma k$ цилиндра C_h являются одинаковыми для всех целых чисел k в силу периодичности $z \rightarrow z + 2\pi\gamma$ функции магнитного потока (7.30). Поэтому последовательные пересечения магнитных силовых линий на C_h с кривыми S_0 и S_1 определяют преобразование вращения $T_h : S_0 \rightarrow S_0 = S_1$. Для подходящего углового параметра $s = s \bmod 1$ на замкнутой кривой S_0 отображение T_h есть $T_h(s) = s + \theta_0(h)$. Для общих h число вращения $\theta_0(h)$ является иррациональным. Поэтому общие магнитные силовые линии являются квазипериодическими в переменных r, z, ϕ .

Мы докажем это общее свойство для тонких эллиптических цилиндров C_h , враща-

Рис. 12. Магнитные поверхности для равновесия плазмы (8.2) при $z = 0$

Рис. 13. Тройная спираль магнитных осей

ющихся вокруг их магнитных осей. Пусть некоторое точное решение (7.30) достигает своего локального максимума (или минимума) в некоторой точке (r_0, u_0) : $\psi(r_0, u_0) = \psi_0$. Критическая точка (r_0, u_0) определяет магнитную ось M_0 : $r = r_0, z - \gamma\phi = u_0$. Во втором приближении имеем

$$\psi(r_0 + \delta r, u_0 + \delta u) \approx \psi_0 + a(\delta r)^2 + b(\delta u)^2 + 2c\delta r\delta u,$$

где $2a = \psi_{rr}(r_0, u_0)$, $2b = \psi_{uu}(r_0, u_0)$, $2c = \psi_{ru}(r_0, u_0)$. Для точек (r_0, u_0) максимума или минимума мы имеем $\psi_{rr}\psi_{uu} - \psi_{ru}^2 \geq 0$. В малой окрестности спирали M_0 магнитные поверхности $\psi(r, u) = \text{const}$ являются тонкими эллиптическими цилиндрами C_h , вращающимися вокруг M_0 .

Вычислим число вращения θ_0 для кривых S_0 при $h \ll 1$. Кривая S_0 аппроксимируется эллипсом

$$a(\delta r)^2 + b(\delta u)^2 + 2c\delta r\delta u = h^2$$

с параметризацией

$$\delta r = \kappa h \sin(2\pi s), \quad \delta u = -c\kappa h \sin(2\pi s)/b + h \cos(2\pi s)/\sqrt{b},$$

где $\kappa = \sqrt{b}/\sqrt{ab - c^2}$ и $\delta u = -\gamma\delta\phi$. Магнитное поле (7.7) определяет уравнения для магнитных силовых линий

$$(9.1) \quad \dot{r} = \frac{\psi_u}{r}, \quad \dot{z} = \frac{\alpha\gamma\psi - r\psi_r}{r^2 + \gamma^2}, \quad \dot{\phi} = \frac{\alpha r\psi + \gamma\psi_r}{r(r^2 + \gamma^2)}.$$

На магнитной оси M_0 мы имеем $z(t) = \alpha\gamma\psi_0 t/(r^2 + \gamma^2) + z_0$. Поэтому сдвиг по z на период $2\pi\gamma$ происходит при $t = t_0 = 2\pi(r_0^2 + \gamma^2)/(\alpha\psi_0)$. Из уравнений (9.1) следуют уравнения для вариаций

$$r_0(\delta r)' = 2b\delta u + 2c\delta r, \quad r_0(\delta u)' = -2a\delta r - 2c\delta u.$$

Их решения имеют вид

$$\delta r(t) = \kappa h \sin(\omega t + 2\pi s), \quad \delta u(t) = -c\kappa h \sin(\omega t + 2\pi s)/b + h \cos(\omega t + 2\pi s)/\sqrt{b},$$

где $\omega = 2\sqrt{ab - c^2}/r_0$. При $t = t_0$ мы получаем преобразование вращения $T(s) = s + t_0\sqrt{ab - c^2}/(\pi r_0)$. Поэтому число вращения есть

$$(9.2) \quad \theta_0 = \frac{(r_0^2 + \gamma^2)\sqrt{\psi_{rr}\psi_{uu} - \psi_{ru}^2}}{\alpha r_0 \psi_0}.$$

В общем положении число вращения θ_0 (9.2) иррационально и зависит от малого параметра h . Поэтому общие магнитные силовые линии являются квазипериодическими в переменных r, z, ϕ . Из этого свойства следует, что характер вращения магнитных силовых линий друг вокруг друга *изменяется* в направлении оси z для выведенных глобальных равновесий плазмы (7.30) и не повторяется.

§ 10. Винтовые равновесия плазмы, зависящие от $2K + 1$ параметров

I. Для вывода равновесий плазмы, зависящих от более чем трех параметров, достаточно найти более чем два целочисленных решения алгебраических уравнений (7.15) и (7.23) с данными постоянными $\alpha\gamma$ и c_1 . Из первой формулы (7.28) следует, что параметр $c_1 = 2\beta\gamma^2$ должен быть рациональным, $c_1 = p/q$. Исключая $\alpha\gamma = \sqrt{c_1^2 + 4Nc_1}$ из уравнений (7.15) и (7.23), мы получаем диофантово уравнение [39]

$$(10.1) \quad 4pN = qm^2 + 2pt + 4pn.$$

В общем случае уравнение (10.1) для заданных N, p, q имеет несколько целочисленных решений m, n . Беря линейную комбинацию соответствующих функций магнитного потока $\psi_N(r)$ (7.24) и $\psi_{mn}(r, u)$ (7.20), мы получаем новое точное решение линейного уравнения (7.10). Мы представим эту конструкцию в явном виде для $c_1 = 1/(2l)$, где l есть произвольное нечетное число.

ТЕОРЕМА 3. *Цилиндрически-симметричные равновесия плазмы (7.24), (7.27) при $\beta = 1/(4l\gamma^2)$ содержатся в $(2K + 1)$ -мерных линейных пространствах глобальных равновесий плазмы, которые обладают винтовой симметрией с параметром γ . Здесь $K = [(\sqrt{8lN + 1} - 1)/(2l)]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $p = 1, q = 2l$ уравнение (10.1) принимает вид

$$(10.2) \quad 2N = lm^2 + m + 2n.$$

Очевидно, что это диофантово уравнение имеет $K + 1$ пару целочисленных решений

$$m = 0, 1, 2, \dots, K, \quad n = N - \frac{m(lm + 1)}{2}, \quad K = \left[\frac{\sqrt{8lN + 1} - 1}{2l} \right].$$

Коэффициенты k_N (7.26) и k_{mn} (7.29) имеют вид

$$(10.3) \quad k_N = \frac{1 - \sqrt{8lN + 1}}{2N}, \quad k_{mn} = \frac{2lm + 1 - \sqrt{8lN + 1}}{2n}.$$

Беря линейную комбинацию точных решений $\psi_N(r)$ (7.24) и $\psi_{mn}(r, u)$ (7.20) при $1 \leq m \leq K$, мы получаем, что функция магнитного потока

$$(10.4) \quad \psi = e^{-\beta r^2} \left(a_N B_{0N}(x) + \sum_{m=1}^K r^m B_{mn}(x) (a_{mn} \cos(mu/\gamma) + b_{mn} \sin(mu/\gamma)) \right)$$

удовлетворяет уравнению ДжФКО (7.5) и линейно зависит от $2K + 1$ произвольных параметров a_N, a_{mn}, b_{mn} . Соответствующие магнитное поле $\mathbf{B}$ (7.7), ток $\mathbf{J}$ (7.8) и давление $p = p_1 - 2\beta^2 \psi^2 / \mu$ являются гладкими и ограниченными во всем евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$. Функция $\psi(r, u)$ (10.4) имеет главный член $(-2\beta)^N a_N \exp(-\beta r^2) r^{2N}$ при $r \rightarrow \infty$. Поэтому асимптотически при $r \gg 1$, все магнитные поверхности $\psi(r, u) = \text{const}$ являются цилиндрами $r = \text{const}$, и магнитное поле $\mathbf{B}$ и ток $\mathbf{J}$ убывают при $r \rightarrow \infty$ так же быстро, как $c_N \exp(-\beta r^2) r^{2N}$, и $p \rightarrow p_1$. Поэтому функции магнитного потока $\psi(r, u)$ (10.4) определяют глобальные равновесия плазмы, удовлетворяющие вышеуказанным физическим условиям а), б) и в).

Рис. 14. Асимметричные магнитные поверхности при $x = 0$ для равновесия плазмы (10.5)

ПРИМЕР 6. Применим предыдущую конструкцию при $l = 1$, $\beta = 1/(4\gamma^2)$. При $N = 0$ функция магнитного потока (10.4) принимает гауссов вид (7.21). При $N = 1$ и $N = 2$ уравнение (10.2) имеет только две пары целочисленных решений; поэтому функция магнитного потока (10.4) имеет вид (7.30). При $N = 3$ диофантово уравнение (10.2) имеет три пары целочисленных решений $m = 0, n = 3$, $m = 1, n = 2$ и $m = 2, n = 0$. Из формул (10.3) следует $k_3 = -2/3$, $k_{12} = -1/2$. Поэтому многочлен $B_{03}(x)$ (7.31) имеет вид $1 - 5x + 7x^2/2 - x^3/2$ и многочлен $B_{12}(x)$ есть $-3 + 9x/2 - x^2$. Функция магнитного потока (10.4) принимает эквивалентный вид

$$(10.5) \quad \begin{aligned} \psi = e^{-\beta r^2} & (1 - 10\beta r^2 + 14\beta^2 r^4 - 4\beta^3 r^6 \\ & + a_1 r(-3 + 9\beta r^2 - 4\beta^2 r^4) \cos(z/\gamma - \phi) \\ & + r^2(a_2 \cos(2z/\gamma - 2\phi) + b_2 \sin(2z/\gamma - 2\phi))). \end{aligned}$$

Рис. 14 показывает сечение $z = 0$ магнитных поверхностей $\psi(r, z, \phi) = \text{const}$ при $a_1 = 2/5$, $a_2 = -1/15$, $b_2 = 1/30$, $\beta = 0.1$ и $\gamma = \sqrt{5}/2$. Функция $\psi(r, 0, \phi)$ (10.5) имеет два локальных максимума и три локальных минимума, которые определяют пять винтовых магнитных осей. Распределение кривых на рис. 14, очевидно, не обладает никакой симметрией, в то время как кривые на рис. 7 и 12 являются симметричными по отношению к отображению $y \rightarrow -y$. Общие равновесия плазмы (10.4) не имеют никаких дополнительных симметрий.

II. Другой класс точных равновесий плазмы существует при $\beta = p/(4\gamma^2)$, где p – нечетное число. Тогда $c_1 = p/2$ и диофантово уравнение (10.1) принимает вид

$$2pN = m^2 + pm + 2pn.$$

Это уравнение имеет $K + 1$ пару целочисленных решений

$$m = 0, p, 2p, \dots, Kp, \quad K = \left\lfloor \frac{\sqrt{8N/p+1}-1}{2} \right\rfloor, \quad n = N - \frac{m(m+p)}{2p}.$$

Коэффициенты k_N (7.26) и k_{mn} (7.29) суть

$$k_N = \frac{1 - \sqrt{8N/p+1}}{2N}, \quad k_{mn} = \frac{2m/p+1 - \sqrt{8N/p+1}}{2n}.$$

Аналогично, соответствующие точные решения уравнения ДжФКО (7.5) имеют вид (10.6)

$$\psi = e^{-\beta r^2} \left(a_n B_{0N}(x) + \sum_{j=1}^K r^{jp} B_{jp,n}(x) (a_{jp,n} \cos(jpu/\gamma) + b_{jp,n} \sin(jpu/\gamma)) \right).$$

Эти функции магнитного потока определяют глобальные равновесия плазмы, которые линейно зависят от $2K + 1$ произвольных параметров $a_N, a_{jp,n}, b_{jp,n}$. Отметим, что параметр m здесь является кратным нечетного числа p : $m = p, 2p, \dots, Kp$. Следовательно, эти равновесия плазмы имеют дополнительные симметрии, так как они являются периодическими по переменной z с периодом $2\pi\gamma/p$ и по переменной ϕ с периодом $2\pi/p$.

III. Выведенные точные равновесия плазмы зависят от параметра $c_1 = 2\beta\gamma^2$ довольно экзотическим образом. Для любого c_1 и любого целого числа N существуют цилиндрически симметричные равновесия плазмы (7.24), (7.27). Для иррациональных c_1 эти равновесия не имеют точных равновесных возмущений с винтовой симметрией. Для любого рационального числа $c_1 = p/q$ мы получаем из уравнения (10.1):

$$n = N - \frac{m(qm + 2p)}{4p}.$$

Это выражение является целым числом, только если $m = rp$, где r является целым, поскольку p и q взаимно просты. Максимально возможное целое m , удовлетворяющее уравнению (10.1), есть

$$L = \left\lfloor \frac{p}{q} \left(\sqrt{\frac{4qN}{p} + 1} - 1 \right) \right\rfloor < 2\sqrt{\frac{pN}{q}}.$$

Поэтому число K целочисленных пар (m, n) , удовлетворяющих уравнению (10.1), есть

$$(10.7) \quad K \leq \frac{L}{p} < 2\sqrt{\frac{N}{pq}}.$$

Следовательно, цилиндрически-симметричные равновесия (7.24), (7.27) для заданных рационального $c_1 = p/q$ и целого N не имеют точных равновесных возмущений с винтовой симметрией (7.30), если $pq > 4N$.

Если рациональное число p/q является хорошей аппроксимацией некоторого иррационального c_1 , то оба p и q являются большими, и поэтому из неравенства (10.7) следует, что диофантово уравнение (10.1) не имеет целочисленных решений.

Для рациональных чисел $c_1 = 1/(2l)$ и $c_1 = p/2$ с нечетными l и p равновесия (7.24), (7.27) имеют точные равновесные возмущения с винтовой симметрией, которые зависят от $2K + 1$ параметров, где $K \approx \sqrt{2N/l}$ и $K \approx \sqrt{2N/p}$ соответственно.

§ 11. Контрпримеры к теореме Паркера, обладающие винтовой симметрией

I. Точное решение (7.24) определяет магнитное поле (7.7):

$$\mathbf{B}_N(r) = \frac{\alpha\gamma\psi_N - r\psi'_N}{r^2 + \gamma^2} \hat{\mathbf{e}}_z + \frac{\alpha r\psi_N + \gamma\psi'_N}{r^2 + \gamma^2} \hat{\mathbf{e}}_\phi,$$

которое является ненулевым всюду в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$. Действительно, предполагая выполненным равенство $\mathbf{B}_N(r_0) = 0$, мы получаем $\psi_N(r_0) = \psi'_N(r_0) = 0$, следовательно, $B_{0N}(x_0) = B'_{0N}(x_0) = 0$, что невозможно, так как все корни многочлена $B_{0N}(x)$ являются простыми. Отсюда для любого R и всех $r \leq R$ мы получаем $|\mathbf{B}_N(r)| \geq a_N B(R) > 0$.

Пусть $\mathbf{B}_{Nmn}(r, u)$ есть магнитное поле, определенное функцией магнитного потока $\psi_{Nmn}(r, u)$ (7.30) и $A_N = (|a_{mn}| + |b_{mn}|)/|a_N|$. Внутри любой области $0 \leq r \leq R$ мы имеем

$$(11.1) \quad \frac{|\mathbf{B}_{Nmn} - \mathbf{B}_N|}{|\mathbf{B}_N|} < A_N \frac{C(R)}{B(R)},$$

где $C(R)$ – некоторая гладкая функция. При $r \rightarrow \infty$ справедлива асимптотика

$$(11.2) \quad \frac{|\psi_{Nmn} - \psi_N|}{|\psi_N|} < A_N (2\beta)^{n-N} \frac{2C_{Nmn}}{r^{2N-2n-m}}, \quad C_{Nmn} = \frac{(1 - nk_{mn})N!}{(1 - Nk_N)n!}.$$

Из неравенства $2N > 2n + m$ следует, что $|\psi_{Nmn} - \psi_N|/|\psi_N| \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Отсюда при $A_N \ll 1$ мы получаем $|\mathbf{B}_{Nmn} - \mathbf{B}_N|/|\mathbf{B}_N| \ll 1$ всюду в $\mathbb{R}^3$.

Пусть x_N есть максимальный корень многочлена $B_{0N}(x)$. При $x > x_N$ мы имеем

$$|B_{0N}(x)| > \frac{1 - Nk_N}{N!} (x - x_N)^N, \quad |B_{mn}(x)| < \frac{1 - nk_{mn}}{n!} x^n.$$

Отсюда мы находим

$$\frac{|\psi_{Nmn} - \psi_N|}{|\psi_N|} < A_N C_{Nmn} \frac{r^m x^n}{(x - x_N)^N}.$$

Следовательно, при $x > N^{2\kappa+1} x_N$, $2\kappa = \frac{|2 \log C_{Nmn} - m \log(2\beta)|}{(2N - 2n - m) \log N}$, мы получаем

$$\frac{|\psi_{Nmn} - \psi_N|}{|\psi_N|} < A_N.$$

Такое же неравенство справедливо для магнитного поля. Таким образом, при $A_N \ll 1$ возмущения (7.30) могут быть значительными только при $x < N^{2\kappa+1} x_N$. Подставляя $x = 2\beta l^2$, мы находим для характерного масштаба длины l возмущений (7.30) по переменной r :

$$l \leq N^\kappa \sqrt{\frac{N x_N}{2\beta}}.$$

Неравенства (11.1), (11.2) означают, что равновесия плазмы (7.30) при $A_N \ll 1$ являются малыми возмущениями z -инвариантного равновесия (7.24) во всем евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$. Отсюда мы получаем, что условие Паркера, что “*локальное возмущение поля является малым по сравнению с полным полем*” [23; с. 361], выполнено всюду. Условие Паркера, что “*магнитное поле является аналитическим в его отклонении ε от инвариантного поля $B_i(x, y)$* ” [23; с. 378], выполнено, поскольку точные решения (7.30) являются линейными функциями малых параметров a_{mn}, b_{mn} . Условие Паркера, что длина потока L является “*большой сравнительно с характерным трансверсальным масштабом вариации l поля*” [23; с. 362], удовлетворено, поскольку $l \leq N^\kappa \sqrt{N x_N / (2\beta)}$ и длина трубки потока L может быть выбрана произвольно большой для z -инвариантного равновесия (7.30). Следовательно, $L \gg l$. Все возмущения (7.30) не являются z -инвариантными. Поэтому равновесия плазмы (7.30) являются контрпримерами к теореме Паркера.

Точные равновесия плазмы (10.4) и (10.6) доставляют семейства контрпримеров к теореме Паркера, которые зависят от $2K + 1$ произвольных параметров, где $K \geq 1$ – произвольное целое число.

§ 12. Заключение

В ч. I мы представили два семейства точных осесимметричных решений уравнений равновесия плазмы, см. формулы (2.15) и (5.1). В силу изоморфизма между уравнениями (1.1) и (1.2) семейство (2.15) описывает также глобальные равновесия идеальной несжимаемой жидкости в $\mathbb{R}^3$. Эти равновесные решения зависят от произвольного числа параметров, которые могут быть выбраны таким образом, что топология магнитного поля становится произвольно сложной. Поля определяются комбинациями вложенных цилиндрических магнитных поверхностей и вложенных тороидальных магнитных поверхностей. Общие решения в семействе (2.15) являются квазипериодическими по z , что означает, что магнитные силовые линии никогда не повторяются в z -направлении, однако могут иметь структуру, произвольно близкую к начальным данным. Их “*характер вращения*” меняется непрерывно вместе с z и не повторяется.

Равновесные решения (2.15), (5.1), (5.4) являются глобальными и всюду гладкими. Они не имеют разрывов и не имеют поверхностных токов. Эти решения моделируют разнообразные магнитные явления, которые наблюдались в астрофизических струях (в сопутствующей системе отсчета) и в солнечной корональной плазме. Квазипериодическое поведение, которое является эргодическим по z , доставляет наилучшее возможное аналитическое описание пространственного распределения магнитного поля и электрического тока в астрофизических струях.

Каждое из этих семейств, (2.15) и (5.4), образует контрпримеры к теореме Паркера, которая была сформулирована более 25 лет назад и была отправной точкой боль-

шого числа работ, опубликованных за это время. Наиболее недавней работой, которая использует теорему Паркера существенным образом, является статья [48] 1996 года.

В части II мы представили точные равновесия плазмы (7.30) с винтовой симметрией, которые удовлетворяют уравнению ДжФКО (7.5). Решения (7.30) описывают также глобальные магнитогидродинамические равновесия (1.5) для параллельных векторных полей $\mathbf{B} = \lambda \mathbf{V}$, $\lambda \neq \sqrt{\rho\mu}$. Магнитные поля определяются комбинациями вложенных и винтовым образом вращающихся цилиндрических магнитных поверхностей. Для равновесий (7.30) общие магнитные силовые линии являются квазипериодическими по z , что означает, что магнитные силовые линии никогда не повторяются в z -направлении, но могут иметь структуру, произвольно близкую к начальным данным. Их *“характер вращения”* непрерывно изменяется вместе с переменной z и не повторяется.

Равновесные решения (7.24), (7.30) являются глобальными и всюду гладкими. Они не имеют разрывов и не имеют слоев тока. Эти решения моделируют различные магнитные явления, которые наблюдались в токамаках (внешние и внутренние кинк-моды), в астрофизических струях (струя в эллиптической галактике Вирго А или Мессьер 87) и в солнечных протуберанцах.

Полученные точные равновесия плазмы (7.30), (10.4) и (10.6) образуют контрпримеры к теореме Паркера, обладающие винтовой симметрией.

Точные решения (10.4) и (10.6) для общего $r = r_0$ имеют вид рядов Фурье по переменной u . Поэтому эти решения при общих $r = r_0$ приближают любую гладкую функцию $\psi(r_0, u)$, которая является $2\pi\gamma$ -периодической по u для решений (10.4) и $2\pi\gamma/p$ -периодической по u для (10.6). Вследствие этого точные решения (10.4) и (10.6) описывают довольно общие глобальные равновесия плазмы, обладающие винтовой симметрией.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Bogoyavlenskij O. I. Astrophysical jets as exact plasma equilibria // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 84. P. 1914–1917.
- [2] Bogoyavlenskij O. I. Counterexamples to Parker's theorem // J. Math. Phys. 2000. V. 41. P. 2043–2057.
- [3] Bogoyavlenskij O. I. Exact helically symmetric plasma equilibria // Lett. Math. Phys. 2000 (to appear).
- [4] Grad H., Rubin H. Hydromagnetic equilibria and force-free fields // Proceedings of the Second United Nations International Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy. V. 31. Geneva: United Nations, 1958. P. 190–197.
- [5] Шафранов В. Д. О магнитогидродинамических равновесных конфигурациях // ЖЭТФ. 1958. Т. 6. С. 545–554.
- [6] Kruskal M. D., Kulsrud R. M. Equilibrium of a magnetically confined plasma in a toroid // Phys. Fluids. 1958. V. 1. P. 265–274.
- [7] Spitzer L. The stellarator concept // Phys. Fluids. 1958. V. 1. P. 253–264.
- [8] Chandrasekhar S. Axisymmetric magnetic fields and fluid motions // Astrophys. J. 1954. V. 124. P. 232–243.
- [9] Chandrasekhar S., Prendergast K. H. The equilibrium of magnetic stars // Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 1956. V. 42. P. 5–9.
- [10] Biskamp D. Nonlinear Magnetohydrodynamics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993.
- [11] Browning P. K. Magnetohydrodynamics in solar coronal and laboratory plasmas: a comparative study // Phys. Rep. 1988. V. 169. P. 329–384.
- [12] Freidberg J. F. Ideal Magnetohydrodynamics. New York: Plenum Press, 1987.

- [13] Кадомцев Б. Б. Равновесия плазмы с винтовой симметрией // ЖЭТФ. 1960. Т. 10. С. 962–963.
- [14] Соловьев Л. С. Теория гидродинамической устойчивости тороидальных плазменных конфигураций // ЖЭТФ. 1968. Т. 26. С. 400–407.
- [15] Herrnegger F. On the equilibrium and stability of the belt pinch // Proceedings of V European Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics. V. I. Grenoble, 1972. P. 26.
- [16] Luc H., Maschke E. K., Touche J. Tokamak equilibria with high β poloidal // Proceedings of V European Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics. V. I. Grenoble, 1972. P. 23.
- [17] Maschke E. K. Exact solutions of the MHD equilibrium equation for a toroidal plasma // Plasma Phys. 1973. V. 15. P. 535–541.
- [18] Lundquist S. Studies in magneto-hydrodynamics // Ark. Fys. 1952. V. 5. P. 297–347.
- [19] Proudman J. On the motion of solids in a liquid possessing vorticity // Proc. Roy. Soc. London. 1916. V. 92. P. 408–424.
- [20] Taylor G. I. Motion of solids in fluids when the flow is not irrotational // Proc. Roy. Soc. London. 1917. V. 93. P. 99–113.
- [21] Taylor G. I. Experiments with rotating fluids // Proc. Roy. Soc. London. 1922. V. 100. P. 114–121.
- [22] Parker E. N. Topological dissipation and the small-scale fields in turbulent gases // Astrophys. J. 1972. V. 174. P. 499–510.
- [23] Parker E. N. Cosmical Magnetic Fields. Oxford: Clarendon Press, 1979.
- [24] Parker E. N. Spontaneous Current Sheets in Magnetic Fields. Oxford: Oxford Univ. Press, 1994.
- [25] Massaglia S., Bodo G. (Eds.) Astrophysical Jets. Open Problems. Amsterdam: Gordon and Breach, 1998.
- [26] Hardy G. H., Wright E. M. An Introduction to the Theory of Numbers. Oxford: Clarendon Press, 1998.
- [27] Захаров В. Е., Шабат А. Б. Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной самомодуляции волн в нелинейных средах // ЖЭТФ. 1972. Т. 34. С. 62–69.
- [28] Ablowitz M. J., Kaup D. J., Newell A. C., Segur H. Method for solving the sine-Gordon equation // Phys. Rev. Lett. 1973. V. 30. P. 1262–1264.
- [29] Bogoyavlenskij O. I. Extended integrability and bi-Hamiltonian systems // Comm. Math. Phys. 1998. V. 196. P. 19–51.
- [30] Goeler S., Stodiek W., Sauthoff N. Studies of internal disruptions and $m = 1$ oscillations in tokamak discharges with soft-X-ray techniques // Phys. Rev. Lett. 1974. V. 33. P. 1201–1203.
- [31] Кадомцев Б. Б., Погутце О. П. Нелинейные винтовые возмущения плазмы в токамаке // ЖЭТФ. 1974. Т. 38. С. 283–290.
- [32] Schank D. D., Garamana E. J., Nebel R. A. Three-dimensional magnetohydrodynamic studies of the reversed-field pinch // Phys. Fluids. 1985. V. 28. P. 321–333.
- [33] Ferrari A. Modeling extragalactic jets // Annual Rev. Astron. Astroph. 1998. V. 36. P. 539–598.
- [34] Blandford R. D., Payne D. G. Hydromagnetic flows from accretion discs and the production of radio jets // Monthly Notices Roy. Astronom. Soc. 1982. V. 199. P. 883–903.
- [35] Burbidge G. R. On synchrotron radiation from Messier 87 // Astrophys. J. 1956. V. 124. P. 416–429.
- [36] Hines D. C., Owen F. N., Eilek J. A. Filaments in the radiolobes of M87 // Astrophys. J. 1989. V. 347. P. 713–726.
- [37] Russell C. T., Priest E. R., Lee L. C. (Eds.) Physics of Magnetic Flux Ropes. Washington, DC: Amer. Geophys. Union, 1990.
- [38] Johnson J. L., Oberman C. R., Kulsrud R. M., Frieman E. A. Some stable hydromagnetic equilibria // Phys. Fluids. 1958. V. 1. P. 281–296.
- [39] Mordell L. J. Diophantine Equations. London: Academic Press, 1969.
- [40] Low B. C. Exact static equilibrium of vertically oriented magnetic flux tubes // Solar Phys. 1980. V. 67. P. 57–77.

- [41] Tsinganos K. Magnetohydrodynamic equilibrium. IV. Nonequilibrium of nonsymmetric hydrodynamic topologies // *Astrophys. J.* 1982. V. 259. P. 832–843.
- [42] Yu G. Hydrostatic equilibrium of hydromagnetic fields // *Astrophys. J.* 1973. V. 181. P. 1003–1008.
- [43] Low B. C. On magnetostatic equilibrium in a stratified atmosphere // *Solar Phys.* 1980. V. 65. P. 147–165.
- [44] Rosner R., Knobloch E. On perturbations of magnetic field configurations // *Astrophys. J.* 1982. V. 262. P. 349–357.
- [45] Tsinganos K. C., Distler J., Rosner R. On the topological stability of magnetostatic equilibria // *Astrophys. J.* 1984. V. 278. P. 409–419.
- [46] Vainstein S. I., Parker E. N. Magnetic nonequilibrium and current sheet formation // *Astrophys. J.* 1986. V. 304. P. 821–827.
- [47] Villata M., Tsinganos K. Exact solutions for helical magnetohydrodynamics equilibria // *Phys. Fluids B.* 1993. V. 5. P. 2153–2164.
- [48] Low B. C. The spontaneous formation of current-sheets in astrophysical magnetic fields // *Solar and Astrophysical Magnetohydrodynamic Flows*. Dordrecht: Kluwer, 1996. P. 109–131.
- [49] Van Ballegooijen A. A. Electric currents in the solar corona and the existence of magnetostatic equilibrium // *Astroph. J.* 1985. V. 298. P. 421–430.
- [50] Van Ballegooijen A. A. Cascade of magnetic energy as a mechanism of coronal heating // *Astroph. J.* 1986. V. 311. P. 1001–1014.
- [51] Bragg S. L., Hawthorne W. R. Some exact solutions of the flow through annular cascade actuator discs // *J. Aeronaut. Sci.* 1950. V. 17. P. 243–249.
- [52] Krat V. A., Osherovich V. A. On the excited states of magnetic configurations in connection with the characteristic properties of sunspots // *Solar Phys.* 1976. V. 50. P. 65–68.
- [53] Osherovich V. A. A new magneto-hydrostatic theory of sunspots // *Solar Phys.* 1982. V. 77. P. 63–68.
- [54] Osherovich V. A., Lawrence J. K. Elaboration of the new magnetohydrostatic sunspot theory (double return flux model) // *Solar Phys.* 1983. V. 88. P. 117–135.
- [55] Szego G. *Orthogonal Polynomials*. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1967.
- [56] Courant R., Hilbert D. *Methods of Mathematical Physics*. New York: Interscience Publishers, 1953.
- [57] Abramowitz M., Stegun I. A. *Handbook of Mathematical Functions with formulas, graphs and mathematical tables*. Washington, D. C.: U. S. Department of Commerce, National Bureau of Standards, 1964.
- [58] Ribenboim P. *Algebraic Numbers*. New York: Wiley-Interscience, 1972.
- [59] Чандрасекхаран К. *Арифметические функции*. М.: Наука, 1975.
- [60] Apostol T. M. *Introduction to Analytic Number Theory*. New York: Springer-Verlag, 1976.