Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Д. Иоффе, Метрическая регулярность и субдифференциальное исчисление,
УМН, 2000, том 55, выпуск 3, 103–162

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm292>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 16:10:14

УДК 517

Памяти Лазаря Ароновича Люстерника в год его столетия

МЕТРИЧЕСКАЯ РЕГУЛЯРНОСТЬ И СУБДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

А. Д. ИОФФЕ

Теория метрической регулярности представляет собой обобщение классических теорем Люстерника о касательном пространстве и Грейвса о накрывании. С развитием негладкого анализа в 80–90 годы обнаружились возможности далеко идущих обобщений этих результатов на произвольные многозначные отображения и, более того, была понята метрическая природа стоящих за ними явлений, не связанная ни с какими линейными структурами. Одновременно выяснилось, что базовые гипотезы в основных теоремах субдифференциального исчисления тесно связаны с метрической регулярностью некоторых специальных многозначных отображений. В обзоре излагается метрическая теория метрической регулярности и ее взаимосвязи с исчислением субдифференциалов в банаховых пространствах.

Библиография: 97 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	104
Глава 1. Метрическая теория	108
§ 1. Терминология, обозначения, определения. Теоремы об эквивалентности	108
§ 2. Общие и локальные критерии регулярности	115
§ 3. Приложения и обобщения	121
§ 4. Комментарии	130
Глава 2. Субдифференциалы	134
§ 1. Определения и примеры субдифференциалов	134
§ 2. Базовые теоремы субдифференциального исчисления	140
Глава 3. Субдифференциальное исчисление и локальная регулярность ..	145
§ 1. Субдифференциальные критерии локальной метрической регулярности	145
§ 2. Регулярность в точке и исчисление субдифференциалов нелипшицевых функций	152
§ 3. Комментарии	157
Список литературы	159

Введение

Понятие метрической регулярности (многозначных) отображений возникло в конце 70-х годов на заре развития той области анализа, за которой впоследствии закрепилось название “негладкий анализ” и развитие которой стимулировалось, прежде всего, потребностями теории экстремальных задач. Однако истоки этого понятия следует искать в классических теоремах дифференциального исчисления и линейного анализа.

Первой среди них следует, несомненно, указать теорему Банаха–Шаудера об открытом отображении, схожие доказательства которой были даны в знаменитом трактате Банаха [9], увидевшем свет в 1931 г. и в 1932 г. переведенном на французский язык, и в появившейся чуть раньше заметке Шаудера [92]. Две эквивалентные формулировки теоремы Банаха–Шаудера важны для понимания дальнейшего.

Пусть X и Y – банаховы пространства и $A: X \mapsto Y$ – линейный ограниченный оператор, отображающий X на все Y . Тогда

(а) существует $N > 0$ такое, что

$$(0.1) \quad B_Y \subset A(NB_X),$$

т.е. единичный шар в пространстве Y накрывается образом шара радиуса N в X ;

(б) существует $K > 0$ такое, что для всяких (x, y)

$$(0.2) \quad d(x, A^{-1}(y)) \leq K \|y - Ax\|,$$

где $A^{-1}(y)$ – прообраз элемента y при отображении A .

Нетрудно проверить, что нижняя грань тех N , при которых (0.1) верно, и минимум тех K , при которых верно (0.2), совпадают и равны в точности $\|(A^*)^{-1}\|$ – норме оператора, обратного к сопряженному.

Основной принцип гладкого нелинейного анализа состоит в том, что всякое свойство производной должно в малом выполняться для самого отображения. Применительно к теореме Банаха–Шаудера этот принцип был реализован в двух ставших уже классическими теоремах: теореме Люстерника о касательном пространстве (1934 г.) [72] и теореме Грейвса о накрывании, доказанной в 1950 г. [43]. Каждая из этих теорем связана с одной из приведенных выше двух интерпретаций теоремы Банаха. Стандартная формулировка теоремы Люстерника – это утверждение о том, что касательное пространство к множеству $\bar{y}$ -уровня непрерывно дифференцируемого отображения $F: X \mapsto Y$ в точке $\bar{x}$, в которой $F(\bar{x}) = \bar{y}$ и выполнено условие регулярности, или условие Люстерника, $\text{Im } F'(\bar{x}) = Y$, совпадает с $\text{Ker } F'(\bar{x})$. Между тем, доказательство Люстерника содержит несколько более точное утверждение, именно, что существует такое $K > 0$, что

$$(0.3) \quad d(x, F^{-1}(\bar{y})) \leq K d(\bar{y}, F(x))$$

для всех $x \in \text{Ker } F'(\bar{x}) + \bar{x}$, достаточно близких к $\bar{x}$.

На самом деле, доказательство Люстерника можно легко модифицировать с тем, чтобы обеспечить выполнение неравенства (0.3) для всех x из окрестности $\bar{x}$.¹

¹На это обстоятельство А. А. Милютин обращал внимание в личных беседах, как мне помнится, еще в конце 60-х годов.

Непосредственной целью Люстерника в [72] было доказательство правила множителей Лагранжа в абстрактной задаче об условном экстремуме:

минимизировать $f(x)$ при условии $F(x) = 0$.

В общем случае теорема о неявной функции, служившая главным инструментом доказательства конечномерного правила множителей Лагранжа и уравнения Эйлера–Лагранжа в изопериметрической задаче и задаче Лагранжа в классическом вариационном исчислении, уже не работает (из-за возможного отсутствия топологического дополнения у $\text{Ker } F'(\bar{x})$). Условие регулярности Люстерника $\text{Im } F'(x) = Y$ было первым общим (не привязанным к конкретной структуре оператора F) условием регулярности ограничения (constraint qualification condition – как подобные условия стали называться после знаменитой работы Куна и Таккера, появившейся в 1948 г.). В этом смысле работу Люстерника следует считать предвестником общей теории экстремальных задач, толчок к развитию которой был дан появлением принципа максимума Понтрягина и последующими исследованиями Дубовицкого–Милютина и Ньютеда.

Общепринятая формулировка теоремы Грейвса состоит в том, что если отображение $F: X \mapsto Y$ непрерывно дифференцируемо в точке $\bar{x}$ и удовлетворяет условию регулярности $\text{Im } F'(x) = Y$, то существует $m > 0$ такое, что при всех достаточно малых $t > 0$ F -образ шара радиуса t с центром в $\bar{x}$ содержит шар радиуса mt с центром в $\bar{y}$. Между тем, основной результат Грейвса, долгое время остававшийся без внимания,² содержит более сильное утверждение, именно, что если F – *непрерывное* отображение и существуют линейный оператор $A: X \mapsto Y$, $m > 0$ и $\delta > 0$ такие, что $m\delta < 1$, A удовлетворяет (0.1) с $N = m^{-1}$ и

$$(0.4) \quad \|F(x) - F(x') - A(x - x')\| \leq \delta \|x - x'\|$$

при всех x, x' , достаточно близких к $\bar{x}$, то уравнение $F(x) = y$ имеет решение x с $\|x - \bar{x}\| \leq t$, если $\|y - F(\bar{x})\| < t(m - \delta)$ и t достаточно мало. Много позже, в начале 70-х годов, Иоффе и Тихомиров доказали в [56], что в условиях теоремы Грейвса справедлива оценка (0.3) для всех x , достаточно близких к $\bar{x}$, с $K = (m - \delta)^{-1}$.

Очевидно, если условия теоремы Грейвса выполнены в некоторой точке $\bar{x}$, то они выполнены и во всех достаточно близких к ней точках. Поэтому в условиях теоремы Грейвса справедлива оценка

$$(0.5) \quad d(x, F^{-1}(y)) \leq K d(y, F(x))$$

для всех (x, y) , достаточно близких к $(\bar{x}, \bar{y})$.

Это и есть то свойство, которое сейчас называется *метрической регулярностью* отображения F в окрестности точки $\bar{x}$.

Теорема Грейвса замечательна тем, что в ней не требуется дифференцируемости отображения F , и в этом смысле она надолго опередила свое время. Условие (0.4) включает в себя и случай строгой дифференцируемости (явно рассмотренный лишь в 1974 г. [82]), когда в правой части (0.4) δ является не константой, а функцией, зависящей от x, x' таким образом, что $\delta \rightarrow 0$ при $x, x' \rightarrow \bar{x}$. (Формальное определение понятия строгой дифференцируемости было дано лишь через 10 лет после появления статьи Грейвса, см. [68].) Заметим, наконец, что доказательства Люстерника и

²вплоть до недавней статьи Дончева [28].

Грейвса, равно как и банаховское доказательство теоремы об открытом отображении, используют близкие итеративные процедуры.

Таким образом, как итог “классического” этапа, можно сформулировать общий результат, который естественно назвать ТЕОРЕМОЙ ЛЮСТЕРНИКА–ГРЕЙВСА: *если X, Y – банаховы пространства, $F: X \mapsto Y$ строго дифференцируемо в точке $\bar{x}$ и $\text{Im } F'(\bar{x}) = Y$, то существует $K > 0$ такое, что*

- (а) $B(F(x), t) \subset F(B(x, Kt))$ при x , достаточно близких к $\bar{x}$, и малых $t > 0$;
- (б) $d(x, F^{-1}(y)) \leq K d(y, F(x))$ при (x, y) , достаточно близких к $(\bar{x}, F(\bar{x}))$.

При этом нижняя грань тех K , при которых выполняются (а) и (б), равна $\|[(F'(x))^]^{-1}\|$.*

Теорема Банаха–Шаудера об открытом отображении является немедленным следствием теоремы Люстерника–Грейвса. Наоборот, ни теорема Люстерника, ни теорема Грейвса из теоремы Банаха–Шаудера не следуют и требуют независимых доказательств (хотя и Люстерник, и Грейвс используют теорему Банаха–Шаудера в своих рассуждениях). Как Люстерник, так и Грейвс отмечают далее, что и теорема о неявной функции вытекает из доказанных ими теорем и, значит, из сформулированной выше теоремы Люстерника–Грейвса. Учитывая это обстоятельство и важные приложения, выходящие за рамки теоремы о неявной функции, прежде всего, в теории оптимизации, можно квалифицировать теорему Люстерника–Грейвса как центральную теорему (гладкого) нелинейного анализа.

Следующий этап характеризуется возрастающим интересом к исследованию объектов более сложных, чем всюду определенные отображения и системы уравнений, таких как системы уравнений и неравенств, определенных как на всем пространстве, так и на более специальных множествах, скажем, конусах и т. д. Его начало следует, по-видимому, датировать 1952 г., когда появилась статья Хоффмана [44] с оценками расстояний до множества решений систем равенств и неравенств в конечномерных пространствах. Среди последующих результатов центральное место, несомненно, занимают теорема Робинсона–Урсеску [88], [95], обобщающая теорему Банаха на выпуклые многозначные отображения (см. теорему 4 в первой главе), и следующее обобщение теоремы Люстерника–Грейвса, полученное Робинсоном [89]. Пусть $C \subset X$ – выпуклое множество, отображение $G: X \mapsto Y$ строго дифференцируемо в точке $\bar{x} \in C$, $K \subset Y$ – выпуклый замкнутый конус и $0 \in G(\bar{x}) + K$. Рассмотрим многозначное отображение

$$F(x) = \begin{cases} G(x) + K, & \text{если } x \in C; \\ \emptyset, & \text{если } x \notin C, \end{cases}$$

и предположим, что

$$(0.6) \quad 0 \in \text{int}(G(\bar{x}) + G'(\bar{x})(C - \bar{x}) + K).$$

Тогда найдутся окрестность U точки $\bar{x}$, окрестность V нуля в Y такие, что

- (а) включение $y \in F(x)$ имеет решение, принадлежащее U ;
- (б) найдется $K > 0$ такое, что неравенство (0.5) выполняется для всех $x \in U, y \in V$.³

³Робинсон доказал на первый взгляд несколько более общее утверждение, которое может быть истолковано как вариант теоремы о неявной функции. На самом деле, приведенный выше результат и теорема, доказанная Робинсоном в [89], эквивалентны в том смысле, что они являются следствиями друг друга.

Теоремы Робинсона–Урсеску и Робинсона были первыми ориентированными на приложения обобщениями фундаментальных результатов анализа на многозначные отображения. Это был прорыв, имевший большое психологическое значение и во многом определивший направление и стиль дальнейших исследований. Вместе с тем, обе теоремы следует отнести к миру классического анализа, ибо их формулировки и используемый в доказательствах аппарат не выходят за пределы классического дифференциального исчисления и линейного анализа. Для нарождавшегося в то время негладкого анализа эти рамки скоро стали весьма стеснительными.

В обзоре обсуждаются некоторые итоги “пост-классического” этапа исследований, связанных с метрической регулярностью и ее приложениями. Если попытаться сформулировать их в самой общей форме, то, как мне представляется, главным следует признать понимание

- А) метрической природы явления, не связанной с какой-либо линейной структурой,
- Б) эквивалентности свойств метрической регулярности и накрытия и их связи с липшицевыми свойствами многозначных отображений и
- В) центральной роли метрической регулярности в негладком анализе, подобной роли теоремы Люстерника–Грейвса в “гладком” анализе, и в некотором смысле еще более значительной, ибо в отличие от классического дифференциального исчисления основные теоремы субдифференциального исчисления (как-то: теоремы о субдифференциале суммы или композиции функций) требуют дополнительных квалификационных условий, которые всегда оказываются связанными с метрической регулярностью подходящих многозначных отображений (см. гл. 3).

Переход (от линейных нормированных) к метрическим пространствам, в свою очередь, привел к пониманию того существенного обстоятельства, что с точки зрения теории регулярности нет никакой разницы между многозначными и однозначными отображениями в том смысле, что проблема регулярности или накрытия для всякого многозначного отображения сводится к соответствующей проблеме для некоторого непрерывного однозначного отображения (см. предложение 3 в первой главе). Это обстоятельство было осознано довольно давно, но заблуждение относительно большей общности многозначной теории все еще широко распространено. Однако с чисто методологической точки зрения рассмотрение именно многозначных отображений представляет определенные удобства, прежде всего из-за (формально) большей общности формулировок. Поэтому в обзоре, в основном, используется язык многозначных отображений.

Небезынтересно отметить в связи со сказанным, что похожая эволюция к метрическим пространствам и непрерывным функциям от дифференцируемых многообразий и гладких функций уже в 90-е годы произошла с вариационным исчислением в целом и, в особенности, в теории Люстерника–Шнирельмана и ее более поздними вариантами и обобщениями (см., например, [24], [62], [55]).

Статья состоит из трех глав. Первая посвящена метрической теории метрической регулярности, вторая – теории субдифференциала и третья – связи субдифференциального исчисления и метрической регулярности. Основное содержание статьи – это первая и третья главы. Вторая, содержащая сводку некоторых необходимых фактов из теории субдифференциала, играет связующую роль между ними.

В статье довольно много новых результатов и, видимо, еще больше новых формулировок и доказательств. В сущности, вся теория, изложенная в первой главе, является

новой. Ее главный итог состоит в том, что *теория* метрической регулярности и параллельная ей липшицева теория многозначных отображений ни в какой своей части, вообще говоря, не нуждаются в субдифференциалах, производных по направлениям, копроизводных и касательных конусах. На локальном уровне адекватный технический аппарат имеет в своей основе понятие сильного наклона, введенное в 1980 г. Де Джорджи, Марино и Тоскесом [26]. Сильный наклон и более универсален, чем перечисленные объекты локального нелинейного анализа (он имеет смысл в любом метрическом пространстве), и, в принципе, проще вычисляется, и, главное, позволяет получить “равномерно” лучшие оценки, из которых известные оценки и критерии получаются без труда. Вместе с тем *в приложениях* (например, для необходимых условий в задачах оптимизации с ограничениями) достаточные субдифференциальные критерии метрической регулярности и накрывания чрезвычайно важны.

Большинство результатов в первой и третьей главах приводятся с полными доказательствами. Главы 1 и 3 заканчиваются параграфом “Комментарии”, где я старался по возможности точнее описать взаимодействие основных результатов и идей.

Это оказалось весьма нелегкой задачей, так как в потоке работ на обсуждаемые темы зачастую непросто установить взаимосвязи и взаимовлияния, авторства и т. д., и я заранее приношу свои извинения за неизбежные неточности и пропуски (надеясь, что их на самом деле немного). Нумерация параграфов, предложений и формул в каждой главе автономна, а при перекрестных ссылках первым указывается номер главы, так что ссылка, скажем в третьей главе на теорему 1.3 (формулу (1.3)) – это ссылка на теорему 3 (формулу (3)) главы 1.

Мне не довелось быть лично знакомым с Л. А. Люстерником. Но среди самых ярких моих путеводных звезд я вне всякого сомнения должен упомянуть теорию Люстерника–Шнирельмана и теорему Люстерника–Грейвса. Настоящая статья – это дань моей благодарности Лазарю Ароновичу Люстернику.

Глава 1. Метрическая теория

§ 1. Терминология, обозначения, определения. Теоремы об эквивалентности

Основными объектами изучения в статье являются многозначные отображения и функции со значениями в расширенной области вещественных чисел.

Пусть X и Y – метрические пространства и F – многозначное отображение из X в Y . (В дальнейшем мы часто пользуемся обозначением $F: X \rightrightarrows Y$.) Это значит, что всякому $x \in X$ сопоставлено некоторое, возможно пустое, подмножество $F(x)$ пространства Y . В дальнейшем, если не оговорено противное, мы считаем многозначные отображения замкнутозначными (т.е. полагаем множества $F(x)$ замкнутыми).

Множества

$$\operatorname{dom} F = \{x : F(x) \neq \emptyset\} \quad \text{и} \quad \operatorname{Im} F = \bigcup_x F(x)$$

называются соответственно *областью определения* и *образом* отображения F . Отображение F называется *несобственным*, если $\operatorname{dom} F = \emptyset$ или $F(x) \equiv Y$ на $\operatorname{dom} F$. Если отображение не является несобственным, то оно называется *собственным*.

Многозначное отображение часто отождествляется со своим графиком:

$$\text{Gr } F = \{(x, y) \in X \times Y : y \in F(x)\}.$$

Поэтому многозначное отображение, чей график есть замыкание графика F , естественно называть *замыканием* отображения F и обозначать $\text{cl } F$. Если $F = \text{cl } F$, то говорят, что F *замкнуто*.

Обратное к F определяется естественным образом:

$$F^{-1}(y) = \{x \in X : y \in F(x)\}.$$

Ясно, что $\text{dom } F^{-1} = \text{Im } F$.

Пусть теперь $f(x)$ — функция на X со значениями в расширенной области вещественных чисел $\mathbb{R} = [-\infty, \infty]$. С каждой такой функцией мы связываем многозначное отображение

$$x \mapsto \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \geq f(x)\}.$$

График этого многозначного отображения называется *эпиграфом* функции f :

$$\text{epi } f = \{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R} : \alpha \geq f(x)\}.$$

Соответственно определяется

$$\text{dom } f = \{x \in X : |f(x)| < \infty\},$$

и функция называется *собственной*, если $\text{dom } f \neq \emptyset$ и функция не принимает значения $-\infty$ ни в одной точке.

Для обозначения расстояния мы будем пользоваться символом $d(\cdot, \cdot)$ независимо от того, о каком пространстве идет речь. Надеемся, что это не приведет к недоразумениям. В произведении пространств $X \times Y$ мы обычно рассматриваем аддитивную метрику $d((x, y), (u, v)) = d(x, u) + d(y, v)$ или более общую α -метрику ($\alpha > 0$)

$$d_\alpha((x, y), (u, v)) = d(x, u) + \alpha d(y, v).$$

Мы также принимаем соглашения:

$$\inf \emptyset = \infty, \quad d(x, \emptyset) = \infty.$$

Замкнутый шар радиуса r с центром в точке x будет обозначаться $B(x, r)$, а открытый — $B^\circ(x, r)$; в случае нормированного линейного пространства B_X , или просто B , — единичный шар.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть V — некоторое подмножество $X \times Y$. Скажем, что многозначное отображение F *метрически регулярно* на V , если существует $K > 0$ такое, что

$$(1) \quad (x, y) \in V \implies d(x, F^{-1}(y)) \leq K d(y, F(x)).$$

Наименьшее K , при котором выполняется (1), называется *нормой* (метрической) регулярности многозначного отображения F на V . Мы будем обозначать норму метрической регулярности F на V через $\text{Reg}_V F$.

Особый интерес во многих приложениях представляет локальная версия свойства метрической регулярности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 (loc). F метрически регулярно *вблизи точки* $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{Gr } F$, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что F метрически регулярно на множестве $V = B(\bar{x}, \varepsilon) \times B(\bar{y}, \varepsilon)$, иначе говоря, если неравенство (1) выполняется для всех (x, y) таких, что $d(x, \bar{x}) \leq \varepsilon, d(y, \bar{y}) \leq \varepsilon$.

Нижняя грань всех таких K называется *нормой* (метрической) регулярности многозначного отображения F вблизи $(\bar{x}, \bar{y})$. Норму метрической регулярности F вблизи (x, y) мы в дальнейшем обозначаем $\text{Reg } F(\bar{x}, \bar{y})$ ($\text{Reg } F(\bar{x})$, если отображение однозначно).

Полезно иметь в виду, что локальная метрическая регулярность может быть эквивалентно определена с помощью более узких множеств.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Многозначное отображение метрически регулярно вблизи $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{Gr } F$ тогда и только тогда, когда при некотором $\varepsilon > 0$ оно метрически регулярно на множестве $V = \{(x, y) \in B(\bar{x}, \varepsilon) \times B(\bar{y}, \varepsilon) : d(y, F(x)) \leq \varepsilon\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В одну сторону утверждение очевидно. Предположим, что F метрически регулярно на V . Выберем $\delta > 0$ столь малым, что $(K + 1)\delta < \varepsilon$. Пусть теперь $d(x, \bar{x}) \leq \delta, d(y, \bar{y}) \leq \delta$. Если при этом $d(y, F(x)) \leq \varepsilon$, то $d(x, F^{-1}(y)) \leq d(y, F(x))$ по предположению. Если же $d(y, F(x)) \geq \varepsilon$, то, поскольку $d(y, F(\bar{x})) \leq d(y, \bar{y}) < \varepsilon$,

$$\begin{aligned} d(x, F^{-1}(y)) &\leq d(\bar{x}, F^{-1}(y)) + d(x, \bar{x}) \leq Kd(y, F(\bar{x})) + d(x, \bar{x}) \\ &\leq Kd(y, \bar{y}) + d(x, \bar{x}) \leq \varepsilon \leq d(y, F(x)), \end{aligned}$$

что и требовалось.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Часто именно последнее свойство принимается за определение локальной регулярности. И хотя, как мы видим, нет нужды в априорном требовании выполнения неравенства $d(y, F(x)) \leq \varepsilon$, оно во многих случаях оказывается весьма удобным.

Смысл введенных определений весьма прозрачен: в случае, когда F однозначное отображение, они попросту означают, что расстояние от x до поверхности y -уровня отображения F контролируется нормой отклонения $F(x)$ от y .

В дальнейшем, говоря о регулярности, мы обычно будем опускать эпитет “метрическая”, ибо никаких других типов регулярности в нашем обзоре рассматриваться не будет. Если V имеет вид $P \times Y$ или $X \times Q$, где $P \subset X, Q \subset Y$, то мы будем говорить о регулярности на P или Q и, следовательно, вовсе не будем упоминать V , если оно совпадает со всем пространством $X \times Y$. Наконец, если F однозначно и непрерывно на $\text{dom } F$, то мы будем говорить о регулярности F в окрестности $\bar{x}$, а не вблизи $(\bar{x}, \bar{y})$.

С каждым многозначным отображением F мы связываем два семейства многозначных отображений:

$$\begin{aligned} F_t(x) &= \{y : d(y, F(x)) < t\}; \\ F^t(x) &= F(B(x, t)) = \bigcup_{d(u, x) \leq t} F(u). \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Скажем, что F *линейно накрывает* на V , если существует $K > 0$ такое, что

$$(2) \quad (x, y) \in V, \quad v \in F(x) \ \& \ d(y, v) < t \implies \exists u: d(u, x) \leq Kt \ \& \ y \in F(u).$$

Наименьшее K , при котором (2) верно, назовем *нормой накрывания* отображения F на V , а обратную к ней величину – *константой накрывания*. Мы будем обозначать константу накрывания на V символом $\text{Sur}_V F$.

Если $V = P \times Q$, где $P \subset X$, $Q \subset Y$, то линейное накрывание на V попросту означает, что t -окрестность множества $F(x) \cap Q$ содержится в образе Kt -окрестности x для всякого $x \in P$.

Локальная версия определения вводится очевидным образом: F линейно накрывает *вблизи* $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{Gr } F$, если (2) выполняется для всех (x, y) таких, что $d(x, \bar{x}) \leq \varepsilon$, $d(y, \bar{y}) \leq \varepsilon$. Подобно тому, как это было показано в предложении 1, можно проверить, что в определении локального накрывания достаточно ограничиться лишь v , удовлетворяющими $d(v, \bar{y}) \leq \varepsilon$.

Нижняя грань всех K , при которых это условие выполняется, называется *нормой накрывания вблизи* $(\bar{x}, \bar{y})$ (на V), а обратная ей величина, которую мы будем обозначать $\text{Sur } F(\bar{x}, \bar{y})$, – *константой накрывания вблизи* $(\bar{x}, \bar{y})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $W \in X \times Y$. Скажем, что F *псевдо-липшицево* на W , если существует $K > 0$ такое, что

$$(3) \quad (x, y) \in W \ \& \ y \in F(u) \implies d(y, F(x)) \leq Kd(x, u).$$

Наименьшее K , при котором (3) верно, называется *псевдо-липшицевой нормой* отображения F на W . Определение (3) можно эквивалентно записать в виде соотношения

$$t > Kd(x, u) \implies F(u) \cap W_x \subset F_t(x),$$

где $W_x = \{y : (x, y) \in W\}$. В случае, когда $W = S \times Y$, $S \subset X$, мы получаем обычное условие Липшица для многозначных отображений.

Если $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{Gr } F$ и существуют такие $K > 0$, $\varepsilon > 0$, что (3) выполняется для всех $(x, y) \in W = B(\bar{x}, \varepsilon) \times B(\bar{y}, \varepsilon)$, то мы скажем, что F псевдо-липшицево *вблизи* $(\bar{x}, \bar{y})$. В случае, когда Y – линейное нормированное пространство, это означает, что

$$F(u) \cap B(\bar{y}, \varepsilon) \subset F(x) + Kd(x, u)B,$$

если $d(x, \bar{x}) < \varepsilon$, $d(u, \bar{x}) \leq \varepsilon$.

Нижнюю грань всех таких K назовем *псевдо-липшицевой нормой* отображения F вблизи $(\bar{x}, \bar{y})$.

Хотя введенные выше количественные оценки регулярности, накрывания и псевдо-липшицевости зависят от конкретных метрик, сами свойства являются метрическими и при переходе к эквивалентным метрикам не возникают и не исчезают.

Следующее предложение показывает, что во всех трех определениях мы, в сущности, говорим об одном и том же явлении. (Поэтому, в частности, нет нужды в специальном обозначении для псевдо-липшицевой нормы.)

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Следующие утверждения эквивалентны:

- (а) F регулярно на V ;
- (б) F линейно накрывает на V ;
- (с) F^{-1} псевдо-липшицево на $W = V^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in V\}$.

При этом соответствующие нормы регулярности и накрывания F и псевдо-липшицева норма F^{-1} равны, т.е., в частности, $\text{Reg}_V F \cdot \text{Sur}_V F = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность (а) и (с) тривиально следует из того, что неравенство (3), примененное к F^{-1} , в точности совпадает с (1) (поскольку в (3) нет никаких дополнительных ограничений на u).

(а) $\Rightarrow$ (б). Предположим, что (1) выполнено с некоторым K . Пусть $(x, y) \in V$, $v \in F(x)$ и $d(y, v) < t$. В силу (1) $d(x, F^{-1}(y)) \leq Kd(y, v) < Kt$. Но это означает, что $d(x, u) < Kt$ для некоторого $u \in F^{-1}(y)$ (т.е. такого, что $y \in F(u)$).

(б) $\Rightarrow$ (а). Предположим, что (2) выполнено с некоторым $K > 0$. Пусть $(x, y) \in V$ и $d(y, F(x)) = \xi$. Берем произвольное $t > \xi$. В силу (2) существует $u \in X$ такой, что $d(x, u) < Kt$ и $y \in F(u)$. Это значит, что $d(x, F^{-1}(y)) \leq Kt = K(d(y, F(x)) + t - \xi)$. Последнее верно для всяких $t > \xi$, и поэтому $d(x, F^{-1}(y)) \leq Kd(y, F(x))$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Согласно определению 2 (линейное) накрывание означает, что открытая t -окрестность точки v накрывается образом замкнутой Kt -окрестности точки x . Из доказательства предложения 2 следует, что метрическая регулярность эквивалентна свойству, которое можно определить как "открытое накрывание", именно, что открытая t -окрестность v накрывается образом открытого шара радиуса Kt с центром в X . Разумеется, это свойство эквивалентно линейному накрыванию в смысле определения 2.

По аналогии можно рассмотреть и свойство "замкнутого накрывания", когда замкнутая t -окрестность точки v накрывается образом замкнутого шара радиуса Kt с центром в x . Очевидно, замкнутое накрывание влечет линейное накрывание в смысле определения 2 и, значит, открытое накрывание.

Возвращаясь к доказательству предложения 2, мы можем заметить, что его незначительная модификация позволяет сделать вывод, что метрическая регулярность влечет также и замкнутое накрывание, если для всяких $(x, y) \in V$ в $F(x)$ существует элемент, реализующий расстояние от y до $F(x)$ (т.е., в частности, когда F компактнозначно). В этом случае доказательство предложения 1 позволяет сделать вывод об эквивалентности регулярности и замкнутого накрывания и, как следствие, об эквивалентности всех трех типов накрывания.

Следующий вопрос, который мы намерены обсудить в этом пункте, касается взаимосвязи свойств метрической регулярности многозначных и однозначных отображений. Итак, пусть F и V те же, что и раньше, а $\Pi_Y: \text{Gr } F \mapsto Y$ — декартова проекция (т.е. $\Pi_Y((x, y)) = y$). Подчеркнем, что мы рассматриваем ее только на графике отображения F . Рассмотрим множество $W = \{(x, v, y) : (x, v) \in \text{Gr } F, (x, y) \in V\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Следующие условия эквивалентны:

- (а) F регулярно (накрывает) на V с нормой, не превосходящей K ;
- (б) Π_Y регулярно (накрывает) на W с нормой, не превосходящей $K + \alpha$, если $\text{Gr } F$ рассматривается с α -метрикой.

Иначе говоря, исследование свойства регулярности или накрывания для многозначного отображения F всегда можно свести к исследованию соответствующего

свойства для простого непрерывного однозначного отображения – проекции графика F на Y .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы проверим импликацию (a) $\Rightarrow$ (b) для регулярности, а противоположную импликацию для накрывания.

(a) $\Rightarrow$ (b). Пусть $(x, v) \in \text{Gr } F$, $(x, y) \in V$, т.е. $(x, v, y) \in W$, и $d(y, v) < t$. Коль скоро F регулярно на V , найдется $u \in X$ такое, что $y \in F(u)$ и $d(u, x) < Kt$. Но это означает, что $\text{П}_Y(u, y) = y$ и $d_\alpha((x, v), (u, y)) = d(x, u) + \alpha d(y, v) \leq (K + \alpha)t$, откуда следует (b).

(b) $\Rightarrow$ (a). Пусть $(x, y) \in V$ и $d(y, F(x)) = \tau$. Возьмем произвольно $t > \tau$ и найдем $v \in F(x)$ с $d(x, v) < t$. По определению $(x, v, y) \in W$. Так как П_Y линейно накрывает на W , то для всякого N , большего нормы накрывания, найдется $(u, w) \in \text{Gr } F$ такой, что $y = \text{П}_Y(u, w)$, т.е. $y = w$, и $Nt \geq d((x, v), (u, w)) = d(x, u) + \alpha d(v, y)$. Отсюда следует, что $d(x, u) \leq Nt - \alpha\tau = (N - \alpha(\tau/t))t$. Поскольку это верно для всякого $t > \tau$, мы получаем, что F накрывает на V с нормой, не большей $N - \alpha$.

Для локальной регулярности существует еще одно удобное эквивалентное описание. Скажем, что F *граф-регулярно* на V с нормой, не большей K , если

$$d(x, F^{-1}(y)) \leq d_K((x, y), \text{Gr } F) \quad \text{для всех } (x, y) \in V.$$

Граф-регулярность *вблизи* $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{Gr } F$ определяется очевидным образом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. (a) *Граф-регулярность на V с нормой, не большей K , влечет регулярность на V с нормой, не большей K .*

(b) *Регулярность вблизи $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{Gr } F$ влечет граф-регулярность вблизи $(\bar{x}, \bar{y})$ с той же нормой.*

Таким образом, локальные регулярность и граф-регулярность эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (a). Пусть $(x, y) \in V$. Имеем для любого $(u, v) \in \text{Gr } F$

$$d(x, F^{-1}(y)) \leq d(x, u) + Kd(y, F(u)),$$

так что для доказательства достаточно положить $u = x$.

(b). Предположим, что неравенство регулярности (1) выполняется для всех x и y из ε -окрестностей $\bar{x}$ и $\bar{y}$ соответственно. Выберем $\delta > 0$ столь малым, что для всяких (x, y) с $d(x, \bar{x}) < \delta$, $d(y, \bar{y}) < \delta$

$$d_K((x, y), \text{Gr } F) = \inf \{ d_K((x, y), (u, v)) : d(u, \bar{x}) \leq \varepsilon, d(v, \bar{y}) \leq \varepsilon, v \in F(u) \}.$$

Ясно, что такой выбор возможен, поскольку $\bar{y} \in F(\bar{x})$. Имеем для всяких $(u, v) \in \text{Gr } F$ с $d(u, \bar{x}) \leq \varepsilon$, $d(v, \bar{y}) \leq \varepsilon$ и (x, y) , достаточно близких к $(\bar{x}, \bar{y})$:

$$\begin{aligned} d(x, F^{-1}(y)) &\leq d(u, x) + d(u, F^{-1}(y)) \leq d(u, x) + Kd(y, F(u)) \\ &\leq d(u, x) + Kd(y, v) = d_K((x, y), (u, v)). \end{aligned}$$

Сравнивая последнее неравенство с предшествующим равенством, если $d(x, \bar{x}) < \delta$, $d(y, \bar{y}) < \delta$, получаем требуемое.

Наконец, прежде чем переходить к рассмотрению критериев регулярности, мы обсудим вопрос о естественных предположениях относительно собственно пространств X и Y . Как правило, для доказательства критериев необходимы те или иные предположения о полноте пространств. Наиболее часто встречающиеся гипотезы – полнота лишь одного X или полнота графика F . (Отметим, что и в теореме Банаха об открытом отображении, и в теореме Люстерника–Грейвса оба пространства изначально предполагались полными.) Следующее предложение проясняет ситуацию.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть X и Y – метрические пространства, $F: X \rightrightarrows Y$ – замкнутое многозначное отображение и $V \subset X \times Y$. Пусть $\hat{X}, \hat{Y}, \hat{F}: \hat{X} \rightrightarrows \hat{Y}$ и $\hat{V} \subset \hat{X} \times \hat{Y}$ соответственно пополнение X , пополнение Y , многозначное отображение, график которого получается замыканием $\text{Gr } F$ в $\hat{X} \times \hat{Y}$, и замыкание V в $\hat{X} \times \hat{Y}$. Предположим, наконец, что $\text{Gr } F \subset V$ и выполнено следующее условие согласования F и V :

если $(x_n, v_n) \in \text{Gr } F$, $(x_n, v_n) \rightarrow (\hat{x}, \hat{y}) \in \text{Gr } \hat{F}$ и $(\hat{x}, \hat{y}) \in \hat{V}$,
то найдутся $y_n \in Y$ такие, что $(x_n, y_n) \in V$, $y_n \rightarrow \hat{y}$.

В этих предположениях в каждом из нижеследующих двух случаев $\hat{F}$ накрывает на $\hat{V}$ тогда и только тогда, когда F накрывает на V , и константы накрывания $\hat{F}$ и F совпадают:

- (а) $\text{Gr } F$ полон;
- (б) X – полное пространство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В обоих случаях ясно, что F накрывает на V , если $\hat{F}$ накрывает на $\hat{V}$. Заметим далее, что случай (а) сводится к (б) в силу предложения 3. Поэтому достаточно рассмотреть только случай (б).

Итак, пусть F накрывает на V с нормой, не большей K . Пусть $(\hat{x}, \hat{y}) \in \text{Gr } \hat{F}$ и $(\hat{x}, \hat{y}) \in \hat{V}$. В силу условия согласованности, найдется последовательность троек $(x_n, y_n, v_n) \rightarrow (\hat{x}, \hat{y}, \hat{v})$ такая, что $(x_n, v_n) \in \text{Gr } F$ и $(x_n, y_n) \in V$. Фиксируем $t > d(\hat{y}, \hat{v})$. Тогда $t > d(y_n, v_n) + 2^{-n}$ при достаточно больших n . Если F накрывает на V с нормой, не большей K , то найдутся $u_n \in X$ такие, что

$$y_n \in F(u_n) \text{ \& } d(x_n, u_n) \leq K(d(y_n, v_n) + 2^{-2n}).$$

Положим $\beta_n = d(x_n, \hat{x}) \rightarrow 0$. Переходя при необходимости к подпоследовательности, мы можем считать без ограничения общности, что $\sum d(y_{n+1}, y_n) < \infty$. Тогда

$$\alpha_n = \sum_{m=n}^{\infty} d(y_{m+1}, y_m) \rightarrow 0.$$

По условию $(u_n, y_n) \in V$. Поэтому для всякого n и всякого $i = 1, 2, \dots$ можно выбрать $u_{ni} \in X$ так, чтобы

$$y_{n+i} \in F(u_{ni}) \text{ \& } d(u_{n(i+1)}, u_{ni}) \leq K(d(y_{n+i+1}, y_{n+i}) + 2^{-2(n+i+1)}).$$

Очевидно, последовательность $\{u_{ni}\}_{i=1}^{\infty}$ фундаментальна. Следовательно, она сходится в $\hat{X}$ к некоторому $\hat{w}_n$. При этом $d(u_n, \hat{w}_n) \leq K(\alpha_n + 2^{-2n})$ и $\hat{y} \in \hat{F}(\hat{w}_n)$. Имеем при достаточно больших n

$$\begin{aligned} d(\hat{w}_n, \hat{x}) &\leq d(\hat{w}_n, x_n) + \beta_n \leq d(\hat{w}_n, u_n) + d(u_n, x_n) + \beta_n \\ &\leq K(d(y_n, v_n) + \alpha_n + 2^{-2(n-1)}) + \beta_n < Kt, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

§ 2. Общие и локальные критерии регулярности

Чтобы не отвлекаться на обсуждение второстепенных для понимания существа дела технических деталей, во всех формулировках и доказательствах этого параграфа мы предполагаем, не оговаривая этого специально, что *все участвующие в них метрические пространства полны*, хотя многие утверждения остаются верными и при несколько более слабых предположениях. Предложение 5 показывает, что наше предположение не слишком ограничительно. Обсуждение относящихся к этому вопросов вынесено в замечания и частично в комментарии.

Пусть f – собственная функция на X . Положим

$$M_0 = M_0(f) = \{x : f(x) \leq 0\}, \quad M_+ = M_+(f) = \{x : f(x) > 0\}.$$

ОСНОВНАЯ ЛЕММА. Пусть X – полное метрическое пространство и f полунепрерывная снизу собственная функция на X . Предположим, что существуют $\bar{x} \in \text{dom } f$, $K > 0$ и $r \in (0, \infty]$ такие, что $Kf(\bar{x}) < r$ и для всяких $t > K$, $x \in M_+ \cap B(\bar{x}, r)$ найдется $u \in X$, $u \neq x$, такое, что

$$f^+(u) \leq f(x) - t^{-1}d(x, u).$$

Тогда $M_0 \neq \emptyset$ и

$$d(x, M_0) \leq Kf^+(\bar{x})$$

(где $\alpha^+ = \max\{0, \alpha\}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $x \in M_0$, то доказывать нечего. Предположим, что $f(x) > 0$, положим $\varepsilon = f(\bar{x})$ и пусть $t > K$ таково, что $\varepsilon t < r$. Применяя принцип Экланда [33]⁴ к функции $f^+(x) = \max\{0, f(x)\}$ с $\lambda = \varepsilon t$, найдем $w \in X$ такое, что

$$(4) \quad d(x, w) \leq \lambda; \quad f^+(z) + (\varepsilon/\lambda)d(z, w) > f^+(w) \quad \forall z \neq w.$$

Если $f(w) > 0$, то (поскольку $w \in B(\bar{x}, r)$) по условию найдется $u \neq w$ такое, что $f(u) + t^{-1}d(u, w) \leq f(w)$, что в силу (4) невозможно. Поэтому $w \in M_0$ и, значит, $d(\bar{x}, M_0) \leq d(\bar{x}, w) \leq \lambda$ согласно первому неравенству в (4). Последнее неравенство верно для всякого $\lambda > \varepsilon K$, и, следовательно, $d(x, M_0) \leq K\varepsilon = Kf(x)$. Лемма доказана.

Вернемся к многозначному отображению F и рассмотрим функцию $f_y(x) = d(y, F(x))$. Это неотрицательная функция и ее множество нулевого уровня в точности равно $F^{-1}(y)$. Поэтому неравенство в основной лемме для этой функции сводится к неравенству регулярности в (1) для данного y . Это наблюдение нетрудно превратить в точное утверждение о регулярности отображения F .

⁴Если f полунепрерывная и ограниченная снизу функция на полном метрическом пространстве, то для всякого $\bar{x}$ с $f(\bar{x}) \leq \inf f + \varepsilon$ и всякого $\lambda > 0$ найдется $w \in X$, обладающее следующими тремя свойствами: $f(w) \leq f(\bar{x}) - (\varepsilon/\lambda)d(\bar{x}, w)$; $d(w, \bar{x}) \leq \lambda$ и $f(x) + (\varepsilon/\lambda)d(x, w) > f(w)$ для всякого $x \neq w$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $F: X \rightrightarrows Y$ – замкнутое многозначное отображение и V – замкнутое подмножество $X \times Y$, содержащее $\text{Gr } F$.

Для регулярности F на V необходимо и достаточно существование $m > 0$ и $\alpha > 0$ таких, что для всякой тройки (x, y, v) , удовлетворяющей соотношениям

$$(5) \quad (x, y) \in V, \quad y \neq v, \quad v \in F(x),$$

и всякого $m' < m$ найдется пара $(u, w) \neq (x, v)$ такая, что $w \in F(u)$ и

$$d(y, w) \leq d(y, v) - m'(d(u, x) + \alpha d(v, w)).$$

При этом норма регулярности F на V не превосходит $m^{-1} - \alpha$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы будем рассматривать $X \times Y$ вместе с α -метрикой. Рассмотрим функцию

$$(6) \quad \varphi_y(x, v) = \begin{cases} d(y, v), & \text{если } (x, y) \in V, v \in F(x); \\ \infty & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Она, очевидно, полунепрерывна снизу ввиду замкнутости графика F и V . Условие теоремы означает, что для всяких (x, v) и $m' < m$ найдется пара (u, w) такая, что

$$(7) \quad \varphi_y^+(u, w) = \varphi_y(u, w) \leq \varphi_y(x, v) - m'd_\alpha((x, v), (u, w)).$$

Имеем (поскольку $\text{Gr } F \subset V$)

$$M_0(\varphi_y) = \{(x, v) : (x, y) \in V, y = v \in F(x)\} = F^{-1}(y) \times \{y\}.$$

Поэтому $d_\alpha((x, v), M_0) = d(x, F^{-1}(y)) + \alpha d(y, v)$, и, применяя основную лемму с $r = \infty$, заключаем, что

$$d(x, F^{-1}(y)) \leq (m^{-1} - \alpha)d(y, v)$$

для всех (x, y, v) , удовлетворяющих (5). Последнее не накладывает никаких ограничений на v , дополнительных к $v \in F(x)$; поэтому предыдущее неравенство эквивалентно

$$d(x, F^{-1}(y)) \leq (m^{-1} - \alpha)d(y, F(x)),$$

а это в точности неравенство регулярности на V с нормой, не большей $m^{-1} - \alpha$. Теорема доказана.

Ниже мы приводим несколько вариантов теоремы 1, доказываемых аналогичным образом. Начнем с несколько более гибкого достаточного условия регулярности (которое, вообще говоря, может и не быть необходимым). Назовем функцию $\omega(x, v)$ *тест-функцией* для F , если ω полунепрерывна снизу, неотрицательна и $\omega(x, v) = 0$ тогда и только тогда, когда $v \in F(x)$.

ТЕОРЕМА 1а. Пусть F и V – те же, что и в условии теоремы 1, и $\omega(x, v)$ – тест-функция для F .

Если существуют $m > 0$, $\alpha > 0$ такие, что $m^{-1} > \alpha$ и для всяких $(x, y) \in V$, $y \neq v \in Y$, найдется пара $(u, w) \neq (x, v)$, для которой $(u, y) \in V$ и

$$d(u, w) + \omega(u, w) \leq d(y, v) + \omega(x, v) - md_\alpha((x, v), (u, w)),$$

то F регулярно на V с нормой, не превосходящей $m^{-1} - \alpha$.

В доказательстве этой теоремы следует в качестве $\varphi_y(x, v)$ взять функцию $d(y, v) + \omega(x, v) + \chi_V(x, v) + \chi_{\text{Gr } F}(x, v)$.

ТЕОРЕМА 1б. В дополнение к условиям теоремы 1 предположим, что для всякого $y \in Y$ функция $x \mapsto d(y, F(x))$ полунепрерывна снизу. Тогда для регулярности F на V необходимо и достаточно, чтобы для всяких $(x, y) \in V$, $y \notin F(x)$, нашелся $u \in X$ такой, что

$$(u, y) \in V \quad \& \quad d(y, F(u)) \leq d(y, F(x)) - td(x, u).$$

Доказательство и в данном случае аналогично доказательству теоремы 1 с той лишь разницей, что вместо функции $\varphi_y(x, v)$ можно рассматривать более простую функцию, зависящую только от x :

$$\psi_y(x) = \begin{cases} d(y, F(x)), & \text{если } (x, y) \in V; \\ \infty, & \text{если } (x, y) \notin V. \end{cases}$$

Теорема 1б, конечно, эквивалентна теореме 1 ввиду предложения 3.

Наконец, третья теорема такого типа содержит необходимое и достаточное условие граф-регулярности F на V .

ТЕОРЕМА 1в. В условиях теоремы 1 для граф-регулярности отображения F на V с нормой, не превосходящей K , необходимо и достаточно, чтобы для всяких $(x, y) \in V$, $t < 1$ существовало $u \in X$ такое, что

$$(u, y) \in V \quad \& \quad d_K((u, y), \text{Gr } F) \leq d_K((x, y), \text{Gr } F) - td(x, u).$$

Для доказательства этой теоремы надо рассмотреть функцию

$$\psi_y(x) = d_K((x, y), \text{Gr } F) + \chi_V(x, y).$$

При этом $M_0(\psi_y) = F^{-1}(y)$ и соответствующее эквивалентное условию теоремы соотношение, получающееся после применения основной леммы, в точности совпадает с граф-регулярностью F на V .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Принцип Экланда остается в силе, если полно не все пространство, а лишь некоторая его часть, содержащая $\text{dom } f$. Поэтому для справедливости теоремы 1 нужна лишь полнота $\text{Gr } F$, теоремы 1а и 1б остаются в силе, если V полно, а теорема 1б – когда X полно, а Y – произвольное метрическое пространство.

Для формулировки локальных результатов нам понадобится еще одно понятие, которое будет играть важную роль в дальнейшем изложении.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть f конечна в точке $x \in X$. Верхний предел отношения

$$\frac{(f(x) - f(u))^+}{d(x, u)},$$

когда $u \rightarrow x$, $f(u) \rightarrow f(x)$, называется (сильным) наклоном f в точке x и обозначается $|\nabla f|(x)$.

Например, если f — функция на линейном нормированном пространстве, дифференцируемая по Фреше в точке x , то $|\nabla f|(x)$ равен норме производной f в x .

ТЕОРЕМА 2. Пусть $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ и положительные числа m и r таковы, что $mr > d(\bar{y}, F(\bar{x}))$. Предположим, что для всяких $x \in B(\bar{x}, r)$, $y \in B(\bar{y}, r)$, $v \in B(\bar{y}, r)$, $y \neq v \in F(x)$ и всякого достаточно малого $\alpha > 0$ справедлива оценка

$$|\nabla \varphi_y|(x, v) \geq m,$$

где φ_y — функция, определенная равенством (6) $V = X \times Y$, и ее сильный наклон вычисляется в метрике d_α .

Тогда для всех $(x, y) \in B(\bar{x}, r) \times B(\bar{y}, r)$ таких, что $d(y, F(x)) < m(r - d(x, \bar{x}))$, справедливо неравенство

$$d(x, F^{-1}(y)) \leq m^{-1}d(y, F(x)).$$

Таким образом, если $(x, y) \in \text{Graph } F$, то F регулярно вблизи $(\bar{x}, \bar{y})$ с нормой, не превосходящей m^{-1} .

Более того, если Y — банахово пространство, то указанное условие является необходимым для регулярности F вблизи $(\bar{x}, \bar{y})$. Именно, если F регулярно вблизи $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{Graph } F$, с нормой, не превосходящей K , то для всех x из малой окрестности $\bar{x}$, $y \neq v \in F(x)$ из малой окрестности $\bar{y}$ и для всякого $\alpha > 0$ сильный наклон функции φ_y в точке (x, v) относительно метрики d_α удовлетворяет неравенству

$$|\nabla \varphi_y|(x, v) \geq (K + \alpha)^{-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При выполнении условия первой части теоремы, для всяких x, y, v удовлетворяющих условиям теоремы, всякого достаточно малого α и всякого $\gamma > 0$ найдется пара (u, w) , такая, что $w \in F(u)$ и

$$\frac{d(y, v) - d(y, w)}{d(u, x) + \alpha d(v, w)} \geq m - \gamma = m',$$

т.е.

$$d(y, w) \leq d(y, v) - m'(d(u, x) + \alpha d(v, w)).$$

Если при этом $d(y, F(x)) < (m' - \alpha)(r - d(x, \bar{x}))$, то, применяя основную лемму подобно тому, как это делалось в доказательстве теоремы 1 (но уже с конечным r), и принимая во внимание, что γ и α могут быть произвольно малыми, получаем требуемое неравенство. Если же $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{Graph } F$, то регулярность отображения F вблизи $(\bar{x}, \bar{y})$ следует теперь из предложения 1. Этим завершается доказательство первого утверждения теоремы.

Для доказательства второго возьмем x, y, v , достаточно близкие к $\bar{x}$ и $\bar{y}$ соответственно и такие, что $y \neq v \in F(x)$. Пусть $v_n = (1 - (1/n))v + (1/n)y$. Очевидно, $v_n \rightarrow v$. Согласно предложению 2 F покрывает вблизи $(\bar{x}, \bar{y})$ с нормой, не большей K . Поэтому для всякого n найдется u_n такой, что $v_n \in F(u_n)$ и $d(u_n, x) \leq K\|v_n - v\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Имеем $\|y - v\| = \|y - v_n\| + \|v - v_n\|$. Поэтому

$$\nabla\varphi_y(x, v) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_y(x, v) - \varphi_y(u_n, v_n)}{d(u_n, x) + \alpha\|v_n - v\|} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|v_n - v\|}{(K + \alpha)\|v_n - v\|} = (K + \alpha)^{-1}.$$

Теорема доказана.

Как и в случае общего критерия, можно получить критерии локальной регулярности, зачастую более удобные для конкретных вычислений, с помощью других функций. В частности, локальные варианты теорем 1а и 1б получаются лишь незначительным изменением доказательства теоремы 2. Сформулируем локальную версию теоремы 1б.

ТЕОРЕМА 2б. Пусть $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ и положительные числа K и r таковы, что $r > Kd(\bar{y}, F(\bar{x}))$. Предположим, что функции $x \mapsto \psi_y(x) = d(y, F(x))$ полунепрерывны снизу в окрестности $\bar{x}$ и для всех $x \in B(\bar{x}, r)$, $y \in B(\bar{y}, r)$ таких, что $y \notin F(x)$, справедлива оценка

$$|\nabla\psi_y|(x) > K^{-1}.$$

Тогда для всех $(x, y) \in B(\bar{x}, r) \times B(\bar{y}, r)$ таких, что $Kd(y, F(x)) < r - d(x, \bar{x})$, выполнено неравенство

$$d(x, F^{-1}(y)) \leq Kd(y, F(x)).$$

В частности, если $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{Graph } F$, то для регулярности F вблизи $(\bar{x}, \bar{y})$ с нормой K достаточно, а в случае, когда Y — банахово пространство, и необходимо, чтобы для всякого $t > K$ нашлась окрестность точки $(\bar{x}, \bar{y})$ такая, что $|\nabla\psi_y|(x) \geq t^{-1}$ для всех $(x, y) \notin \text{Graph } F$ из этой окрестности.

В заключение докажем локальный критерий, связанный с функцией расстояния до $\text{Gr } F$, т.е. локальную версию теоремы 1в. Эта версия однако и по формулировке, и по доказательству отличается от теоремы 2.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть $F: X \rightrightarrows Y$ и $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{Gr } F$. Для заданных K и $y \in Y$ определим функцию g_y^K на X равенством $g_y^K(x) = d_K((x, y), \text{Gr } F)$. Пусть далее для всякого $\varepsilon > 0$

$$U_\varepsilon = \{(x, y) : d((x, y), (\bar{x}, \bar{y})) < \varepsilon, y \notin \text{Gr } F\}.$$

Назовем предельным K -наклоном отображения F в точке $(\bar{x}, \bar{y})$ величину

$$|\nabla F|_K(\bar{x}, \bar{y}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_{(x, y) \in U_\varepsilon} |\nabla g_y^K|(x).$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $F: X \rightrightarrows Y$ — многозначное отображение с замкнутым графиком и $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{Gr } F$. Для регулярности F вблизи $(\bar{x}, \bar{y})$ с нормой, не превосходящей K , достаточно, а в случае, когда X и Y — банаховы пространства, и необходимо, чтобы

$$(8) \quad |\nabla F|_K(\bar{x}, \bar{y}) \geq 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $U_\varepsilon = \emptyset$, то по определению K -наклон F в $(\bar{x}, \bar{y})$ равен бесконечности. С другой стороны, по определению локального накрытия в этом случае F покрывает вблизи $(\bar{x}, \bar{y})$ с константой, большей любого наперед заданного числа, и, следовательно, в этом случае теорема верна. Поэтому в дальнейшем считаем, что $U_\varepsilon \neq \emptyset$ для всех ε .

Достаточность. Пусть (8) верно. Тогда для всякого $t > 1$ можно выбрать положительные γ и $\delta < \gamma/2$ так, чтобы

$$|\nabla g_y^K|(x) > t$$

для всех x и y из δ -окрестностей $\bar{x}$ и $\bar{y}$ соответственно и при этом $tg_y^K(x) < \gamma/2$. Выберем некоторые x и y из δ -окрестностей $\bar{x}$ и $\bar{y}$, для которых $g_y^K(x) > 0$. Применяя принцип Экланда с $\lambda = tg_y^K(x)$ и $\varepsilon = g_y^K(x)$ к g_y^K , найдем $w \in X$ такое, что

$$(9) \quad d(w, x) \leq tg_y^K(x), \quad \text{и} \quad g_y^K(u) + t^{-1}d(w, u) > g_y^K(w) \quad \forall u \neq w.$$

Очевидно, что $d(w, \bar{x}) < \gamma$ в силу выбора δ и t . Поэтому если $g_y^K(w) > 0$, то $|\nabla g_y^K|(w) \geq 1$, откуда следует, что в любой окрестности w найдется точка $u \neq w$ такая, что $g_y^K(u) \leq g_y^K(w) - t^{-1}d(w, u)$, что противоречит (9). Следовательно, $g_y^K(w) = 0$. Ясно, далее, что

$$M_0(g_y^K) = \{u : y \in F(u)\} = F^{-1}(y),$$

так что $d(x, F^{-1}(y)) \leq d(x, w) \leq td_K((x, y), \text{Gr } f)$. Коль скоро последнее неравенство верно для всякого $t > 1$, этим в силу предложения 4 завершается доказательство достаточности.

Необходимость. Предположим теперь, что X и Y банаховы пространства и F регулярно (и, значит, покрывает) вблизи $(\bar{x}, \bar{y})$ с нормой, не большей K . Возьмем снова $t > 1$ и выберем окрестность $(\bar{x}, \bar{y})$ таким образом, чтобы (0.5) выполнялось для всех точек этой окрестности с t вместо K . Пусть, наконец, (x, y) принадлежит выбранной окрестности $(\bar{x}, \bar{y})$ и $y \notin F(x)$, т.е., в частности, $d_K((x, y), \text{Gr } F) > 0$. Пусть, далее, $(x_n, y_n) \in \text{Gr } F$ таковы, что

$$\|x - x_n\| + K\|y - y_n\| = d_K((x, y), (x_n, y_n)) \leq d_K((x, y), \text{Gr } F) + n^{-2}.$$

Могут представиться две возможности.

(а) $\|y - y_n\| \rightarrow 0$. Тогда $\|x - x_n\| \geq \alpha > 0$ для всех n . Положим $u_n = (1 - n^{-1})x + n^{-1}x_n$. Тогда $\|u_n - x_n\| = (1 - n^{-1})\|x - x_n\|$ и

$$\frac{1}{n^2\|x - u_n\|} = \frac{1}{n\|x - x_n\|} \geq \frac{1}{n\alpha} \rightarrow 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g_y^K(x) - g_y^K(u_n)}{\|x - u_n\|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g_y^K(x) + n^2 - g_y^K(u_n)}{\|x - u_n\|} \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|x - x_n\| - \|u_n - x_n\|}{\|x - u_n\|} = 1. \end{aligned}$$

(b) $\|y - y_n\| \geq \alpha > 0$ для всех достаточно больших n . Пусть $t > 1$. Положим $v_n = (1 - n^{-1})y_n + n^{-1}y$. Коль скоро F покрывает вблизи $(\bar{x}, \bar{y})$ с нормой, не большей K , мы можем найти такое $w_n \in X$, чтобы $v_n \in F(w_n)$ и $\|w_n - x_n\| \leq tK\|v_n - y_n\|$. Положим $u_n = x + w_n - x_n$. Тогда $u_n - w_n = x - x_n$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} (10) \quad d_K((x, y), (x_n, y_n)) - d_K((u_n, y), (w_n, v_n)) &= K\|y - y_n\| - K\|y - v_n\| \\ &= n^{-1}K\|y - y_n\| \leq n^{-1}K\alpha. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что при больших n

$$\begin{aligned} g_y^K(x) - g_y^K(u_n) &\geq d_K((x, y), (x_n, y_n)) - n^{-2} - d_K((u_n, y), (w_n, v_n)) \\ &\geq \alpha K/n - 1/n^2 > 0. \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что $\|y_n - v_n\| = n^{-1}\|y - y_n\| \sim n^{-1}$, получаем из последнего неравенства и (10):

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{g_y^K(x) - g_y^K(u_n)}{\|x - u_n\|} &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{g_y^K(x) + n^{-2} - g_y^K(u_n)}{\|x - u_n\|} \\ &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{d_K((x, y), (x_n, y_n)) - d_K((u_n, y), (w_n, v_n))}{tK\|y_n - v_n\|} = \frac{1}{t}. \end{aligned}$$

Таким образом, для всякой точки (x, y) , достаточно близкой к $(\bar{x}, \bar{y})$, сильный наклон функции $f_y(\cdot)$ не может быть меньше числа, произвольно близкого к единице, что и требовалось доказать.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Как и в нелокальном случае, можно заметить, что теорема 2 остается в силе, когда лишь $\text{Gr } F$ полон, а теорема 2б требует лишь полноты X . Кроме того, из доказательства очевидно следует, что вторые части теорем 2 и 3 без изменений переносятся на случай, когда Y обладает следующим геодезическим свойством:

$$\forall x, y, \forall \varepsilon > 0 \exists z: \max\{d(x, z), d(y, z)\} \leq \frac{1}{2}(d(x, y) + \varepsilon).$$

§ 3. Приложения и обобщения

Во всех известных нам случаях получение более специальных критериев или достаточных условий для регулярности, накрытия или псевдо-липшицева свойства из общих теорем предыдущего пункта не требует большого труда. Ниже приводятся несколько примеров, связанных с рядом широко известных результатов.

3.1. Теорема Робинсона–Урсеску. Эта теорема, как уже отмечалось, обобщает теорему Банаха об открытом отображении на выпуклые многозначные отображения, т.е. многозначные отображения с выпуклым графиком. В силу предложения 2 проблема регулярности выпуклых многозначных отображений сводится к проблеме регулярности для ограничений линейных непрерывных операторов на выпуклые замкнутые множества. Поэтому приводимая ниже формулировка эквивалентна теореме Робинсона–Урсеску.

ТЕОРЕМА 4. Пусть X, Y – банаховы пространства, $A: X \mapsto Y$ – линейный ограниченный оператор, $S \subset X$ – выпуклое замкнутое множество, $\bar{x} \in S$ и $C_{\bar{x}}(S)$ – конус, порожденный множеством $S - \bar{x}$. Если $A(C_{\bar{x}}) = Y$, то A регулярен на S вблизи $\bar{x}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку мы интересуемся регулярностью в окрестности, то в силу выпуклости S можно без ограничения общности считать, что S – ограниченное множество, скажем, $\text{diam } S \leq 1$. Положим $Q = \overline{A(S - \bar{x})}$, где черта обозначает замыкание. Очевидно, конус, порожденный Q , содержит $A(C_{\bar{x}})$ и следовательно, совпадает с Y . Применяя теорему Бэра о категориях, заключаем, что внутренность Q не пуста и содержит нуль. Поэтому существует $\delta > 0$ такое, что шар радиуса 2δ с центром в нуле содержится в Q .

В частности, $B(y, \delta) \subset Q$ для всякого y с нормой $\leq \delta$. Поэтому (так как S выпукло и A линеен) для всякого $x \in U = \{x : \|A(x - \bar{x})\| < \delta\}$ и всякого $\xi \in Y$, $\|\xi\| \leq \delta$, найдется $u \in S$ такое, что $Au = Ax + \xi$ и $\|u - x\| \leq \|\xi\|/\delta$. Возьмем произвольно $x \in U$, положим $v = Ax$ и пусть $y \neq v$, $\xi = \delta\|y - v\|^{-1}(y - v)$. Положим далее $w(\lambda) = v + \lambda\xi$, где $\lambda \in (0, 1)$. Тогда по доказанному $w(\lambda) = Au(\lambda)$ для некоторого $u(\lambda)$ такого, что $\|u(\lambda) - x\| \leq \lambda$. С другой стороны,

$$\|y - w(\lambda)\| = \|y - v\| - \lambda\delta \leq \|y - v\| - \delta\|u(\lambda) - x\|$$

и, следовательно,

$$\limsup_{u \rightarrow x} \frac{\|y - Ax\| - \|y - Au\|}{\|u - x\|} \geq \delta$$

для всех $x \in U$ и всех y . Применяя теорему 2, получаем требуемое.

3.2. Накрывание на системе шаров. Пусть на X задана неотрицательная функция $\rho(x)$, удовлетворяющая условию Липшица с константой 1:

$$|\rho(x) - \rho(u)| \leq d(x, u),$$

и пусть Σ – совокупность шаров $B(x, \rho)$, где $0 \leq \rho \leq \rho(x)$. Следуя [27], будем писать $(x, \rho) \in \Sigma$, если шар радиуса ρ с центром в x принадлежит Σ .

Скажем, что F накрывает на Σ с константой, не меньшей t , если

$$F_{mt}(x) \subset F^t(x)$$

для всех x и $t \leq \rho(x)$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $F: X \rightrightarrows Y$ – замкнутое многозначное отображение. Предположим, что существуют числа $a > b > 0$ такие, что для всяких $(x, \rho) \in \Sigma$ множество $F^r(x)$ является rb -сетью в $F_{ar}(x)$, где r определяется равенством $ar = (a - b)\rho$. Тогда F накрывает на Σ с коэффициентом, не меньшим $t = a - b$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что F — непрерывное однозначное отображение. Положим

$$V = \bigcup_{(x, \rho) \in \Sigma} \{x\} \times B(F(x), m\rho) = \bigcup_x \{x\} \times B(F(x), m\rho(x)).$$

Очевидно, это замкнутое множество (так как F непрерывно). Пусть далее $(x, y) \in V$, $y \neq F(x)$. Тогда $y \in B(F(x), m\rho)$ для некоторого $\rho \leq \rho(x)$. Определим r равенством $d(y, F(x)) = ar$. По условию (так как $ar \leq m\rho$) найдется $u \in X$ такое, что $d(x, u) \leq r$ и $d(y, F(u)) \leq br = ar - mr \leq d(y, F(x)) - md(x, u)$, и требуемый результат следует из теоремы 1б. Таким образом, теорема верна в случае непрерывного однозначного отображения.

Общий случай теперь легко доказывается с помощью предложения 3. Действительно, рассмотрим проекцию Π_Y графика F на Y . По условию для всяких (x, y, v) таких, что $v \in F(x)$, $d(y, v) \leq ar$, найдется пара (u, w) такая, что $d(u, x) \leq r$, $d(y, w) \leq br$. Задав произвольным $\delta > 0$ и определяя расстояние в $\text{Gr } F$ равенством $d((x, v), (u, w)) = d(x, u) + \gamma d(v, w)$, где $\gamma = \delta/(a+b)$, находим, что для вышеупомянутых (x, v) и (u, w) $d((x, v), (u, w)) \leq (1+\delta)r = cr$. Это значит, что проекция на Y шара радиуса cr в $\text{Gr } F$ является br -сетью в шаре $B(y, ar)$. Мы приходим, таким образом, к ситуации, рассмотренной в первой части доказательства, но с a/c и b/c вместо a и b , откуда следует, что Π_Y покрывает с коэффициентом $(1+\delta)^{-1}(a-b)$ на семействе Σ' шаров $B((x, v), \rho')$ в $\text{Gr } F$ таких, что $(x, (1+\delta)^{-1}\rho') \in \Sigma$. Остается применить предложение 3 и принять во внимание, что δ может быть выбрано произвольно малым.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Если $d(y, F(x))$ полунепрерывна снизу для всех y , то можно воспользоваться теоремой 1б и не требовать полноты Y .

3.3. Теоремы о возмущениях. Хорошо известно, что малое линейное возмущение линейного ограниченного оператора на остается оператором на. Доказываемые ниже теоремы обобщают этот факт на многозначные отображения.

ТЕОРЕМА 6. Пусть F и Φ — замкнутые многозначные отображения из X в Y . Положим $F_1(x) := F(x) + \Phi(x)$. Если $b > a > 0$ таковы, что F покрывает с константой b , а Φ удовлетворяет условию Липшица с константой a (в том смысле, что $h(\Phi(x), \Phi(x')) \leq bd(x, x')$, где $h(C, D)$ означает хаусдорфово расстояние между C и D), то F_1 покрывает с константой $b - a$.

Множества $F_1(x)$ могут быть не замкнуты. Поэтому теорема 6 формально не следует из теоремы 1. Тем не менее, используя прием, подобный примененному в доказательстве предложения 3, мы можем вывести теорему 6 из теоремы 5 (и, следовательно, из теоремы 1). Наряду с таким доказательством мы приведем и другое, использующее подходящую модификацию “люстерниковского” итерационного процесса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО 1. Рассмотрим сначала случай, когда F однозначно и непрерывно на $\text{dom } F$. В этом случае $\text{Gr } F_1$ замкнут и, значит, полон, и простой подсчет показывает, что F_1 удовлетворяет условиям теоремы 5, т.е. $(F_1)^r(x)$ является br -сетью для $(F_1)_{ar}(x)$ для всяких x и r . Таким образом, в данном случае теорема 6 следует из теоремы 5.

В общем случае, когда оба отображения многозначны, мы рассмотрим множество $W = \text{Gr } F$ с аддитивной метрикой $d_\alpha((x, y), (x', y')) = d(x, x') + \alpha d(y, y')$ и многозначное отображение $H(x, y) = y + \Phi(x)$ из W в Y . Согласно предложению 3, первая компонента этого отображения накрывает с константой $a_1 = (a^{-1} + \alpha)^{-1}$, вторая же, очевидно, удовлетворяет условию Липшица с константой, не большей b . Если α достаточно мало, то $a_1 > b$, и, применяя уже доказанный результат для однозначного первого слагаемого, мы приходим к выводу, что H накрывает с константой $a_1 - b$. Наконец, аргументация, аналогичная той, которая использовалась в доказательстве второй части предложения 3, позволяет заключить, что F_1 накрывает с константой $[(a_1 - b)^{-1} - \alpha]^{-1}$. Последнее верно для всякого $\alpha > 0$, и, следовательно, F_1 накрывает с константой $\lim_{\alpha \rightarrow 0} [(a_1 - b)^{-1} - \alpha]^{-1} = a - b$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО 2. Выберем $b' \in (b, a)$, и пусть $\theta = b'/a < 1$. Выберем далее $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{Gr } F$, $\bar{w} \in \Phi(\bar{x})$, $y \in Y$ и положим $x_0 = \bar{x}$, $y_0 = \bar{y}$, $w_0 = \bar{w}$, $v_0 = \bar{y} + \bar{w} - y$, $t_0 = \|v_0\|$ (мы обозначаем для простоты $\|v\| = d(v, 0)$). Предположим, мы уже нашли x_n, y_n, w_n, v_n . Тогда $x_{n+1}, y_{n+1}, w_{n+1}, v_{n+1}$ выбираются следующим образом:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n - v_n; \quad t_n = \|v_n\|; \\ x_{n+1} &\in f^{-1}(y_{n+1}): \quad d(x_{n+1}, x_n) \leq t_n/a; \\ w_{n+1} &\in \Phi(x_{n+1}): \quad d(w_{n+1}, w_n) \leq b'd(x_{n+1}, x_n); \\ v_{n+1} &= w_{n+1} - w_n. \end{aligned}$$

Такой выбор возможен (хотя и не однозначен) в силу условий теоремы: x_{n+1} можно выбрать, так как F накрывает с константой a , а w_{n+1} — так как Φ удовлетворяет условию Липшица с константой $b < b'$. Имеем:

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &\leq t_n/a \leq \theta^n t_0/a; \\ \|v_{n+1}\| &\leq b'd(x_{n+1}, x_n) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Первое неравенство показывает, что последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна и, значит, сходится к некоторому x такому, что

$$(11) \quad d(x, \bar{x}) \leq a^{-1} t_0 \sum_{n=0}^{\infty} \theta^n = (a - b')^{-1} t_0 = (a - b')^{-1} d(y, \bar{y} + \bar{w}).$$

Далее,

$$w_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} v_i; \quad y_{n+1} = y - \sum_{i=1}^n v_i,$$

так что

$$F(x_{n+1}) + \Phi(x_{n+1}) \ni y_{n+1} + w_{n+1} = y + v_{n+1} \rightarrow y.$$

С другой стороны,

$$d(w_{n+1}, w_n) = \|w_{n+1} - w_n\| = \|v_{n+1}\| \leq \theta^n t_0,$$

откуда следует, что последовательность $\{w_n\}$ фундаментальна и, следовательно, сходится к некоторому w . Но это значит, что и последовательность $\{y_n\}$ сходится к некоторому z и при этом $z + w = y$ и $y \in F(x)$, $w \in \Phi(x)$, поскольку графики многозначных

отображений замкнуты. Таким образом, $y \in F(x) + \Phi(x)$, и сравнение с (11) завершает доказательство (с учетом того факта, что b' может быть сколь угодно близко к b).

Переформулировка собственно утверждения теоремы и ее доказательства для локального накрывания не представляет труда.

ТЕОРЕМА 6а. Пусть в условиях теоремы 6 Φ – однозначное отображение, удовлетворяющее в окрестности точки $\bar{x}$ условию $d(\Phi(x), \Phi(u)) \leq r(x, u)d(x, u)$, где $r(x, u) \rightarrow 0$, когда $x, u \rightarrow \bar{x}$. Тогда нормы регулярности и накрывания отображений F и $F_1 = F + \Phi$ вблизи $(\bar{x}, \bar{y})$ равны (как и псевдо-липшицевы нормы их обратных).

3.4. Общая теорема о неявной функции. Пусть $F: X \times Y \rightrightarrows Z$. Для всякого x обозначим через F_x многозначное отображение $y \mapsto F(x, y)$. Соответственно, F_x^{-1} – обратное к F_x . В дальнейшем мы предполагаем, что $\bar{z} \in F(\bar{x}, \bar{y})$, и иногда для обозначения функции $y \mapsto d(z, F(x, y))$ используем символ $\varphi_x^z(y)$.

ЛЕММА 1. Пусть F – многозначное отображение из $X \times Y$ в Z и $\bar{z} \in F(\bar{x}, \bar{y})$. Предположим, что существуют $\delta > 0$, $K > 0$, $L > 0$ такие, что

$$(a) \quad d(z, F(x, y)) - d(z, F(u, y)) \leq Ld(x, u);$$

$$(b) \quad d(y, F_x^{-1}(x, z)) \leq Kd(z, F(x, y))$$

для всех x и u из δ -окрестности $\bar{x}$, y из δ -окрестности $\bar{y}$ и z из δ -окрестности $\bar{z}$.

Тогда отображение $(x, z) \mapsto F_x^{-1}$ псевдо-липшицево в окрестности точки $((\bar{x}, \bar{z}), \bar{y})$.

Первое условие, по существу, означает, что отображение $x \mapsto F(x, y)$ псевдо-липшицево с нормой, не превосходящей L в окрестности каждой точки, достаточно близкой к $(\bar{x}, \bar{z})$, при всяком y , достаточно близком к $\bar{y}$, а второе – что отображение $y \mapsto F(x, y)$ регулярно с нормой, не превосходящей K в окрестности каждой точки, достаточно близкой к $(\bar{y}, \bar{z})$, при всяком x , достаточно близком к $\bar{x}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы должны доказать существование таких $\delta > 0$ и $N > 0$, что при всех x, x', z , для которых $d(x, \bar{x}) < \delta$, $d(x', \bar{x}) < \delta$, $d(z, \bar{z}) < \delta$, справедливо соотношение

$$(12) \quad F_x^{-1}(z) \cap B(\bar{y}, \delta) \subset (F_{x'}^{-1})_{Nd(z, z')}(z').$$

Рассмотрим многозначное отображение из $X \times Y$ в $X \times Z$, определенное следующим образом:

$$\Phi(x, y) = \{x\} \times F(x, y)$$

и проверим, что оно регулярно в точке $((\bar{x}, \bar{y}), (\bar{x}, \bar{z}))$. Очевидно,

$$(13) \quad \Phi^{-1}(x, z) = (x, F_x^{-1}(z)).$$

Поэтому, вводя в $X \times Y$ и $X \times Z$ аддитивные метрики с $\alpha = 1$, получаем

$$\begin{aligned} d((x, y), \Phi^{-1}(u, z)) &= d(x, u) + d(y, F_x^{-1}(z)); \\ d((u, z), \Phi(x, y)) &= d(x, u) + d(z, F(x, y)). \end{aligned}$$

Согласно (а) и (b)

$$\begin{aligned}
 d((x, y), \Phi^{-1}(u, z)) &= d(x, u) + d(y, F_x^{-1}(z)) \\
 &\leq d(x, u) + Kd(z, F(u, y)) \\
 &\leq d(x, u) + Kd(z, F(x, y)) + KLd(x, u) \\
 &\leq (1 + K + KL)d((u, z), \Phi(x, y)),
 \end{aligned}$$

т.е. Φ действительно регулярно в окрестности $((\bar{x}, \bar{y}), (\bar{x}, \bar{z}))$ с нормой, не превосходящей $N = 1 + K + KL$.

Согласно предложению 2 отображение Φ^{-1} псевдо-липшицево в окрестности точки $((\bar{x}, \bar{y}), (\bar{x}, \bar{z}))$, т.е. существует $\gamma > 0$ такое, что

$$\Phi^{-1}(x, z) \cap B((\bar{x}, \bar{y}), \gamma) \subset \Phi_{Nd((x, z), (x', z'))}^{-1}(x', z').$$

Это включение вместе с (13) немедленно влечет (12), если взять, например $\delta = \gamma/2$.

ЛЕММА 2. *Предположим, что F — замкнутое многозначное отображение. Предположим далее, что существуют $\delta > 0$, $K > 0$ такие, что для всякого $z \in B(\bar{z}, \delta)$*

- (i) *функция $x \mapsto d(z, F(x, y))$ полунепрерывна сверху в точке $\bar{x}$ при всяком y из δ -окрестности $\bar{y}$;*
- (ii) *функция $y \mapsto d(z, F(x, y))$ полунепрерывна снизу в δ -окрестности $\bar{y}$ при всяком x из окрестности $\bar{x}$;*
- (iii) *$|\nabla \varphi_x^z|(y) \geq K^{-1}$ для всякого y из δ -окрестности $\bar{y}$ такого, что $z \notin F_x(y)$.*

Тогда найдутся окрестность $\mathcal{O}$ точки $\bar{x}$ в X и число $\gamma > 0$ такие, что $F_x^{-1}(z) \cap B(\bar{y}, \delta/2) \neq \emptyset$ и

$$d(y, F_x^{-1}(z)) \leq Kd(z, F_x(y))$$

для всех $x \in \mathcal{O}$ и $y \in B(\bar{y}, \gamma)$, $z \in B(\bar{z}, \gamma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (i) для всякого $\varepsilon > 0$ найдется окрестность $\mathcal{O} = \mathcal{O}(\varepsilon)$ точки x такая, что $d(z, F(x, \bar{y})) < \varepsilon$ при $d(z, \bar{z}) < \varepsilon/2$, $x \in \mathcal{O}$. Выберем ε так, чтобы $K\varepsilon < \delta/2$. Применяя теорему 2б к отображению $y \mapsto F_x(y)$, и принимая во внимание условие (iii) находим, что $d(\bar{y}, F_x^{-1}(z)) \leq Kd(z, F(x, \bar{y})) \leq K\varepsilon < \delta/2$, а это значит, что $F_x^{-1}(z) \cap B(\bar{y}, \delta/2) \neq \emptyset$.

Пусть теперь $d(y, \bar{y}) \leq \delta/2$, $d(z, F(x, y)) < \varepsilon$. В этом случае, как и выше, мы можем быть уверены в силу теоремы 2б, что $d(y, F_x^{-1}(z)) \leq Kd(z, F(x, y))$. Осталось взять $\gamma \leq (1 + K)^{-1} \min\{\varepsilon/2, \delta/2\}$ и сослаться на предложение 1 (точнее на его доказательство), принимая во внимание, что наше рассуждение одинаково приложимо ко всякому $x \in \mathcal{O}$.

Комбинируя леммы 1 и 2, мы получаем следующую метрическую версию теоремы о неявной функции.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $F: X \times Y \rightrightarrows Z$ – замкнутое многозначное отображение и $\bar{z} \in F(\bar{x}, \bar{y})$. Предположим, что существуют $\delta > 0$, $K > 0$ такие, что

- (i) функция $x \mapsto d(z, F(x, y))$ удовлетворяет условию Липшица в δ -окрестности $\bar{x}$ при всех y, z из δ -окрестностей $\bar{y}, \bar{z}$ соответственно;
- (ii) функция $y \mapsto d(z, F(x, y))$ полунепрерывна снизу в δ -окрестности $\bar{y}$ при всех x, z из δ -окрестностей $\bar{x}, \bar{z}$ соответственно;
- (iii) при всяких x, y, z из δ -окрестностей $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ соответственно таких, что $z \notin F(x, y)$, сильный наклон функции $v \mapsto d(z, F(x, v))$ в точке y не меньше K^{-1} .

Тогда существует $\gamma > 0$ такое, что при всех x, y, z из γ -окрестностей $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ соответственно $(F_x^{-1}(z) \neq \emptyset)$

$$d(y, F_x^{-1}(z)) \leq K d(z, F(x, y))$$

и многозначное отображение $(x, z) \mapsto F_x^{-1}(z)$ является псевдо-липшицевым в окрестностях этих точек.

СЛЕДСТВИЕ 7.1. Предположим в дополнение к условиям теоремы, что $F(x, z) \cap F(x', z) = \emptyset$ для всех z и $x \neq x'$. Тогда существует однозначное отображение $\Phi: (x, z) \mapsto \Phi(x, z)$ из $X \times Z$ в Y , удовлетворяющее условию Липшица и такое, что соотношения $z \in F(x, y)$ и $\Phi(x, z) = y$ эквивалентны.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Анализируя доказательство леммы 2, легко заметить, что условие (ii) может быть отброшено, если воспользоваться для доказательства теоремой 2, а не теоремой 2б и соответствующим образом изменить формулировки заключения леммы 2 и теоремы 7.

3.5. Регулярность порядка $\rho(\cdot)$. Модули регулярности и накрывания.

Каждое из рассмотренных нами свойств (метрическая регулярность, линейное накрывание, псевдо-липшицево свойство) характеризуется пропорциональной связью некоторых величин: метрическая регулярность предполагает оценку расстояния, пропорциональную невязке, линейное накрывание – пропорциональность радиусов шара в исходном пространстве и накрываемого шара в пространстве-образе, наконец, псевдо-липшицево свойство (как и стандартное липшицево свойство) – оценку уклонения, пропорциональную расстоянию между аргументами. Естественно попытаться рассмотреть оценки более общего типа, скажем, степенные, экспоненциальные и т. д. Возникающая при этом теория, по-существу, является переформулировкой “линейной” теории, почти не требующей новых доказательств.

В дальнейшем в этом пункте функции, обозначаемые малыми греческими буквами, предполагаются определенными на неотрицательной полуоси, неубывающими, равными нулю в нуле и строго положительными при положительных значениях аргумента. Для всякой такой функции $\rho(t)$ обозначим через $\underline{\rho}(t)$ наибольшую полунепрерывную снизу функцию, не превосходящую $\rho(t)$, а через $\bar{\rho}(t)$ – наименьшую полунепрерывную сверху функцию, мажорирующую $\rho(t)$:

$$\underline{\rho}(t) = \lim_{\tau \rightarrow t-0} \rho(\tau); \quad \bar{\rho}(t) = \lim_{\tau \rightarrow t+0} \rho(\tau).$$

Мы будем также рассматривать верхнюю и нижнюю обратные функции

$$\bar{\rho}^{-1}(t) = \sup\{\xi : \rho(\xi) < t\}; \quad \underline{\rho}^{-1}(t) = \inf\{\xi : \rho(\xi) > t\}.$$

Разумеется, в обоих случаях верхняя и нижняя функции совпадают всюду, кроме счетного множества точек разрыва.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Скажем, что

(а) F ρ -регулярно на $V \subset X \times Y$, если

$$(x, y) \in V, 0 < d(y, F(x)) < t \implies d(x, F^{-1}(y)) \leq \rho(t);$$

(б) F μ -накрывает на V , если

$$(x, y) \in V, v \in F(x), d(y, v) < \mu(t) \implies \exists u \in X: d(u, x) \leq t, y \in F(u);$$

(с) F δ -гёльдерово на $W \subset X \times Y$, если

$$(x, y) \in W, y \in F(u), d(x, u) < t \implies d(y, F(x)) \leq \delta(t).$$

В этих определениях функции ρ , μ и δ не предполагаются непрерывными и даже полунепрерывными. Если же ρ или δ непрерывны, то в соответствующих определениях можно строгие неравенства заменить на нестрогие. С другой стороны, определения позволяют, не ограничивая общности, считать функции ρ и δ полунепрерывными снизу.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.

(а) Если F ρ -регулярно на V , то F μ -накрывает на V с $\mu(t) = \underline{(\rho^{-1})}(t)$;

(б) если F μ -накрывает на V , то F ρ -регулярно на V с $\rho(t) = \underline{(\mu^{-1})}(t)$ и, следовательно, с $\rho(t) = \underline{(\mu^{-1})}(t)$;

(с) F ρ -регулярно на V тогда и только тогда, когда F^{-1} ρ -гёльдерово на $W = \{(y, x) \in Y \times X : (x, y) \in V\}$.

Доказательство предложения мало чем отличается от доказательства предложения 2. Докажем хотя бы (б). Пусть $(x, y) \in V$, $v \in F(x)$ и $d(y, v) < t$. Тогда $d(y, v) < \mu(\xi)$, если $\mu(\xi) > t$. Коль скоро F μ -накрывает, отсюда следует существование $u \in X$ такого, что $y \in F(u)$ и $d(x, u) \leq \xi$. Это значит, что $d(x, F^{-1}(y)) \leq \xi$ для всякого ξ , для которого $\mu(\xi) > t$. Следовательно, $d(x, F^{-1}(y)) \leq \mu^{-1}(t)$.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $F: X \rightrightarrows Y$ — замкнутое многозначное отображение и $V \subset X \times Y$ — замкнутое множество, содержащее график F . Для ρ -регулярности отображения F на V достаточно существования $\delta > 0$ такого, что для всякой тройки (x, y, v) , удовлетворяющей (5), найдется пара $(u, w) \neq (x, v)$ такая, что

$$\underline{\rho}(d(y, w)) \leq \underline{\rho}(d(y, v)) - (d(x, u) + \delta d(v, w)).$$

Доказательство почти дословно повторяет доказательство достаточности в теореме 1 с той лишь разницей, что вместо функции $\varphi_y(x, v)$ надлежит применить основную лемму к функции

$$(14) \quad (\rho \circ \varphi_y)(x, v) = \begin{cases} \underline{\rho}(d(y, v)), & \text{если } (x, y) \in V, v \in F(x); \\ \infty & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

и в заключение доказательства перейти от неравенства

$$d(x, F^{-1}(y)) + \delta d(y, v) \leq (\rho \circ \varphi_y)(x, v),$$

получающегося после применения основной леммы, к неравенству

$$d(x, F^{-1}(y)) \leq (\rho \circ \varphi_y)(x, v)$$

(что и объясняет, почему данное условие лишь достаточно, но не обязательно необходимо).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. *Функции*

$$\lambda(t) = \inf \{ \eta > 0 : d(x, F^{-1}(y)) \leq \eta, \forall (x, y) \in V, d(y, F(x)) < t \}$$

и

$$\omega(t) = \sup \{ r > 0 : y \in F^t(x), \forall (x, y) \in V, v \in F(x), d(y, v) < r \}$$

называются *модулем регулярности* и *модулем накрывания* F на V и обозначаются соответственно $\text{reg}_V F$ и $\text{sur}_V F$.

Ясно, что если F ρ -регулярно на V , то $\lambda(t) \leq \rho(t)$ для всех t . Отсюда, в частности, следует, что $\lambda(t)$ полунепрерывна снизу. Столь же очевидно, что $\mu(t) \leq \omega(t)$, если F μ -накрывает. Таким образом, мы получаем из предложения 6

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.

$$\lambda(t) = \sup \{ \xi : \omega(\xi) \leq t \}.$$

В частности, если один из модулей строго монотонен и непрерывен, то этими же свойствами обладает и другой модуль, и обе функции при этом взаимно обратны.

Локальный вариант “нелинейной теории” строится очевидным образом: мы должны потребовать в определениях ρ -регулярности и μ -накрывания, чтобы соответствующее свойство выполнялось для (x, y) из малой окрестности $(\bar{x}, \bar{y})$. Как и в линейном случае, из теоремы 8 можно получить локальный достаточный критерий в терминах наклона, относящийся к теореме 8, как теорема 2 относится к теореме 1.

ТЕОРЕМА 9. Пусть, как обычно, $F: X \rightrightarrows Y$ — замкнутое многозначное отображение и $\bar{y} \in F(\bar{x})$. Пусть, далее, $\rho(t)$ полунепрерывна снизу и существует $\varepsilon > 0$ такое, что относительно некоторой аддитивной метрики в $X \times Y$

$$|\nabla(\rho \circ \varphi_y)|(x, v) \geq 1$$

для всех x, y, v из ε -окрестностей $\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}$ соответственно и таких, что $v \in F(x), y \neq v$.

Тогда F ρ -регулярно вблизи $(\bar{x}, \bar{y})$.

3.6. Регулярность в точке и задачи оптимизации. В некоторых ситуациях, в частности, в теории необходимых условий экстремума, полезными оказываются более слабые свойства, которые обычно определяются как регулярность и накрывание *в точке*. Именно, говорят, что F *регулярно в точке* $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{Gr } F$, если существует $K > 0$ такое, что (0.3) выполняется для всех x из некоторой окрестности $\bar{x}$; и что F *накрывает в точке* $(\bar{x}, \bar{y})$, если существует $r > 0$ такое, что $B(\bar{y}, rt) \subset F(B(\bar{x}, t))$ для всех достаточно малых t . Очевидно, что, в отличие от ранее определенных регулярности и накрывания на множестве, эти два свойства уже не эквивалентны, хотя бы потому, что в первом из них F не обязано накрывать окрестность точки $\bar{y}$. Заметим также, что определенные выше регулярность и накрывание в точке не сводятся к регулярности и накрыванию на одноточечном множестве в смысле определений 1 и 2.

Рассмотрим задачу:

$$\text{минимизировать } f(x) \text{ при условиях } 0 \in F(x), x \in S,$$

где f — функция на $X, S \subset X$ и F — многозначное отображение из X в Y .

ТЕОРЕМА 10. Пусть $\bar{x}$ — решение задачи. Предположим, что f удовлетворяет условию Липшица в окрестности $\bar{x}$ и многозначное отображение F регулярно в точке $(\bar{x}, 0)$. Тогда существует $K > 0$ такое, что $\bar{x}$ доставляет безусловный локальный минимум функции $f(x) + Kd(0, F(x))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию при некоторых $K > 0, L > 0$

$$f(x) - f(x') \leq Ld(x, x'), \quad d(x, F^{-1}(0)) \leq Kd(0, F(x))$$

для всех x, x' , достаточно близких к $\bar{x}$. Пусть теперь x достаточно близко к $\bar{x}$ и $u \in F^{-1}$ таково, что $d(x, u) \leq (K + 1)d(0, F(x))$. Тогда

$$f(x) \geq f(u) - Ld(x, u) \geq f(\bar{x}) - Ld(x, F^{-1}) \geq f(x) - L(K + 1)d(0, F(x)),$$

т.е. $f(x) + L(K + 1)d(0, F(x)) \geq f(\bar{x})$.

§ 4. Комментарии

4.1. Термин “метрическая регулярность” (который представляется весьма удачным) впервые, видимо, появился в статье Пено [83] в 1989 г., хотя слово “регулярный”, вернее его русский эквивалент “правильный”, уже присутствует в статье Люстерника: отображение регулярно в данной точке, если $\text{Im } F'(x) = Y$. В этом же смысле слово “регулярность” употребляется и в [56]. Общепринятым этот термин стал после работ Робинсона [88], [89], в которых условие регулярности определялось как условие накрывания для локальных аппроксимаций, и в случае, когда многозначное отображение задавалось как множество решений систем равенств и неравенств (в функции, скажем, их правых частей), оно оказывалось эквивалентным квалификационным условиям типа Мангасаряна–Фромова. Наконец, термин “регулярность” в смысле справедливости оценки расстояния типа (0.3) был введен в обиход в [45]. Определение регулярности относительно V введено в статье с целью включить в единую схему как случай “полных систем шаров”, рассмотренный в [27], так и множества типа $\{(x, y) : d(y, F(x)) \leq \delta\}$.

4.2. Справедливость теоремы об открытом отображении и замкнутом графике для линейных отображений пространств Фреше была известна уже Банаху. Птак [86], [87] обобщил теорему о замкнутом графике на многозначные отображения из полного метрического в метрическое пространство, используя элегантную модификацию банаховских итераций. Теорема Птака относится к обсуждаемым результатам примерно так же, как теорема Банаха об открытом отображении к теореме Люстерника–Грейвса: ни теорема 5, ни многие последующие результаты (включая теоремы Робинсона–Урсеску) не могут быть получены из нее, но их доказательства получаются с помощью модификации метода Птака. С другой стороны, теорема Птака легко выводится из теоремы 8 (но не из теоремы 5!).

Одно из важных наблюдений Дмитрука–Милютина и Осмоловского в теореме 5, несколько позже независимо сделанное также Обэном [1], состоит в том, что для доказательства накрывания даже нет нужды требовать, чтобы образ шара был плотен в подходящем шаре из Y , как, скажем, в теореме Птака, — достаточно предположить, чтобы точки образа были расположены в нем достаточно часто.

В связи со сказанным уместно упомянуть красивую работу Хана [63], в которой предложен синтетический итерационный процесс, содержащий и итерационную схему Птака, и схему, предложенную в [27].

Статьи [27], [86], [87] были первыми работами, в которых метрическая точка зрения на проблемы метрической регулярности и накрывания впервые была последовательно проведена в жизнь. Несомненно, это наиболее естественный подход к проблеме⁵, и в дальнейшем общие вопросы, не связанные с анализом локальных критериев регулярности, рассматривались многими авторами в контексте общих метрических пространств (см., например, [17], [23], [37], [83]).

4.3. Эквивалентность свойств метрической регулярности и линейного накрывания вблизи данной точки, включая равенство $\text{Reg } F \cdot \text{Sur } F = 1$, была осознана уже к началу 80-х годов (см. предисловие к [27] и предложение 11.12 в [46]) еще до появления понятия псевдо-липшицева многозначного отображения. В том виде, как оно сформулировано здесь (но без упоминания о равенстве норм), предложение 2 появилось в [83].

Псевдо-липшицево свойство было определено Обэном в 1984 г. [2]. Формально это, конечно, переформулировка свойства метрической регулярности для обратного отображения, однако именно ей обязана своим появлением новая глава негладкого анализа, посвященная изучению липшицевых свойств многозначных отображений (см. [91]). В негладком анализе это отнюдь не единственный случай, когда удачная формулировка позволяла по-новому взглянуть на казалось бы хорошо изученное явление.

Эквивалентность регулярности псевдо-липшицеву свойству обратного отображения позволяет интерпретировать всякое утверждение, содержащее достаточное условие регулярности, как многозначную “теорему об обратной функции”. Эта интерпретация (хорошо понятая еще до того, как была осознана упомянутая выше эквивалентность) содержит ключ к проблематике “липшицевой устойчивости” решений уравнений, вариационных неравенств, задач оптимизации и т. д., инициированной работами Робинсона [88], [89] и Обэна [2] и продолженной в исследованиях многих авторов ввиду ее чрезвычайной важности для многих приложений (см., например, [5], [11], [29], [31], [32], [77], [80] и содержащиеся в этих работах многочисленные ссылки).

Доказательство предложения 3 было дано в [51], но сам факт, как отмечалось во введении, был известен и раньше (см., например, введение к [50]). Понятие граф-регулярности было введено Журани и Тибо [58], а его эквивалентность локальной регулярности была совсем недавно обнаружена Тибо [93], [94]. Вторая из цитированных заметок Тибо содержит много других эквивалентных характеристик метрической регулярности для многозначных отображений банаховых пространств, включая результат, аналогичный предложению 3. Предложение 5, видимо, ранее в литературе не упоминалось.

4.4. Результаты первой главы имеют длинную родословную. В подавляющем большинстве случаев (с немногими известными мне исключениями, включая недавнюю работу Куммера [66], который обратил внимание на то, что аргументы, основанные на использовании принципа Экланда, могут быть в некоторых случаях обращены,

⁵ На самом деле, в [27] рассматривается еще более общий класс так называемых квази-метрических пространств, однако результаты на этом уровне общности остались, похоже, не востребованными.

и более ранние результаты [50], [64], [78], относящиеся к субдифференциальной теории, которые мы подробнее рассмотрим в третьей главе) внимание исследователей было устремлено на достаточные условия локальной регулярности. Следует, впрочем, заметить, что в приложениях достаточные условия регулярности играют основную роль. Первая версия основной леммы, в которой критерий регулярности формулировался в терминах обобщенных градиентов Кларка функции расстояния, была доказана Иоффе [45]. Коминетти [23] существенно усилил этот результат и дал чисто метрическое достаточное условие. Отметим также недавнюю работу Ледеява и Жу [69], в которой доказывается параметрический аналог упомянутого первого варианта основной леммы для субдифференциалов Фреше. Наконец, совсем недавно Азе, Корвеллек и Луккетти [8] доказали локальный вариант основной леммы, соответствующий $r = \infty$.

Теоремы 1–3 являются новыми. Вместе с тем, надо отметить, что условие полунепрерывности снизу функции $x \mapsto d(y, F(x))$ из теоремы 1b рассматривалось в упоминавшейся выше статье Куммера, а первая часть теоремы 2 (достаточность) имеет сильное пересечение с основной теоремой в цитированной работе Азе, Корвеллека и Луккетти, в которой, по-видимому впервые, было обращено внимание на возможность эффективного использования сильного наклона, введенного в [26], для характеристики метрической регулярности. Доказательство необходимости условия теоремы 2 в несколько более общей ситуации приведено также в совсем недавней работе [54]. С большой надежностью можно утверждать, что теоремы 2 и 3 являются ключом ко всевозможным локальным критериям.

4.5. Существует два основных способа доказательства общих теорем о регулярности и накрывании. Первый, восходящий к Банаху, Шаудеру, Люстернику и Грейвсу использует специальные итерационные процедуры. Эти процедуры тесно связаны с классическим методом Ньютона, но отличаются от него в одном существенном месте: в методе Ньютона каждая последующая итерация полностью определяется предыдущей, в то время как процессы Банаха, Люстерника и Грейвса требуют на каждом шаге выбора из множества альтернатив, предоставляемых предыдущей итерацией. Именно это обстоятельство придает итерационной схеме Банаха–Шаудера–Люстерника–Грейвса необычайную универсальность и гибкость.⁶ К этой схеме примыкают и упоминавшиеся работы Птака и Хана [63], [86], [87], и многочисленные доказательства предложенного Надлером [81] принципа сжатых многозначных отображений [30], [56]. Из более поздних публикаций, в который развивается эта техника, укажем [7], [23], [27], [89], [90] (алфавитный порядок в данном случае обратен хронологическому!).

Другой подход, основанный на использовании вариационного принципа Экланда был предложен Иоффе в [45] и впоследствии развивался и применялся во многих работах, главным образом для доказательства локальных достаточных критериев (см., например, [1], [8], [17], [46], [50], [59], [60], [66], [69], [80], [85]). Приводимое в настоящей статье доказательство основной леммы, равно как и доказательство соответствующего результата в [8], по-существу, суть незначительные модификации доказательства, данного в [45]⁷.

⁶Здесь уместно процитировать ремарку авторов [27] о том, что история развития обсуждаемой тематики сводится к поиску новых формулировок к уже имеющемуся доказательству!

⁷Так что, в известной степени, наблюдение из предыдущей сноски относится также и ко второму подходу.

Подход, основанный на использовании принципа Экланда более универсален, ибо он не нуждается в условиях равномерности, необходимых для обеспечения сходимости итераций (обычно со скоростью геометрической прогрессии) независимо от начального приближения. Тот факт, что именно в рамках этого подхода получаются не только достаточные, но и необходимые условия, подчеркивает его адекватность проблеме метрической регулярности.⁸ Теорема 1, по-видимому, не может быть доказана с помощью даже самых общих итерационных процедур типа описанных, например, в [27], [57], [63]. С другой стороны, как показано в [57], всякая теорема существования, базирующаяся на итерационных схемах первого типа, следует также из принципа Экланда.

4.6. Теоремы 5 и 6 для однозначных отображений были доказаны в [27], там же можно найти и обстоятельный обзор предшествующих результатов. В этом случае, разумеется, можно гарантировать замкнутое накрывание. Заметим также, что доказательство однозначной версии теоремы 5, данное в [27], без труда можно модифицировать к условиям теоремы. Равносильность теорем 5 и 6 соответствующим результатам из [27] следует также из предложения 3. Например, чтобы получить теорему 6 из теоремы 1.3 в [27], достаточно рассмотреть отображения $(x, y) \mapsto y$ и $(x, y) \mapsto y + \Phi(x)$.

Независимое доказательство теоремы 6а с помощью принципа сжатых многозначных отображений в предположении, что X — банахово пространство, дано в [30] (см. также [28]). В этом конкретном случае условие следствия означает, что Φ строго дифференцируемо в x и его производная равна нулю.

4.7. В последнее время название “теорема о неявной функции” часто дается утверждениям, которые естественнее было бы назвать “параметрическая теорема о регулярности” (см., например, [8], [69], [90]). Между тем, как справедливо отмечается в [27], основное содержание теоремы о неявной функции состоит в том, что она (неявно заданная функция) наследует аналитические свойства задающего ее отображения (например, ту или иную степень гладкости). В метрической теории наиболее естественными из таких свойств, конечно, являются свойства типа Липшица, Гёльдера и их варианты.

Теорема 7 публикуется впервые. Она тесно связана с параметрическими теоремами из [8], [69]. Из “настоящих” теорем о неявной функции, предшествовавших теореме 7, укажем результат, полученный в [11], который легко следует из теоремы. В следствии 7.1 мы для простоты явно требуем однозначности обратного отображения. Следует однако отметить, что локальный негладкий анализ предлагает инфинитезимальные средства для ее характеристики [3], [20], [46], [65].

4.8. Предложение 6 было анонсировано в [46] (предложение 11.12); его подробное доказательство можно найти в [52]. Однако впервые обстоятельное изучение условий регулярности и накрывания “высших порядков” для многозначных отображений было осуществлено в серии работ Франковской [37], [38]. (В гладком случае соответствующие обобщения теоремы Люстерника–Грейвса изучались Грассе [41].) Данные в статье определения регулярности, накрывания, гёльдеровости порядка δ являются

⁸Надо отметить, что это обстоятельство было осознано не сразу. Свидетельством тому — достаточно скептическая оценка возможностей принципа Экланда (в отношении проблем регулярности и накрывания) в [27] и интерпретация Экландом в [33] локального варианта основной леммы, доказанного в [45] как “обобщенной теоремы о среднем”.

незначительной модификацией определений, данных в [17]. Локальная версия предложения 4 является частью основной теоремы в [17]. Там же доказано, что в случае, когда $\delta(t) = t^r$, список эквивалентных свойств локальной версии предложения 4 можно дополнить условием, что r -я производная отображения в точке $(\bar{x}, \bar{y})$ в смысле, определенном в [38], конечна. Полезно иметь в виду, что локальная версия предложения 4 может быть также получена из предложения 5. Теоремы 8 и 9 публикуются впервые.

4.9. Мы уже отмечали, что непосредственной целью доказательства Люстерника его знаменитой теоремы было создание адекватного аппарата для доказательства правила множителей Лагранжа в ситуациях, когда традиционный подход, основанный на использовании теоремы о неявной функции, не работает по причине отсутствия топологического дополнения у ядра производной оператора ограничения.

Оценки метрической регулярности оказались гораздо более мощным инструментом (по сравнению с теоремой о касательном пространстве), позволившим, с одной стороны, развить теорию высших порядков для весьма общих классов экстремальных задач с ограничениями ([70], [74], см. также [56]), а с другой стороны, давшим удобное техническое средство для анализа устойчивости решений экстремальных задач (см., например, [14]).

Глава 2. Субдифференциалы

Всюду в дальнейшем X, Y и т. д. — действительные банаховы пространства.

§ 1. Определения и примеры субдифференциалов

1.1. Субдифференциалы, ассоциированные с производными. Это наиболее просто и естественно определяемый класс субдифференциалов. Напомним, что функция f дифференцируема по Фреше в точке x , если существует линейный ограниченный функционал x^* (называемый производной Фреше функции f в точке x) такой, что

$$f(x+h) - f(x) - \langle x^*, h \rangle = r(h)\|h\|,$$

где $r(h) \rightarrow 0$ при $\|h\| \rightarrow 0$. Разумеется, производная, если она существует, определяется однозначно.

Определение субградиента Фреше получается заменой в определении производной равенства неравенством $\geq$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функционал $x^* \in X^*$ называется *субградиентом Фреше* функции f в точке x , если

$$f(x+h) - f(x) - \langle x^*, h \rangle \geq r(h)\|h\|, \quad \text{где } r(h) \rightarrow 0 \text{ при } \|h\| \rightarrow 0.$$

Совокупность всех субградиентов f в x называется *субдифференциалом Фреше* функции f в точке x и обозначается обычно $\partial_F f(x)$.

Аналогичным образом определяются субдифференциалы, ассоциированные с другими типами производных. Напомним (см., например, [6]), что *борнология* β в X — это совокупность центрально-симметричных выпуклых ограниченных подмножеств пространства, удовлетворяющая двум условиям: (а) объединение входящих в борнологию множеств совпадает с X и (б) для всяких двух элементов β в борнологии

найдется третье множество, содержащее два первых. Если задана борнология β , то β -производная функции f в x определяется как непрерывный линейный функционал x^* такой, что для всякого $S \in \beta$

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{-1} \inf_{h \in S} |f(x + th) - f(x) - t \langle x^*, h \rangle| = 0.$$

Заменяя, как и в случае производных Фреше, равенство неравенством $\geq$, получаем определение β -субградиента функции f в точке x . Совокупность всех β -субградиентов f в x называется β -субдифференциалом f в точке x и обозначается обычно $\partial_\beta f(x)$. Ясно, что β -субдифференциал всегда является выпуклым множеством.

Производная Фреше соответствует борнологии, образованной всемишарами с центром в нуле. Другая важная борнология образована компактными центрально-симметричными множествами. Соответствующий субдифференциал называется *субдифференциалом Дини–Адамара* – будем обозначать его $\partial^- f(x)$.

Следующие два предложения содержат эквивалентные описания субдифференциалов Фреше и Дини–Адамара.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Следующие условия эквивалентны:*

- (a) $x^* \in \partial_F f(x)$;
- (b) для всякого $\varepsilon > 0$ функция $g(h) = f(x + h) - f(x) - \langle x^*, h \rangle + \varepsilon \|h\|$ имеет локальный минимум в нуле;
- (c) существует функция $\varphi(x)$, определенная и удовлетворяющая условию Липшица в окрестности точки x и дифференцируемая по Фреше в точке x , такая, что $\varphi'(x) = x^*$ и функция $f - \varphi$ имеет локальный минимум в x .

Эквивалентность первых двух условий немедленно следует из определения, равно как и импликация (c) $\Rightarrow$ (a). По поводу доказательства обратной импликации (a) $\Rightarrow$ (c) см. [25].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пусть f полунепрерывна снизу в окрестности точки x . Следующие условия эквивалентны:*

- (a) $x^* \in \partial^- f(x)$;
- (b) $d^- f(x; h) \geq \langle x^*, h \rangle \quad \forall h \in X$, где

$$d^- f(x; h) = \liminf_{\substack{t \rightarrow 0 \\ u \rightarrow h}} t^{-1} (f(x + tu) - f(x))$$

- производная Дини–Адамара функции f в точке x по направлению h ;
- (c) для всякого $\varepsilon > 0$ и всякого конечномерного подпространства $L \subset X$ функция $g(h) = f(x + h) - f(x) - \langle x^*, h \rangle + \varepsilon \|h\|$ имеет в нуле локальный минимум на L .

Отметим, что при $x^* \in \partial^- f(x)$ для всякого $\varepsilon > 0$ функция $g(h) = f(x + h) - f(x) - \langle x^*, h \rangle + \varepsilon \|h\|$ имеет локальный минимум в нуле на всяком конечномерном подпространстве X , но не на всем пространстве, как в случае субдифференциала Фреше. Именно это обстоятельство выделяет субдифференциалы Фреше среди всех субдифференциалов, ассоциированных с производными.

Введенные определения корректны для всякого банахова и даже нормированного пространства, однако возможность эффективного применения каждого из них в конкретных ситуациях в значительной мере определяется геометрическими свойствами соответствующего пространства.

Например, если X не есть пространство Асплунда, то на X имеется непрерывная вогнутая (и, значит, липшицева на каждом шаре) функция, у которой субдифференциал Фреше тождественно пуст. Поэтому субдифференциал Фреше, вообще говоря, имеет смысл лишь на пространствах Асплунда (хотя для специальных классов функций его можно рассматривать и на более общих классах пространств, как, например, для интегральных функционалов типа $f(x) = \int f(t, x(t)) d\mu$ на пространствах непрерывных функций $x(t)$).

Скажем, что X есть пространство β -субдифференцируемости, если каждая полунепрерывная снизу функция имеет непустой β -субдифференциал на плотном подмножестве своей области определения.

Ясно, что β -субдифференцируемость — это минимальное требование к пространству, с тем чтобы, работая с полунепрерывными снизу функциями, можно было бы уверенно пользоваться β -субдифференциалами.

Для описания таких пространств нам понадобится понятие *холм-функции*. Так называют всякую непрерывную функцию $\varphi(x)$, обладающую следующими тремя свойствами: $0 \leq \varphi(x) \leq 1 = \varphi(0)$ во всех точках; $\varphi(x) = 0$ вне единичного шара, и φ имеет сильный максимум в нуле (т.е. всякая максимизирующая последовательность сходится к нулю).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. (а) *Если в X существует β -дифференцируемая и удовлетворяющая условию Липшица холм-функция, то X — пространство β -дифференцируемости.*

(б) *Пространства Асплунда и только они являются пространствами субдифференцируемости по Фреше.*

Доказательство первого утверждения совсем просто и мало отличается от доказательства аналогичного утверждения для ε -субдифференциалов Фреше в [34]. Второе утверждение, доказанное Фабианом [35], [36], несколько более сложное: его доказательство использует сепарабельную редукцию асплундовых пространств.

Если в пространстве существует эквивалентная β -дифференцируемая норма, то функция

$$\varphi(x) = \begin{cases} (1 - \|x\|^2)^2, & \text{если } \|x\| \leq 1; \\ 0, & \text{если } \|x\| > 1, \end{cases}$$

β -дифференцируема. Следовательно, всякое такое пространство является пространством β -дифференцируемости.

Отметим в заключение, что в конечномерном пространстве субдифференциалы Фреше и Дини–Адамара совпадают.

1.2. Предельные субдифференциалы. Очевидное неудобство субдифференциалов, ассоциированных с производными, состоит в том, что даже у липшицевой функции такой субдифференциал может быть пуст на богатом множестве точек. Это обстоятельство не позволяет использовать такие субдифференциалы во многих важных случаях. Например, необходимые условия экстремума в задачах с ограничениями, которые можно получить с помощью этих субдифференциалов, формулируются только

в терминах минимизирующих последовательностей, элементы которых в принципе не могут быть точно определены.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Предельный β -субдифференциал* функции f в x определяется как совокупность всех слабых* пределов последовательностей $\{x_n^*\}$ таких, что $x_n^* \in \partial_\beta f(x_n)$ и при этом $x_n \rightarrow x$, $f(x_n) \rightarrow f(x)$.

Мы иногда будем обозначать эти субдифференциалы символом $\bar{\partial}_\beta f(x)$. Предельный β -субдифференциал уже может не быть выпуклым множеством. Ясно, что предложение 3 переносится на предельные субдифференциалы. Однако для них можно утверждать больше.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Пусть X – пространство β -субдифференцируемости и единичный шар в X^* секвенциально слабо* компактен. Тогда $\bar{\partial}_\beta f(x) \neq \emptyset$ во всякой точке, в окрестности которой функция определена и удовлетворяет условию Липшица.*

Доказательство следует из очевидного неравенства: $\|x^*\| \leq K$, если $x^* \in \partial_\beta f(x)$, где K – липшицева константа функции.

Заметим, что пространство X с β -дифференцируемой нормой, с одной стороны, есть пространство β -дифференцируемости в силу предложения 3, а с другой, всякая ограниченная последовательность линейных функционалов содержит слабо* сходящуюся подпоследовательность. Таким образом, предложение 4 выполняется для этого класса банаховых пространств.

В случае субдифференциала Фреше сказанное распространяется на все пространства Асплунда.

1.3. Аппроксимационный субдифференциал. В случае, когда X не является пространством дифференцируемости ни для какой разумной борнологии, требуется иной подход к конструированию субдифференциалов. Простейшая идея состоит в том, чтобы рассмотреть ограничения функций на “хорошие” подпространства или линейные многообразия, а затем посмотреть, что происходит при их неограниченном расширении.

Мы начнем реализовывать эту идею для функций, удовлетворяющих условию Липшица в окрестности интересующей нас точки x . В этом случае, как легко видеть,

$$d^-(x; h) = \liminf_{t \rightarrow 0} t^{-1}(f(x + th) - f(x)).$$

Пусть L – замкнутое подпространство X . Положим

$$\partial_L^- f(x) = \{x^* : d^-(x, h) \geq \langle x^*, h \rangle \quad \forall h \in L\}.$$

Заметим, что ∂_L^- – субдифференциал Дини–Адамара ограничения функции $\psi(h) = f(x + h)$ на L (т.е. функции, равной нулю на L и бесконечности вне L). Пусть, наконец, $\mathcal{F}$ – совокупность всех конечномерных подпространств X .

Аппроксимационный субдифференциал функции f определяется формулой

$$\partial_G f(x) = \bigcap_{L \in \mathcal{F}} \limsup_{u \rightarrow x} \partial_L^- f(u).$$

Более удобной для работы оказывается несколько более длинная (но эквивалентная) формула:

$$\partial_G f(x) = \bigcap_{L \in \mathcal{F}} \limsup_{u \rightarrow x} [\partial_L^- f(u) \cap kB],$$

где k – любое число, не меньшее липшицевой константы f .

Если теперь f – произвольная полунепрерывная снизу функция, то мы определяем ее аппроксимационный субдифференциал следующим образом:

$$(1) \quad \partial_G f(x) = \left\{ x^* : (x^*, -1) \in \bigcup_{\lambda > 0} \lambda \partial d((x, f(x)), \text{epi } f) \right\},$$

где, как и раньше, $d((x, \alpha), \text{epi } f)$ – расстояние от (x, α) до эпиграфа функции f .⁹

Приведенная выше конструкция универсальна в том смысле, что она нетривиально действует во всех банаховых пространствах и, как мы увидим, в “хороших” пространствах дает результат, совпадающий с предельными субдифференциалами, определенными в предыдущем пункте.

1.4. Обобщенный градиент Кларка. Это исторически первый хорошо изученный класс субдифференциалов, введенный в середине 70-х годов. Его первоначальное определение тоже использует двухступенчатую конструкцию. Итак, пусть f удовлетворяет условию Липшица в окрестности x . Положим

$$f^\circ(x; h) = \limsup_{\substack{t \rightarrow 0 \\ u \rightarrow x}} t^{-1} (f(u + th) - f(u)).$$

Обобщенный градиент функции f в точке x определяется равенством

$$\partial_C f(x) = \{x^* : f^\circ(x; h) \geq \langle x^*, h \rangle \quad \forall h \in X\}.$$

Оказывается, что так определенное множество всегда является выпуклым. Если же f – произвольная полунепрерывная снизу функция, то ее обобщенный градиент определяется, как в (1), но с добавлением операции выпуклого слабого* замыкания:

$$\partial_C f(x) = \text{cl}^* \text{conv} \left\{ x^* : (x^*, -1) \in \bigcup_{\lambda > 0} \lambda \partial_C d((x, f(x)), \text{epi } f) \right\}.$$

Рокафеллар [94] дал эквивалентное определение обобщенного градиента как опорного множества некоторой “производной по направлению” функции f .

Полное описание взаимосвязи обобщенного градиента и аппроксимационного субдифференциала будет дано несколько позже в предложении 6.

1.5. Аксиоматика теории субдифференциала. Все перечисленные в предыдущем параграфе субдифференциалы обладают следующими свойствами:

$$(\text{SD}_1) \quad \partial f(x) = \emptyset, \text{ если } x \notin \text{dom } f;$$

⁹ Индекс “G” обязан своим появлением тому обстоятельству, что первоначально рассматривались два типа аппроксимационных субдифференциалов: “аналитический” и “геометрический”. Однако в дальнейшем выяснилось, что первый менее интересен, по крайней мере, в контексте банаховых пространств.

- (SD₂) $\partial f(x) = \partial g(x)$, если f и g совпадают в окрестности x ;
- (SD₃) если f выпукла, то $\partial f(x)$ совпадает с субдифференциалом f в смысле выпуклого анализа;
- (SD₄) если f удовлетворяет условию Липшица с константой K в окрестности x , то $\|x^*\| \leq K$ для всякого $x^* \in \partial f(x)$;
- (SD₅) $0 \in \partial f(x)$, если x — точка локального минимума f ;
- (SD₆) если $X = X_1 \times X_2$ и $f(x) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$, то $\partial f(x) \subset \partial f_1(x_1) \times \partial f_2(x_2)$;
- (SD₇) если $f(x) = \lambda g(Ax + y)$, где $\lambda > 0$, A — линейный ограниченный оператор из X на Y , то $\partial f(x) = \lambda A^* \partial g(Ax + y)$;
- (SD₈) $\partial f(x) = \{x^* : (x^*, -1) \in \partial \chi_{\text{epi } f}(x, f(x))\}$, где

$$\chi_S(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in S; \\ \infty, & \text{если } x \notin S, \end{cases}$$

— так называемая *индикаторная функция* множества S .

Во многих случаях именно эти свойства, а не конкретная конструкция субдифференциала, необходимы для доказательств и дальнейших конструкций. В таких ситуациях удобной оказывается аксиоматическая точка зрения, при которой свойства (SD₁)–(SD₈) трактуются как *аксиомы субдифференциального исчисления*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Субдифференциалом* называется всякое многозначное отображение, связывающее с каждой функцией f , определенной на некотором банаховом пространстве X , и с каждым $x \in X$ множество $\partial f(x) \in X^*$, если для него выполняются аксиомы (SD₁)–(SD₈).

1.6. Нормальные конусы и копроизводные. Пусть $S \subset X$ и пусть ∂ — некоторый субдифференциал. Очевидное равенство $\lambda \chi_S(x) = \chi_S(x)$ ($\lambda > 0$) в силу аксиомы (SD₇) влечет равенство $\lambda \partial \chi_S(x) = \partial \chi_S(x)$ для всякого положительного λ . Следовательно, субдифференциал индикаторной функции в любой точке множества является конусом, содержащим, как легко видеть, нуль. Этот конус называется *нормальным конусом* (к S в x), ассоциированным с субдифференциалом ∂ , и обозначается символом $N(S, x)$, снабжаемым при необходимости тем же описательным индексом, что и субдифференциал, с которым конус ассоциирован. Пользуясь этим обозначением, мы можем переписать аксиому (SD₈) в виде

$$\partial f(x) = \{x^* : (x^*, -1) \in N(\text{epi } f, (x, f(x)))\}.$$

Следующее предложение содержит несколько важных фактов, специфических для аппроксимационного субдифференциала, а также субдифференциала и предельного субдифференциала Фреше функции расстояния, в частности, эквивалентное описание соответствующего нормального конуса, которое во многих случаях оказывается весьма удобным.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Предположим, что либо X — произвольное банахово пространство и ∂ — аппроксимационный субдифференциал, либо X — пространство Асплунда и ∂ — (предельный) субдифференциал Фреше. Пусть, далее, $S \subset X$. Тогда для всякого $x \in S$*

$$N(S, x) = \bigcup_{\lambda > 0} \lambda \partial d(x, S),$$

и для всякой функции $f(\cdot)$, мажорирующей $d(\cdot, S)$ и обращающейся в нуль на S ,

$$\partial d(x, S) \subset \partial f(x).$$

Теперь мы в состоянии дать точное описание связи аппроксимационного субдифференциала и обобщенного градиента. Для всякого субдифференциала положим

$$\partial^\infty f(x) = \{x^* : (x^*, 0) \in N(\text{epi } f, (x, f(x)))\}.$$

Это так называемый *сингулярный субдифференциал* функции f в x . Геометрически он соответствует “горизонтальным” нормальям к эпиграфу функции в данной точке ее графика. Легко проверяется, что сингулярный субдифференциал липшицевой функции тривиален.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.

$$\begin{aligned} N_C(S, x) &= \text{cl}^* \text{conv } N_G(S, x); \\ \partial_C f(x) &= \text{cl}^* \text{conv}(\partial_G f(x) + \partial_G^\infty f(x)). \end{aligned}$$

В частности, аппроксимационный субдифференциал всегда содержится в обобщенном градиенте, и если функция f удовлетворяет условию Липшица в окрестности x , то

$$\partial_C f(x) = \text{cl}^* \text{conv } \partial_G f(x).$$

Пусть теперь задано (вообще говоря, многозначное) отображение F из X в Y и $(x, y) \in \text{Gr } F$. Копроизводной отображения F в (x, y) , ассоциированной с субдифференциалом ∂ , называется многозначное отображение $D^*F(x, y)$ из Y^* в X^* , определенное формулой

$$D^*F(x, y)(y^*) = \{x^* : (x^*, -y^*) \in N(\text{Gr } F, (x, y))\}.$$

Если F – ограниченный линейный оператор, то его копроизводная совпадает с сопряженным оператором, с каким бы субдифференциалом она ни была ассоциирована. Точно так же: любая копроизводная отображения, строго дифференцируемого в данной точке, есть линейный оператор, сопряженный с производной.

§ 2. Базовые теоремы субдифференциального исчисления

2.1. Фаззи-исчисления и пространства доверия.¹⁰ Когда мы говорим об исчислении производных или субдифференциалов, то, прежде всего, имеем в виду правила их вычисления для сложных функций (сумм, композиций), теоремы о среднем и т. д. Если говорить о суммах функций, то, скажем, для β -субдифференциалов включение $\partial(f_1 + \dots + f_n)(x) \supset \partial f_1(x) + \dots + \partial f_n(x)$ очевидно, в то время как противоположное включение столь же очевидно неверно. Вместе с тем, опыт выпуклого анализа

¹⁰ Английское “fuzzy” означает “распущенный, размытый, имеющий нечеткие границы”. Ни одно из этих слов, похоже, не вписывается в русский математический текст. Поэтому я предпочел просто транслитерировать “fuzzy” на русский. Дополнительным оправданием для этого решения было звуковое и даже некоторое смысловое, в данном контексте, сходство с популярным “квази”.

показывает, что именно противоположное включение важно для большинства приложений. К счастью, нужное включение выполняется во многих важных случаях для предельных субдифференциалов (в подходящих пространствах) и аппроксимационного субдифференциала и обобщенного градиента (во всех банаховых пространствах). Однако решающим для негладкого анализа является то обстоятельство, что для субдифференциалов, ассоциированных с производными, и некоторых других необходимое включение “почти” выполняется в точно определяемом ниже смысле и для них получается исчисление нового типа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть заданы субдифференциал ∂ и банахово пространство X . Скажем, что ∂ удовлетворяет *основному фаззи-принципу* на X , если для всякого конечного набора $(f_1, \dots, f_k)$ полунепрерывных снизу функций, удовлетворяющих, за исключением самое большее одной из них, условию Липшица в окрестности некоторой точки $\bar{x}$ и таких, что функция $f = f_1 + \dots + f_k$ достигает локального минимума в $\bar{x}$, и для всякого $\varepsilon > 0$ найдутся $x_1, \dots, x_k, x_1^*, \dots, x_k^*$ такие, что

$$(2) \quad \|x_i - \bar{x}\| < \varepsilon, |f_i(x_i) - f_i(\bar{x})| < \varepsilon, x_i^* \in \partial f_i(x_i) \quad \forall i = 1, \dots, k \text{ \& } \left\| \sum x_i^* \right\| < \varepsilon.$$

Если для ∂ на X выполнен основной фаззи-принцип, мы будем также говорить, что X – *пространство доверия* для ∂ .

ТЕОРЕМА 1. (а) *Банахово пространство, в котором существует β -дифференцируемая и удовлетворяющая условию Липшица холм-функция, является пространством доверия для β -субдифференциала.*

(б) *Пространства Асплунда и только они являются пространствами доверия для субдифференциала Фреше.*

(с) *Всякое банахово пространство является пространством доверия для аппроксимационного субдифференциала.*

Из определений просто следует, что пространство доверия для субдифференциала ∂ будет также и пространством доверия для всякого субдифференциала ∂' , большего, чем ∂ (т.е. такого, что включение $\partial f(x) \subset \partial' f(x)$ всегда справедливо). Поэтому все пространства из (а) являются пространствами доверия для соответствующих предельных субдифференциалов, пространства Асплунда являются пространствами доверия для предельного субдифференциала Фреше и всякое банахово пространство есть пространство доверия для обобщенного градиента Кларка.

В связи со сказанным уместно упомянуть следующее *свойство минимальности* аппроксимационного субдифференциала: если X – пространство доверия для субдифференциала ∂ и f удовлетворяет условию Липшица в окрестности $\bar{x}$, то

$$\partial_G(\bar{x}) \subset \limsup_{x \rightarrow \bar{x}} \partial f(x)$$

(где $\limsup$ понимается не в секвенциальном, а топологическом смысле относительно слабой* топологии в X^*). Кроме того, можно отметить, что в случае, когда X – асплундово или пространство β -субдифференцируемости и при этом X – слабо компактно порожденное пространство, т.е. практически во всех интересных для приложений случаях, аппроксимационный субдифференциал липшицевой функции (а в случае асплундова пространства – всякой полунепрерывной снизу функции) совпадает с

соответствующим предельным субдифференциалом. Поэтому, скажем, в рефлексивных пространствах все предельные субдифференциалы липшицевой функции равны аппроксимационному, а в конечномерном пространстве то же верно для всех полунепрерывных снизу функций. В этом смысле мы можем также говорить об *универсальности* аппроксимационного субдифференциала (см. сноску 15 в гл. 3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Мы приведем доказательство только первого утверждения. Оно покрывает также основную часть доказательства второго утверждения, ибо всякое сепарабельное пространство Асплунда обладает эквивалентной дифференцируемой по Фреше нормой, и для завершения доказательства нужно воспользоваться так называемым методом сепарабельной редукции, т.е. “подъемом” результата с сепарабельных подпространств на все пространство. Наконец, доказательство последнего утверждения тоже опирается на первое и предложения 2 и 5.

1) Пусть $\varphi(x)$ — β -дифференцируемая холм-функция, удовлетворяющая условию Липшица. Положим $U = \{x : \varphi(x) > 0\}$ и для всякого $r > 0$

$$\gamma_r(x) = \begin{cases} [r\varphi(x)]^{-1}, & \text{если } x \in r^{-1}U, \\ \infty, & \text{если } x \notin r^{-1}U. \end{cases}$$

По условию U принадлежит единичному шару, т.е. $\gamma_r(x) < \infty$, только если $\|x\| < r^{-1}$. Ясно далее, что γ_r — β -дифференцируема в каждой точке, в которой она конечна, и удовлетворяет условию Липшица в окрестности такой точки.

2) Итак, пусть даны $\varepsilon > 0$ и функции $(f_1, \dots, f_k)$, полунепрерывные снизу и удовлетворяющие, за исключением самое большее одной из них, скажем, f_k , условию Липшица в окрестности точки $\bar{x}$, в которой функция $f = f_1 + \dots + f_k$ достигает локального минимума. Без ограничения общности можно считать, что $\bar{x} = 0$, $f(x) \geq f(0)$, $f_i(x) \geq f_i(0) - 1$ и $f_1, \dots, f_{k-1}$ удовлетворяют условию Липшица с константой C в единичном шаре.

Рассмотрим функцию

$$p_r(x_1, \dots, x_k) = \sum_{i=1}^k f_i(x_i) + \sum_{i=1}^{k-1} \gamma_r(x_i - x_k) + \delta(1 - \varphi(x_k)),$$

где $\delta > 0$ достаточно мало, скажем, настолько, что липшицева константа $\delta\varphi(x)$ не превосходит $\varepsilon/2$. Очевидно, p_r ограничена и полунепрерывна снизу на произведении k единичных шаров пространства X . Положим

$$a_r = \inf\{p_r(x_1, \dots, x_k) : \|x_i\| \leq 1\}$$

и пусть u_{ir} , $\|u_{ir}\| \leq 1$, таковы, что

$$a_r + 1/r \geq p_r(u_{1r}, \dots, u_{kr}).$$

3) Имеем

$$\begin{aligned}
 a_r + 1/r &\geq p_r(u_{1r}, \dots, u_{kr}) \\
 &= \sum_{i=1}^k f_i(u_{ir}) + \sum_{i=1}^{k-1} \gamma_r(u_{ir} - u_{kr}) + \delta(1 - \varphi(u_{kr})) \\
 &\geq \sum_{i=1}^k f_i(u_{kr}) + \sum_{i=1}^{k-1} \gamma_r(u_{ir} - u_{kr}) - C \sum_{i=1}^{k-1} \|u_{ir} - u_{kr}\| \\
 &\geq f(0) + \sum_{i=1}^{k-1} \gamma_r(u_{ir} - u_{kr}) - 2kC.
 \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\gamma_r(u_{ir} - u_{kr}) < \infty$, и, значит, $\|u_{ir} - u_{kr}\| \leq r^{-1} \rightarrow 0$ для всех i .
С другой стороны,

$$\begin{aligned}
 f(0) + k\gamma_r(0) &\geq p_r(0, \dots, 0) \geq a_r \\
 &\geq \sum_{i=1}^k f_i(u_{ir}) + \delta(1 - \varphi(u_{kr})) - 1/r \\
 &\geq f(0) - C \sum_{i=1}^{k-1} \|u_{ir} - u_{kr}\| + \delta(1 - \varphi(u_{kr})) - 1/r.
 \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\varphi(u_{kr}) \rightarrow 1$, и, значит, $u_{kr} \rightarrow 0$. Таким образом, все u_{ir} стремятся к нулю при $r \rightarrow \infty$.

4) Рассмотрим пространство $\mathcal{F}_0$ ограниченных функций на X^k , обладающих в каждой точке пространства β -производной и удовлетворяющих условию Липшица. По условию это пространство содержит ненулевой элемент – холм-функцию. Мы будем рассматривать $\mathcal{F}_0$ вместе с C^1 -нормой. Не представляет труда доказать, что полученное таким образом нормированное пространство полно. Пусть, наконец, $\mathcal{F}$ – подпространство $\mathcal{F}_0$, состоящее из функций $\psi(x_1, \dots, x_k) = \psi_1(x_1) + \dots + \psi_k(x_k)$. Применяя вариационный принцип Девилля–Годефруа–Зизлера¹¹ [25] к функции p_r и пространству $\mathcal{F}$, найдем функцию $\psi_r \in \mathcal{F}$ такую, что ее норма в $\mathcal{F}$ не превосходит $1/r$ и $p_r - \varphi_r$ имеет минимум в некоторой точке $(u_{1r}, \dots, u_{kr})$.

Это значит, что для всякого $i < k$ функция

$$x \mapsto f_i(x) + \gamma_r(x - u_{kr}) - \psi_{ri}(x)$$

достигает минимума в точке u_{ir} . Если теперь обозначить через $-u_{ir}^*$ β -производную функции γ_r в точке $u_{ir} - u_{kr}$, а через v_{ir}^* β -производную функции ψ_{ri} в u_{ir} , то отсюда немедленно следует, что

$$x_{ir}^* = u_{ir}^* + v_{ir}^* \in \partial_{\beta} f_i(u_{ir}).$$

¹¹ Пусть f – полунепрерывная и ограниченная снизу функция на банаховом пространстве X , и пусть $\mathcal{F}$ – некоторое банахово пространство непрерывных функций на X со следующими свойствами: (а) $\mathcal{F}$ устойчиво относительно сдвигов и гомотетий в X (т.е. вместе с каждой $\varphi(x)$ оно содержит все функции $x \mapsto \varphi(\lambda x + u)$) и соответствующие операции из $X \times \mathbb{R}$ в $\mathcal{F}$ непрерывны; (б) норма в $\mathcal{F}$ не слабее нормы равномерной сходимости. Тогда совокупность тех $\varphi \in \mathcal{F}$, при которых функция $f - \varphi$ имеет в точности один глобальный минимум, является множеством второй категории Бэра в $\mathcal{F}$.

Точно так же: функция

$$x \mapsto f_{kr}(x) + \sum_{i=1}^{k-1} \gamma_r(u_{ir} - x) + \delta(1 - \varphi(x)) - \psi_r k(x)$$

достигает минимума в u_{kr} , и если обозначить производную φ в этой точке через w_r^* , то

$$x_{kr}^* = w_r^* - \sum_{i=1}^{k-1} u_{ir}^* + v_{kr}^* \in \partial_\beta f(u_{kr}).$$

Таким образом,

$$\sum x_{ir}^* = w_r^* + \sum v_{ir}^* \in \sum \partial_\beta f_i(u_{ir}).$$

Остается заметить, что в силу выбора ψ_r значение p_r в $(u_{1r}, \dots, u_{kr})$ отличается от a_r не более чем на $1/r$, $\|w_r^*\| < \varepsilon/2$ в силу выбора δ и $\|v_{ir}^*\| \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$.

Для функций на пространствах доверия справедливы “фаззи”-обобщения многих основных теорем анализа, включая теорему о среднем, теоремы Люстерника–Грейвса (см. следующую главу), правило множителей Лагранжа. Вместе с тем одного свойства (2) оказывается недостаточно для получения аналогов основных правил исчисления производных и выпуклых субдифференциалов. Однако для основных конкретных субдифференциалов такие аналоги существуют.

ТЕОРЕМА 2. Пусть X – банахово пространство и $f_1, \dots, f_k$ – функции, удовлетворяющие условию Липшица в окрестности точки $x \in X$. Пусть ∂ – некоторый субдифференциал и $x^* \in \partial(f_1 + \dots + f_k)(x)$. Тогда

1. Если в X существует β -дифференцируемая липшицева холм-функция и $\partial = \partial_\beta$, то для любой слабой* окрестности нуля $V \subset X^*$ и любого $\varepsilon > 0$ найдутся $x_1, \dots, x_k, x_1^*, \dots, x_k^*$ такие, что

$$\|x_i - x\| < \varepsilon, \quad x_i^* \in \partial f_i(x_i), \quad i = 1, \dots, k \quad \& \quad x^* \in x_1^* + \dots + x_k^* + V;$$

2. Если X – пространство Асплунда и $\partial = \partial_F$, то для всякого $\varepsilon > 0$ существуют $x_1, \dots, x_k, x_1^*, \dots, x_k^*$ такие, что

$$\|x_i - x\| < \varepsilon, \quad x_i^* \in \partial f_i(x_i), \quad i = 1, \dots, k \quad \& \quad \|x_1^* + \dots + x_k^* - x^*\| < \varepsilon;$$

3. Включение

$$(3) \quad \partial(f_1 + \dots + f_k)(x) \subset \partial f_1(x) + \dots + \partial f_k(x)$$

выполняется в следующих четырех случаях:

- 3a) в X существует эквивалентная β -дифференцируемая норма¹² и ∂ – предельный β -субдифференциал;
- 3b) X – пространство Асплунда и ∂ – предельный субдифференциал Фреше;
- 3c) X – произвольное банахово пространство и ∂ – аппроксимационный субдифференциал;
- 3d) X – произвольное банахово пространство и ∂ – обобщенный градиент Кларка.

¹²Можно также потребовать, чтобы в X существовала липшицева β -дифференцируемая холм-функция и единичный шар в X^* был секвенциально слабо* компактным.

Доказательство всех утверждений теоремы, за исключением 3d), следует из теоремы 1 и предложений 1 и 2. Что касается последнего утверждения 3d), то оно немедленно следует из соответствующего включения для выпуклых функций в силу очевидного неравенства $(f_1 + \dots + f_k)^\circ(x) \leq f_1^\circ(x) + \dots + f_k^\circ(x)$.

Более подробную информацию о субдифференциалах и их свойствах можно найти в [13], [16], [15], [18], [21], [22], [36], [47], [49], [51], [53], [67], [75], [79], [91], [97].

Глава 3. Субдифференциальное исчисление и локальная регулярность

Взаимодействие между метрической регулярностью и субдифференциальным исчислением обоюдно и весьма плодотворно. С одной стороны, в течение многих лет теория субдифференциалов предоставляла основной аппарат для характеристики локальной (а в некоторых случаях и нелокальной) метрической регулярности и полученные с ее помощью критерии широко применялись в приложениях¹³. С другой стороны, все квалификационные условия в наиболее развитых теоремах субдифференциального исчисления суть условия метрической регулярности специальных многозначных отображений. Всюду в этой главе мы говорим о метрической регулярности, читатель без труда сможет переформулировать все результаты для накрывания или псевдо-липшицева свойства обратного отображения.

§ 1. Субдифференциальные критерии локальной метрической регулярности

1.1. Основное достаточное условие. Следующее предложение объясняет роль и возможности субдифференциалов как подходящего языка для формулирования критериев локальной регулярности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть ∂ – некоторый субдифференциал и X – пространство доверия для ∂ . Пусть далее f – полунепрерывная функция на X и U – открытое подмножество X . Тогда

$$\inf_{x \in U} |\nabla f|(x) \geq \inf \{\|x^*\| : x^* \in \partial f(x), x \in U\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $m = \inf_{x \in U} |\nabla f|(x)$. Зададимся $\varepsilon > 0$ и выберем $\bar{x} \in U$ с $|\nabla f|(\bar{x}) < m + \varepsilon$. Тогда

$$g(u) = f(u) + (m + \varepsilon)\|\bar{x} - u\| \geq f(\bar{x}) = g(\bar{x})$$

для всех u , достаточно близких к $\bar{x}$. Согласно **(SD₃)**, **(SD₇)** субдифференциал функции $(m + \varepsilon)\|\bar{x} - u\|$ в любой точке содержится в шаре $(m + \varepsilon)B$. Поэтому, коль скоро X – пространство доверия для ∂ , в U найдется точка x такая, что множество $\partial f(x) + (m + \varepsilon)B$ пересекается с шаром радиуса ε с центром в нуле. Это значит, что найдется $x^* \in \partial f(x)$ такой, что $\|x^*\| \leq m + 2\varepsilon$. Предложение доказано.

Непосредственное использование доказанного предложения для получения достаточных условий регулярности из теоремы 1.3 возможно, однако, лишь когда мы располагаем хорошими оценками для субдифференциалов сложных функций типа (2.3), как,

¹³См. однако введение.

например, в случае предельных или аппроксимационного субдифференциалов. В общем случае подобных оценок нет, и поэтому предложение 1 следует рассматривать, скорее, как наглядную иллюстрацию и объяснение существа дела. Доказываемая ниже теорема, содержащая основное достаточное условие локальной регулярности, требует в общем случае независимого доказательства.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $F: X \rightrightarrows Y$ — замкнутое многозначное отображение и $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{Gr } F$. Предположим, что $X \times Y$ является пространством доверия для субдифференциала ∂ . Предположим далее, что существуют $r > 1$ и $K > 0$ такие, что для всех (x, y) из некоторой окрестности U точки $(\bar{x}, \bar{y})$ оценка

$$(1) \quad \|x^*\| \geq 1$$

выполняется, как только $(x^*, y^*) \in r\partial d_K((x, y), \text{Gr } F)$ и $\|y^*\| = K$.

Тогда F регулярно вблизи $(\bar{x}, \bar{y})$ с нормой, не превосходящей K .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное: F не является регулярным вблизи $(\bar{x}, \bar{y})$ с нормой, не превосходящей K . Согласно теореме 1.3 это означает, что в любой окрестности $(\bar{x}, \bar{y})$ найдется точка $(\tilde{x}, \tilde{y})$ с $\tilde{y} \notin F(\tilde{x})$ такая, что

$$|\nabla f|(\tilde{x}) < 1,$$

где $f(x) = d_K((x, \tilde{y}), \text{Gr } F)$.

Выберем такую точку $(\tilde{x}, \tilde{y})$. Тогда из определения сильного наклона следует существование $\mu \in (0, 1)$, $\alpha \in (0, 1)$ таких, что при $\|x - \tilde{x}\| < \alpha$

$$(2) \quad d_K((x, \tilde{y}), \text{Gr } F) + \mu\|x - \tilde{x}\| \geq d_K((\tilde{x}, \tilde{y}), \text{Gr } F).$$

По условию $d_K((\tilde{x}, \tilde{y}), \text{Gr } F) = \gamma > 0$. Проверим, что найдутся $\varepsilon > 0$, $\xi > 0$ такие, что

$$(3) \quad (u, v) \in \text{Gr } F \text{ \& } \|u - \tilde{x}\| + K\|v - \tilde{y}\| \leq \gamma + \varepsilon \implies \|v - \tilde{y}\| \geq \xi.$$

Если бы это было не так, то можно было бы найти последовательность пар $(u_n, v_n) \in \text{Gr } F$, для которой $\|u_n - \tilde{x}\| \rightarrow \gamma$, $\|v_n - \tilde{y}\| \rightarrow 0$. Выберем $\beta \in (0, 1)$ из условия $\beta\gamma < \alpha$ и положим $x_n = \beta u_n + (1 - \beta)\tilde{x}$. Тогда $\|x_n - \tilde{x}\| = \beta\|u_n - \tilde{x}\| \rightarrow \beta\gamma$, т.е. (2) выполняется для $x = x_n$ при больших n . С другой стороны,

$$\begin{aligned} d_K((x_n, \tilde{y}), \text{Gr } F) &\leq \|x_n - u_n\| + K\|v_n - \tilde{y}\| \\ &= (1 - \beta)\|u_n - \tilde{x}\| + K\|v_n - \tilde{y}\| \\ &\rightarrow (1 - \beta)\gamma = d_K((\tilde{x}, \tilde{y}), \text{Gr } F) - \lim \|x_n - \tilde{x}\|, \end{aligned}$$

что противоречит (2).

Выберем теперь δ столь малым, чтобы

$$(4) \quad 2\delta < \xi; \quad \mu + 4\delta < 1; \quad \delta < \min\{1, K\}(r - 1),$$

и найдем $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in \text{Gr } F$, удовлетворяющие неравенству

$$\|\tilde{u} - \tilde{x}\| + K\|\tilde{v} - \tilde{y}\| < d_K((\tilde{x}, \tilde{y}), \text{Gr } F) + \delta^2.$$

В силу (3) для этих $(\tilde{u}, \tilde{v})$ имеем

$$(5) \quad \|\tilde{v} - \tilde{y}\| \geq \xi.$$

Применяя принцип Экланда к функции

$$\|x - u\| + K\|v - \tilde{y}\| + \mu\|x - \tilde{x}\|,$$

рассматриваемой как функция на $X \times \text{Gr } F$, найдем точку (x_1, u_1, v_1) такую, что $v_1 \in F(u_1)$,

$$\|x_1 - \tilde{x}\| + \|u_1 - \tilde{u}\| + \|v_1 - \tilde{v}\| < \delta$$

и функция

$$g(x, u, v) = \|x - u\| + K\|v - \tilde{y}\| + \mu\|x - \tilde{x}\| + \delta(\|x - x_1\| + \|u - u_1\| + \|v - v_1\|)$$

имеет абсолютный минимум на $X \times \text{Gr } F$ в (x_1, u_1, v_1) .

Функция эта удовлетворяет условию Липшица по u с константой $1 + \delta < r$ и по v с константой $K + \delta < rK$. Поэтому функция

$$(6) \quad g(x, u, v) + rd_K((u, v), \text{Gr } F)$$

имеет в (x_1, u_1, v_1) абсолютный минимум на всем пространстве.

Поскольку по условию $X \times X \times Y$ есть пространство доверия для ∂ , в δ -окрестностях точек x_1, u_1 и v_1 найдутся точки $x_2, x_3, u_2, u_3, v_2, v_3$, а также функционалы:

$$\begin{aligned} (x^*, y^*), & \text{ принадлежащий субдифференциалу } rd_K(\cdot, \text{Gr } F) \text{ в } (u_3, v_3); \\ u^*, & \text{ принадлежащий субдифференциалу } \|\cdot\|_X \text{ в точке } x_2 - u_2; \\ w^*, & \text{ принадлежащий субдифференциалу } \|\cdot\|_X \text{ в точке } x_3 - \tilde{x}; \\ v^*, & \text{ принадлежащий субдифференциалу } \|\cdot\|_Y \text{ в точке } v_2 - \tilde{y}, \end{aligned}$$

удовлетворяющие соотношениям

$$\|u^* + w^*\| < 2\delta, \quad \|-u^* + x^*\| < 2\delta, \quad \|Kv^* + y^*\| < 2\delta.$$

Имеем: $\|v_2 - \tilde{y}\| \geq \|\tilde{v} - \tilde{y}\| - \|\tilde{v} - v_1\| - \|v_1 - v_2\| \geq \xi - 2\delta > 0$, откуда следует, что $\|v^*\| = 1$ и, следовательно, $\|y^* - K\| \leq 2\delta$. С другой стороны, $\|x^*\| \leq \mu + 4\delta < 1$, и мы приходим к противоречию с условиями теоремы, коль скоро $(u_3, v_3) \rightarrow (\tilde{x}, \tilde{y})$, а $\|y^*\| \rightarrow K$ при подходящем выборе $(\tilde{x}, \tilde{y})$ и $\delta \rightarrow 0$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если ∂ – аппроксимационный или предельный субдифференциал, для которого включение $\partial(f + g)(x) \subset \partial f(x) + \partial g(x)$ справедливо для липшицевых функций на данных пространствах, то заключительная часть доказательства остается в силе при x_i, u_i и v_i , совпадающих с x_1, u_1 и v_1 соответственно, и, следовательно, в теореме 1 достаточно потребовать, чтобы (1) выполнялось лишь для (x, y) , принадлежащих графику многозначного отображения. Аналогичное ослабление условий возможно и в случае, когда в X имеется эквивалентная β -дифференцируемая норма и ∂ – субдифференциал.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если данное пространство есть пространство доверия для двух субдифференциалов ∂ и ∂' и при этом один из них меньше другого в том смысле, что тождественно выполняется включение $\partial f(x) \subset \partial' f(x)$, то с помощью меньшего субдифференциала получаются, вообще говоря, более точные оценки регулярности. Таким образом, предпочтительно работать с возможно меньшими субдифференциалами (разумеется, коль скоро речь идет о регулярности, накрывании и липшицевых свойствах).

Мы закончим обсуждение общих субдифференциальных критериев регулярности формулировкой варианта теоремы 1, который немедленно следует из доказательства теоремы 1, если вместо (6) взять функцию $g(x, u, v) + \chi_{\text{Gr } F}(u, v)$. Теорема 1 предлагает несколько более точную оценку, но мы увидим далее, что даже этот “ослабленный вариант” оказывается необходимым условием регулярности в некоторых интересных случаях (см. ниже п. 1.3).

ТЕОРЕМА 1а. В предположениях теоремы 1 для константы накрывания F вблизи $(\bar{x}, \bar{y})$ справедлива оценка:

$$\text{Sur } F(\bar{x}, \bar{y}) \geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \{ \|x^*\| : x^* \in D^*F(x, y)(y^*), \|y^*\| \geq 1, (x, y) \in B(\bar{x}, \varepsilon) \times B(\bar{y}, \varepsilon) \}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение теоремы 1 можно переформулировать следующим образом: для нормы регулярности отображения F вблизи $(\bar{x}, \bar{y})$ справедлива оценка

$$\text{Reg } F(\bar{x}, \bar{y}) \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \{ \|y^*\| : x^* \in D^*F(x, y)(y^*), \|x^*\| \leq 1, (x, y) \in B(\bar{x}, \varepsilon) \times B(\bar{y}, \varepsilon) \},$$

и воспользоваться тем, что норма регулярности константа накрывания взаимно обратны в силу предложения 2 гл. 1.

1.2. Аппроксимационный субдифференциал и точечные достаточные критерии. Теорема Люстерника–Грейвса просто следует из теоремы 1. Однако, сопоставляя эти теоремы, мы видим, что они формулируются по-разному. В первом случае мы используем только производную в данной точке, а во втором должны просматривать субдифференциалы во всех точках ее окрестности. В приложениях это часто неудобно, например, когда речь идет о необходимых условиях экстремума.¹⁴

Условие теоремы Люстерника–Грейвса, позволяющее ограничиться только производной в данной точке, — это непрерывность производной. Наиболее далекое известное обобщение этого условия, ведущее к получению “точечного критерия” регулярности, формулируется следующим образом.

¹⁴В принципе, конечно, возможно сформулировать “фаззи”-правило множителей Лагранжа, как это сделано, скажем в [16], [47]. Однако такие необходимые условия ни в коей мере не могут рассматриваться как окончательный результат — это скорее полуфабрикат, а не готовый к употреблению продукт — ибо смысл всяких необходимых условий, от правила множителей Лагранжа до принципа максимума Понтрягина, состоит в замене задачи на экстремум уравнением, неравенством и т. д.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $F: X \rightrightarrows Y$ и ∂ – некоторый субдифференциал. Скажем, что F компактно по конаправлениям относительно ∂ (или ∂ -компактно по конаправлениям) в точке $(\bar{x}, \bar{y})$, если для любой последовательности четверок (x_n, y_n, x_n^*, y_n^*) таких, что

- (1) $(x_n, y_n) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y}), y_n \in F(x_n)$;
- (2) $x_n^* \in D^*F(x_n, y_n)(y_n^*), \|x_n^*\| \rightarrow 0$;
- (3) $\sup_n \|y_n^*\| < \infty$,

из слабой* сходимости y_n^* к нулю следует сходимость по норме.

Вот несколько важных примеров, в которых условие компактности по конаправлениям выполняется:

- (a) $\dim Y < \infty$;
- (b) $F = Ax + G(x)$, где A – линейный ограниченный оператор, отображающий X на замкнутое подпространство конечной размерности, а G – отображение, обладающее тем свойством, что для некоторого компактного подмножества $Q \subset Y$ справедливо соотношение $G(x + h) \subset G(x) + \|h\|Q + r(x, \|h\|)$, где $t^{-1}r(x, t) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \bar{x}, t \rightarrow 0$. В частности, если F непрерывно (или строго) дифференцируемо в $\bar{x}$, то оно компактно по конаправлениям тогда и только тогда, когда $\text{codim}(\text{Im } F'(\bar{x})) < \infty$.
- (c) $X = Y = C^n[0, 1]$ и F задается следующим образом:

$$x(\cdot) \mapsto x(t) - \int_0^t \Phi(x(s)) ds,$$

где $\Phi: \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$. (Подобные отображения естественно возникают в теории оптимального управления дифференциальными включениями.)

Из определения следует, что свойство компактности по конаправлениям наследуется меньшими субдифференциалами, именно, если ∂, ∂' – два субдифференциала и включение $\partial f(x) \subset \partial' f(x)$ всегда верно, то из компактности по конаправлениям относительно ∂' следует компактность относительно ∂ . С другой стороны, ясно, что субдифференциал должен обладать некоторой устойчивостью по отношению к вариациям точки, в которой он вычисляется, чтобы с его помощью можно было бы формулировать точечные критерии. Поэтому ввиду свойства минимальности аппроксимационный субдифференциал кажется наиболее подходящим инструментом для получения универсальных точечных критериев.¹⁵

В условиях теоремы Люстерника–Грейвса условие компактности по направлениям для аппроксимационного субдифференциала выполняется, так как непрерывность

¹⁵ Борвейн и Фитцпатрик [12] построили пример липшицевой функции на асплундовом пространстве, у которой в некоторой точке предельный субдифференциал Фреше меньше аппроксимационного субдифференциала. Этот пример остается пока единственным, в котором первый ведет себя лучше, чем второй. Следует отметить, что пространство в примере Борвейна и Фитцпатрика было в высшей степени “патологическим”: пространство непрерывных функций на ординальном отрезке от нуля до первого трансфинитного ординала. До сих пор все предпринимавшиеся попытки найти содержательный пример (например, связанный с нерегулярностью), в котором с помощью предельного субдифференциала Фреше в пространстве Асплунда (которое необходимо не должно быть слабо компактно порожденным) можно было бы получить более сильный результат, чем с помощью аппроксимационного субдифференциала, были безуспешными, и этот вопрос остается открытым.

производной относительно равномерной операторной топологии в Y и условие Люстерника $\text{Im } F'(\bar{x}) = Y$ гарантируют существование такого $k > 0$, что $\|(F')^*(x)y^*\| \geq k\|y^*\|$ для всякого y^* из единичного шара пространства Y^* и всякого x из достаточно малой окрестности $\bar{x}$.

В общем случае положим

$$\text{Ker } D^*F(x, y) = \{y^* : 0 \in D^*F(x, y)(y^*)\}.$$

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что замкнутое многозначное отображение $F: X \rightrightarrows Y$ компактно по конаправлениям относительно аппроксимационного субдифференциала в точке $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{Gr } F$. Пусть далее $\text{Ker } D^*F(\bar{x}, \bar{y}) = \{0\}$. Тогда F метрически регулярно вблизи $(\bar{x}, \bar{y})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам надлежит проверить, что в предположениях теоремы выполняются и условия теоремы 1. Если допустить, что это не так, то для всякого n найдутся (x_n, y_n, x_n^*, y_n^*) такие, что (x_n, y_n) принадлежит $(1/n)$ -окрестности $(\bar{x}, \bar{y})$, $(x_n^*, y_n^*) \in 2\partial d_n((x_n, y_n), \text{Gr } F)$, $\|y_n^*\| = n$ и $\|x_n^*\| < 1$. При этом согласно замечанию 1 мы можем считать, что $y_n \in F(x_n)$. В этом случае $\lambda(x_n^*, y_n^*) \in r\partial d((x_n, y_n), \text{Gr } F)$ для всякого $\lambda \in [0, 1]$ в силу монотонности и звездности аппроксимационного субдифференциала функции расстояния.

Пусть v^* – некоторая слабо*-предельная точка последовательности $\{y_n^*/n\}$. Тогда $(0, v^*) \in r\partial d((\bar{x}, \bar{y}), \text{Gr } F)$, т.е. $0 \in D^*F(\bar{x}, \bar{y})(v^*)$, а это согласно условию теоремы означает, что $v^* = 0$. Таким образом, нуль – единственная слабо*-предельная точка последовательности $\{y_n^*/n\}$, т.е. последовательность слабо* сходится к нулю. Но из свойства компактности по конаправлениям следует, что в этом случае последовательность должна сходиться сильно, что невозможно, ибо нормы элементов последовательности равны единице. Мы, таким образом, приходим к противоречию, завершающему доказательство.

1.3. Субдифференциалы Фреше и необходимое условие регулярности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пусть ∂ – субдифференциал Фреше. Тогда для всякой функции f и всякого x справедливо неравенство*

$$|\nabla f|(x) \leq \inf \{\|x^*\| : x^* \in \partial f(x)\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\partial f(x) = \emptyset$, неравенство верно в силу соглашения, что $\inf \emptyset = \infty$. Если же $x^* \in \partial f(x)$, то по определению

$$f(x+h) - f(x) - \langle x^*, h \rangle \geq r(h)\|h\|,$$

где $r(h) \rightarrow 0$ при $\|h\| \rightarrow 0$. Следовательно для всякого h

$$\frac{f(x) - f(x+h)}{\|h\|} \leq \|x^*\| + r(h),$$

откуда требуемое неравенство следует немедленно.

Комбинируя этот результат с предложением 1 и второй частью предложения 2.3, получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть X – пространство Асплунда и ∂ – субдифференциал Фреше. Тогда для всякой полунепрерывной функции f и всякого открытого множества $U \subset X$

$$\inf_{x \in U} |\nabla f|(x) = \inf \{\|x^*\| : x^* \in \partial f(x), x \in U\}.$$

Таким образом, следует ожидать ввиду все той же теоремы 1.3, что с помощью субдифференциала Фреше можно сформулировать необходимое условие метрической регулярности для отображений произвольных банаховых пространств, которое в случае пространств Асплунда оказывается в силу теоремы 1 также и достаточным.

ТЕОРЕМА 3. Пусть X и Y – произвольные банаховы пространства и D^* – копроизводная, ассоциированная с субдифференциалом Фреше. Пусть далее F – замкнутое многозначное отображение из X в Y , метрически регулярное вблизи $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{Gr } F$ с нормой, меньшей некоторого $K > 0$. Тогда существует окрестность U точки $(\bar{x}, \bar{y})$ такая, что для всех $(x, v) \in U \cap \text{Gr } F$ и всех (x^*, y^*) с $\|y^*\| = 1$, $x^* \in D^*F(x, v)(y^*)$ справедливо неравенство $\|x^*\| \geq K^{-1}$.

Таким образом, если X и Y – пространства Асплунда, то согласно теореме 1 данное условие является необходимым и достаточным для регулярности отображения F с нормой, не превосходящей K .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 1.2 существуют окрестность U точки $(\bar{x}, \bar{y})$ и $\alpha > 0$ такие, что $|\nabla \varphi_y|(x, v) \geq (K + \alpha)^{-1}$ для всех $(x, v) \in U \cap \text{Gr } F$ и всех $y \in Y$ (где наклон вычисляется относительно α -метрики в $X \times Y$).

По теореме Бишопа–Фелпса [10] во всяком сопряженном пространстве множество точек единичной сферы, в которых она имеет нормаль, принадлежащую исходному пространству, плотно в метрической топологии сопряженного пространства. Это значит, что для всякого элемента y^* единичной сферы Y^* и всякого $\varepsilon > 0$ найдется пара (w, w^*) такая, что $w \in Y$, $w^* \in Y^*$, $\|w\| = \|w^*\| = \langle w, w^* \rangle = 1$ и $\|y^* - w^*\| < \varepsilon$.

Пусть теперь $(x, v) \in U \cap \text{Gr } F$ и $x^* \in D^*F(x, v)(y^*)$, т.е. $(x^*, -y^*) \in \partial \chi_{\text{Gr } F}(x, v)$ и при этом $\|y^*\| = 1$. Зададимся $\varepsilon > 0$ и выберем (w, w^*) в соответствии с рекомендацией предыдущего абзаца. Положим, наконец, $y = v + \bar{w}$ и рассмотрим функцию

$$\varphi_y(u, w) = \|y - w\| + \chi_{\text{Gr } F}(u, w).$$

Это значит, что w^* принадлежит субдифференциалу нормы $\|\cdot\|_Y$ в $\bar{w}$ и $\|w^* - y^*\| < \varepsilon$. Поскольку $(0, w^*)$ принадлежит субдифференциалу функции $\|\cdot\|_Y$ (рассматриваемой как функция на $X \times Y$) в (x, v) , получаем, используя включение, противоположное (2.3), которое, как отмечалось в начале §2 гл. 2, всегда выполняется для субдифференциала Фреше:

$$(0, w^*) + (x^*, -y^*) \in \partial \varphi_y(x, v).$$

В силу предложения 2 отсюда следует, что

$$\|x^*\| + \varepsilon \alpha \geq |\nabla \varphi_y|(x, v) \geq K^{-1}.$$

Это неравенство справедливо для всякого $\varepsilon > 0$, и, следовательно, $\|x^*\| \geq K^{-1}$. Теорема доказана.

В качестве немедленного следствия мы получаем следующий красивый критерий локальной регулярности отображений конечномерных пространств.

ТЕОРЕМА 4. Если X и Y – конечномерные банаховы пространства, то для регулярности F вблизи $(\bar{x}, \bar{y})$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\text{Ker } D^*F(\bar{x}, \bar{y}) = \{0\},$$

где D^* – копроизводная, ассоциированная с предельным субдифференциалом.

Достаточность следует из теоремы 2 в силу автоматической компактности по направлениям конечномерных отображений. Для доказательства необходимости достаточно заметить, что в силу теоремы 3 $\|x^*\| \geq k^{-1}\|y^*\|$, если x^* принадлежит копроизводной Фреше $D_F^*F(x, y)(y^*)$ при (x, y) , достаточно близких к $(\bar{x}, \bar{y})$, и, следовательно, то же соотношение выполняется для предельной копроизводной в таких точках, в частности, в самой $(\bar{x}, \bar{y})$.

§ 2. Регулярность в точке и исчисление субдифференциалов нелипшицевых функций

Мы видели во второй главе (теорема 2.2), что аппроксимационный субдифференциал суммы липшицевых функций принадлежит сумме аппроксимационных субдифференциалов слагаемых в той же точке. Это уже настоящее исчисление, хотя и одно-стороннее, и не случайно этот результат играет важную роль во многих теоремах и приложениях негладкого анализа. Нетрудно видеть, что для функций, не удовлетворяющих условию Липшица, этот результат неверен: рассмотрим, например, следующие две функции на прямой:

$$f_1(x) = \begin{cases} -\sqrt{|x|} & \text{при } x < 0, \\ 0 & \text{при } x \geq 0; \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x > 0, \\ \sqrt{x} & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$

Тогда $(f_1 + f_2)(x) = \sqrt{|x|} \cdot \text{sign } x$ и $\partial f_1(0) = \{0\}$, $\partial f_2(0) = [0, \infty)$, $\partial(f_1 + f_2)(0) = \emptyset$ (где ∂ – предельный субдифференциал).

Тем не менее, “точные” включения для субдифференциалов сложных функций с нелипшицевыми составляющими могут быть получены при некоторых дополнительных предположениях, обычно содержащих условия двух типов: условия компактности, подобные рассмотренным в предыдущем параграфе, и так называемые квалификационные условия типа условий Мангасаряна–Фромовица в нелинейном программировании, которые всегда оказываются связанными с условиями регулярности в точке некоторых специальных многозначных отображений.

В дальнейшем мы будем говорить лишь об аппроксимационных субдифференциалах, поэтому поясняющие индексы будут всюду опущены. Заметим, что все результаты с очевидными изменениями переносятся на случай предельного субдифференциала Фреше в пространствах Асплунда. Неизвестно, верны ли аналогичные результаты для β -предельных субдифференциалов в пространствах β -дифференцируемости.

2.1. Нормальный конус к пересечению множеств. Пусть $S_1, \dots, S_k$ – подмножества банахова пространства X и $\bar{x} \in S = \bigcap S_i$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Предположим, что существует $K > 0$ такое, что

$$(7) \quad d(x, S) \leq K \sum_{i=1}^k d(x, S_i)$$

для всех x из окрестности $\bar{x}$. Тогда

$$(8) \quad N(S, \bar{x}) \subset N(S_1, \bar{x}) + \cdots + N(S_k, \bar{x}).$$

Доказательство немедленно следует из предложения 2.5 и теоремы 2.2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Неравенство (7) является условием регулярности в точке $(\bar{x}, (0, \dots, 0))$ следующего многозначного отображения $F: X \rightrightarrows X^k$:*

$$F(x) = (S_1 - x) \times \cdots \times (S_k - x).$$

Для доказательства достаточно заметить, что (полагая, что в X^k задана аддитивная метрика)

$$d((x_1, \dots, x_k), F(x)) = d(x + x_1, S_1) + \cdots + d(x + x_k, S_k)$$

и

$$F^{-1}((x_1, \dots, x_k)) = \bigcap \{x : x_i \in S_i - x\} = \bigcap (S_i - x_i),$$

так что $F^{-1}((0, \dots, 0)) = \bigcap S_i = S$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Скажем, что множества $S_1, \dots, S_k$ находятся в общем положении вблизи $\bar{x} \in S_1 \cap \cdots \cap S_k$, если для всякой последовательности наборов $(x_{1n}, \dots, x_{kn}, x_{1n}^*, \dots, x_{kn}^*)$ таких, что $x_{in} \in S_i$, $x_{in} \rightarrow \bar{x}$, $x_{in}^* \in N(S_i, x_{in})$, $i = 1, \dots, k$, из того, что $\|x_{1n}^* + \cdots + x_{kn}^*\| \rightarrow 0$ и нормы $\|x_{in}^*\|$ ограничены в совокупности, следует, что все x_{in}^* сходятся к нулю по норме.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Если множества S_i , $i = 1, \dots, k$, находятся в общем положении вблизи $\bar{x} \in \bigcap S_i$, то F компактно по конаправлениям в $(\bar{x}, (0, \dots, 0))$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Начнем с вычисления копроизводной. Имеем

$$d((x, (x_1, \dots, x_k)), \text{Gr } F) = \sum_{i=1}^k d(x_i, S_i - x) = \sum_{i=1}^k d(x + x_i, S_i).$$

Обозначим

$$g_i(x, x_1, \dots, x_k) = d(x + x_i, S_i), \quad h_i(x, u) = d(x + u, S_i).$$

По теореме 2.2

$$\partial d((x, (x_1, \dots, x_k)), \text{Gr } F) \subset \partial g_1(x, x_1, \dots, x_k) + \cdots + \partial g_k(x, x_1, \dots, x_k).$$

Далее, в силу **(SD₆)** $\partial g_i(x, x_1, \dots, x_k)$ есть декартово произведение $\partial h_i(x, x_i)$ на нули во всех компонентах, соответствующих x_j , $j \neq i$. Наконец, согласно **(SD₇)** $\partial h_i(x, u) \subset \{(x^*, x^*) : x^* \in \partial d(x + u, S_i)\}$. Таким образом, если $(x^*, (x_1^*, \dots, x_k^*)) \in \partial d((x, (x_1, \dots, x_k)), \text{Gr } F)$, то $x_i^* \in \partial d(x + x_i, S_i)$ и $x_1^* + \cdots + x_k^* = x^*$.

Таким образом, полагая $y^* = -(x_1^*, \dots, x_k^*)$ и принимая во внимание предложение 2.5, получаем:

$$D^*F(\bar{x}, (0, \dots, 0))(y^*) \subset \begin{cases} x_1^* + \cdots + x_k^*, & \text{если } x_i^* \in N(S_i, \bar{x}); \\ \emptyset & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Справедливость предложения теперь очевидно следует из определений.

Заметим далее, что условие общего положения для $S_1, \dots, S_k$ вблизи $\bar{x}$ влечет следующее *квалификационное условие*:

$$(9) \quad x_i^* \in N(S_i, \bar{x}), \quad i = 1, \dots, n \ \& \ x_1^* + \dots + x_k^* = 0 \implies x_1^* = \dots = x_k^* = 0,$$

к которому ввиду найденного выше выражения для копроизводной F сводится равенство $\text{Ker } D^*F(\bar{x}, (0, \dots, 0)) = \{0\}$.

Таким образом, из предложений 4–6 и теоремы 2 следует

ТЕОРЕМА 5. *Предположим, что S_i замкнутые множества, находящиеся в общем положении вблизи $\bar{x} \in \bigcap S_i$. Тогда включение (8) верно.*

Условия общего положения выполняются, в частности, если множества устроены достаточно просто в окрестности $\bar{x}$ и нормали к множествам в этой точке независимы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Множество $Q \subset X$ *нормально компактно в $\bar{x}$* , если из $x_n \in Q$, $x_n \rightarrow \bar{x}$, $x_n^* \in N(Q, x_n)$ и $x_n^* \rightarrow 0$ слабо* следует, что $x_n^* \rightarrow 0$ по норме.

Очевидно, всякое множество в конечномерном пространстве нормально компактно и множество в произвольном пространстве нормально компактно в каждой своей внутренней точке. Простейший нетривиальный пример нормально компактного множества – это так называемое эпи-липпицево множество, т.е. множество, устроенное в окрестности точки как график липпицевой функции.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Если все множества S_i , за исключением, возможно, одного из них, нормально компактны в $\bar{x}$ и выполнено квалификационное условие (9), то множества S_i находятся в общем положении вблизи $\bar{x}$.*

Подведем итог. Естественным условием, гарантирующим (8), является неравенство (7), эквивалентное регулярности отображения F в соответствующей точке. Поскольку мы не располагаем субдифференциальными критериями регулярности в точке, менее грубыми, чем критерии регулярности в окрестности, мы вынуждены пользоваться последними. Конкретно, в данном случае, мы получаем достаточное условие для (8) с помощью точечного критерия регулярности отображения F вблизи соответствующей точки. Аналогичная ситуация имеет место и для операций с функциями.

2.2. Сумма функций. Пусть теперь имеются полунепрерывные снизу функции $f_1, \dots, f_k$, конечные в точке $\bar{x}$. Положим $f(x) = f_1(x) + \dots + f_k(x)$. В этом пункте мы обсудим основное правило исчисления аппроксимационных субдифференциалов, связывающее субдифференциал суммы с субдифференциалами ее компонент. Начнем с цитирования следующего результата.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8 [49; предложение 6.1]. *Предположим, что существует $K > 0$ такое, что при всяком (x, α) из окрестности $(\bar{x}, f(\bar{x}))$*

$$(10) \quad d((x, \alpha), \text{epi } f) \leq K \sum_{i=1}^k d((x, \alpha_i), \text{epi } f_i)$$

для всех α_i , $i = 1, \dots, k$, достаточно близких к $f_i(\bar{x})$ соответственно и таких, что $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = \alpha$. Тогда

$$(11) \quad \partial f(\bar{x}) \subset \partial f_1(\bar{x}) + \dots + \partial f_k(\bar{x})$$

и

$$(12) \quad \partial^\infty f(\bar{x}) \subset \partial^\infty f_1(\bar{x}) + \dots + \partial^\infty f_k(\bar{x}).$$

Предложение 8 сводит проблему оценки субдифференциала суммы функций к рассмотренной в предыдущем параграфе ситуации. Положим

$$\mathfrak{X} = X \times \mathbb{R}^k; \quad \mathfrak{S}_i = \{\mathfrak{x} = (x, \alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathfrak{X} : \alpha_i \geq f_i(x)\}, \quad \mathfrak{S} = \bigcap_i \mathfrak{S}_i.$$

Тогда, очевидно,

$$d((x, \alpha_1, \dots, \alpha_k), \text{epi } f) \leq d((x, \alpha_1, \dots, \alpha_k), \mathfrak{S}).$$

Иначе говоря, регулярность многозначного отображения

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{x}) = (\mathfrak{S}_1 - \mathfrak{x}) \times \dots \times (\mathfrak{S}_k - \mathfrak{x})$$

из $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{X}^k$, аналогичного введенному в предложении 5, в точке $(\bar{x}, (0, \dots, 0))$ достаточна для справедливости включений (11) и (12).

Анализ условий общности положения и нормальной компактности для множеств $\mathfrak{S}_i$ приводит к естественным функциональным аналогам этих понятий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Скажем, что функции $f_1, \dots, f_k$ находятся в *общем положении* вблизи точки $\bar{x} \in \text{dom } f_1 \cap \dots \cap \text{dom } f_k$, если для всякой последовательности наборов $((x_{1n}, \alpha_{1n}), \dots, (x_{kn}, \alpha_{kn}), (x_{1n}^*, \beta_{1n}), \dots, (x_{kn}^*, \beta_{kn}))$ таких, что

$$\begin{aligned} \alpha_{in} \geq f_i(x_{in}); \quad (x_{in}^*, \beta_{in}) \in N(\text{epi } f_i, (x_{in}, \alpha_{in})); \quad (x_{in}, \alpha_{in}) \rightarrow (\bar{x}, f(\bar{x})), \quad i = 1, \dots, k; \\ \|x_{1n}^* + \dots + x_{kn}^*\| \rightarrow 0, \quad \|x_{1n}\| + \dots + \|x_{kn}\| \leq C < \infty, \quad \beta_{in} \rightarrow 0, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

следует, что все x_{in}^* сходятся к нулю по норме.

(Точная переформулировка определения 2 в нашей ситуации дает $\sum_i \beta_{in} \rightarrow 0$ плюс ограниченность всех β_{in} в совокупности. Но, поскольку $\beta \leq 0$, если $(x^*, \beta) \in N(\text{epi } f, (x, \alpha))$, отсюда следует, что все β_{in} сходятся к нулю.)

Принимая во внимание последнее обстоятельство, находим, что вытекающее из условия общего положения квалификационное условие для функций, аналогичное (9), имеет следующий вид:

$$(13) \quad x_i^* \in \partial^\infty f_i(x), \quad i = 1, \dots, k \text{ \& } x_1^* + \dots + x_k^* = 0 \implies x_1^* = \dots = x_k^* = 0.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Полунепрерывная снизу функция $f(x)$ *нормально компактна* в точке $\bar{x} \in \text{dom } f$, если для всякой последовательности $(x_n, \alpha_n, x_n^*, \beta_n)$ такой, что $\alpha_n \geq f(x_n)$, $x_n \rightarrow \bar{x}$, $\alpha_n \rightarrow f(\bar{x})$, $(x_n^*, \beta_n) \in N(\text{epi } f, (x_n, \alpha_n))$, $\beta_n \rightarrow 0$, из слабой* сходимости x_n^* к нулю следует сходимость по норме.

Простейший нетривиальный пример нормально компактной функции — это ограничение липшицевой функции $f(x)$ на множество S , являющееся замыканием пересечения открытого множества и многообразия конечной коразмерности, т.е. функция $f_S(x)$, равная $f(x)$ на S и бесконечности вне S .

Суммируя сказанное, получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 6. Если функции $f_1, \dots, f_k$ находятся в общем положении вблизи точки $\bar{x}$, то для аппроксимационных субдифференциалов этих функций и их суммы выполнены соотношения (11) и (12).

В частности эти соотношения верны, если все функции, за исключением, возможно, одной из них, нормально компактны в $\bar{x}$ и выполнено квалификационное условие (13).

2.3. Сложная функция. Весьма схожая схема реализуется при оценке субдифференциала композиции $f(x) = g(\Phi(x))$ полунепрерывной функции $g(y)$ на Y и непрерывного отображения $\Phi: X \mapsto Y$. Фиксируем, как обычно, $\bar{x} \in X$ и обозначаем $\bar{y} = \Phi(\bar{x})$, $\bar{\alpha} = f(\bar{x}) = g(\bar{y})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Предположим, что существует $K > 0$ такое, что при всех (x, y, α) из окрестности $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\alpha})$ выполнены соотношения

$$(14) \quad d((x, \alpha), \text{epi } f) \leq K(d((y, \alpha), \text{epi } g) + d((x, y), \text{Gr } \Phi)).$$

Тогда

$$(15) \quad \partial f(\bar{x}) \subset \bigcap_{y^* \in \partial g(\bar{y})} D^* \Phi(x)(y^*)$$

и

$$(16) \quad \partial^\infty f(\bar{x}) \subset \bigcap_{y^* \in \partial^\infty g(\bar{y})} D^* \Phi(x)(y^*).$$

Мы не приводим доказательство предложения, поскольку оно мало связано с основной темой статьи. Заметим лишь, что в большей степени оно следует той же схеме, что и доказательство предложения 6.1 в [49] (предложение 8 в предыдущем пункте).

Как и в случае сумм функций, предложение 9 позволяет свести ситуацию к случаю пересечения множеств, рассмотренному в первом пункте. Действительно, рассмотрим в пространстве $X \times Y \times \mathbb{R}$ множества

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(x, y, \alpha) : (y, \alpha) \in \text{epi } g\} = X \times \text{epi } g; \\ S_2 &= \{(x, y, \alpha) : (x, y) \in \text{Gr } \Phi\} = \text{Gr } \Phi \times \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Эпиграф f есть проекция на $X \times \mathbb{R}$ пересечения S_1 и S_2 . Поэтому

$$d((x, \alpha), \text{epi } f) \leq d((x, y, \alpha), S_1 \cap S_2)$$

и, следовательно, неравенство

$$d((x, y, \alpha), S_1 \cap S_2) \leq K(d((x, y, \alpha), S_1) + d((x, y, \alpha), S_2))$$

достаточно для справедливости (15) и (16).

Расшифровка условия общности положения из определения 2 дает в данном случае следующий результат.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Скажем, что функция g и отображение Φ находятся в *общем положении* вблизи точки $(\bar{x}, \bar{y})$ (где $\bar{y} = \Phi(\bar{x})$), если для всякой последовательности наборов $(x_n, y_{1n}, y_{2n}, \alpha_n, x_n^*, y_{1n}^*, y_{2n}^*, \beta_n)$ такой, что

$$x_n \rightarrow \bar{x}, \quad y_{1n}, y_{2n} \rightarrow \bar{y}, \quad \alpha_n \rightarrow g(\bar{y}), \quad \|x_n^*\| \rightarrow 0, \quad \beta_n \rightarrow 0;$$

$$(y_{1n}^*, \beta_n) \in N(\operatorname{epi} g, (y_{1n}, \alpha_n)), \quad x_n^* \in D^*F(x_n)(-y_{2n}^*), \quad \|y_{1n}^*\| + \|y_{2n}^*\| \leq C < \infty,$$

из сходимости $\|y_{1n}^* + y_{2n}^*\|$ к нулю следует, что y_{1n}^* и y_{2n}^* сходятся к нулю по норме.

Квалификационное условие (9), примененное к S_1 и S_2 , принимает в данном случае вид

$$(17) \quad y^* \in \partial^\infty g(\bar{y}) \ \& \ 0 \in D^*\Phi(\bar{x})(y^*) \implies y^* = 0$$

(или просто $\partial^\infty(\bar{y}) \cap \operatorname{Ker} D^*\Phi(\bar{x}) = \{0\}$).

Наконец, условие нормальной компактности для Φ формулируется следующим образом: если $(x_n, y_n) \in \operatorname{Gr} \Phi$, $(x_n, y_n) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y})$ и $x_n^* \in D^*\Phi(x_n)(y_n^*)$, то из слабой* сходимости (x_n^*, y_n^*) к нулю следует сходимость по норме. Очевидно, что это условие слишком сильно, так как условие общности положения уже содержит требование, чтобы $\|x_n^*\| \rightarrow 0$. Поэтому в данном случае достаточно требовать, чтобы из сильной сходимости x_n^* к нулю и слабой* сходимости y_n^* к нулю следовала бы сильная сходимость y_n^* , а это в точности условие компактности Φ по конаправлениям вблизи $(\bar{x}, \bar{y})$.

Таким образом, мы приходим к следующей теореме.

ТЕОРЕМА 7. Если функция g и отображение Φ находятся в общем положении вблизи $(\bar{x}, \bar{y})$ (где $\bar{y} = \Phi(\bar{x})$), то для субдифференциала f справедливы соотношения (15) и (16).

В частности, это заключение верно, если либо g нормально компактна в $\bar{x}$, либо Φ компактно по конаправлениям в $(\bar{x}, \bar{y})$.

§3. Комментарии

3.1. Кажется в высшей степени странным, что взаимосвязь между сильным наклоном и субдифференциалами до сих пор никем не рассматривалась, хотя, скажем, взаимоотношения слабого наклона с обобщенным градиентом Кларка находились в центре внимания создателей “негладкой теории критических точек” с самого начала (см. [19], где эта взаимосвязь изучена весьма подробно).

Похоже, однако, что предложения 1–3 впервые появляются в настоящей статье.

3.2. Теорема 1 (точнее, теорема 1а) была, по-существу, доказана в [50]. Единственное отличие в формулировке состоит в том, что в [50] используется несколько более сильная форма условия доверительности, покрывающая случай аппроксимационного субдифференциала, обобщенного градиента, субдифференциала Фреше и предельных субдифференциалов в соответствующих пространствах, но не β -субдифференциалов, отличных от субдифференциала Фреше. Однако доказательство, данное в [50], без изменений применимо к рассматриваемой здесь ситуации. Имеются многочисленные работы, в которых достаточные субдифференциальные условия регулярности доказывались для специальных пространств, многозначных отображений и субдифференциалов [3], [8], [16], [22], [59], [64], [69], [78], [80]. Все упомянутые результаты следуют из теорем 1 и 1а.

3.3. “Точечные” достаточные условия регулярности для многозначных отображений конечномерных пространств были получены в [47]. Эти условия были затем распространены на многозначные отображения произвольных банаховых пространств в конечномерные в [3] (для обобщенных градиентов) и в [50] (для аппроксимационных субдифференциалов).¹⁶

Поиск дополнительных условий типа слабой* компактности для доказательства точечных критериев регулярности бесконечномерных отображений начался довольно давно. Первый такой критерий для интегральных операторов, ассоциированных с управляемыми системами, был, видимо, доказан в [48] на основе так называемого “условия конечной коразмерности”, получившего окончательную форму позже в [50], [40]. В частности, в [50] доказан первый вариант теоремы 2. Начавшееся несколько позже интенсивное изучение условий компактности было в большой степени стимулировано работами Борвейна и Стройваса [14] и Лоувена [71]. Было предложено несколько новых обобщающих понятий: “частичная эпиллиптичность” [59], “частичная нормальная компактность” [80]. Последняя работа вместе с [61] и [85] привела к кристаллизации понятия, определенного здесь как (секвенциальная) компактность по конаправлениям. Одновременно в [51] было показано, что топологический эквивалент свойства компактности по конаправлениям, равно как и свойство частичной нормальной компактности, эквивалентны упомянутому ранее свойству конечной коразмерности.

3.4. Теорема 3 была доказана Мордуховичем и Шао [78]. Ее можно интерпретировать как утверждение о том, что в пространствах Асплунда нижняя оценка из теоремы 1а с копроизводной, ассоциированной с субдифференциалом Фреше, является точным значением константы накрывания. Теорема 4 в той форме, в которой она сформулирована здесь, была опубликована в [76]. Необходимость утверждения теоремы была доказана Мордуховичем в [75] и, видимо, независимо Кругером [64], а достаточность – несколько ранее Иоффе [47]. Теорему 4 естественно рассматривать как обобщение альтернативы Фредгольма на многозначные отображения. Можно сформулировать более точный результат, именно, что в условиях теоремы 4 константа накрывания отображения F в $(\bar{x}, \bar{y})$ равна $\min\{\|x^*\| : x^* \in D^*F(\bar{x}, \bar{y})(y^*), \|y^*\| \leq 1\}$. Как нижняя оценка для константы накрывания это выражение было получено в [50], а затем в [76] было доказано, что эта оценка является точной.

3.5. Тот факт, что условия Мангасаряна–Фромова эквивалентны устойчивости отображения “правые части ограничений $\Rightarrow$ допустимое множество” в гладких задачах математического программирования, отмечался уже Робинсоном [89]. Ауслендер [5] обобщил этот результат на негладкие задачи с липшицевыми функциями, используя технику обобщенных градиентов. Окончательный результат в терминах предельного субдифференциала Фреше может быть найден в [91].

Предложение 4 было доказано в [49]. Но пионерами общего подхода к субдифференциальному исчислению, в котором условия регулярности возникают как квалификационные условия подходящих отображений, следует, видимо, считать Журани и

¹⁶ Следует сказать, что в [3] формально доказана “прямая” теорема, в которой условие сформулировано в терминах кларковских касательных конусов. Однако, как мы уже отмечали в комментариях к первой главе, такие результаты всегда можно эквивалентно переформулировать в терминах кларковских нормальных конусов или обобщенных градиентов.

Тибо [60]. Здесь, с небольшими усовершенствованиями, мы следуем схеме, изложенной в [51].

3.6. В заключение следует отметить, что, кроме субдифференциальных критериев регулярности, в локальной теории имеются критерии и других типов: так называемые “прямые”, формулируемые в терминах исходного пространства, таких как касательные конусы, производные по направлениям и т. д. [1], [2], [4], [37], [38], [39], [42], а также критерии промежуточного типа, использующие аппроксимации множествами линейных операторов [20], [46], [65], [96]. Прямые критерии зачастую более наглядны, в то время как субдифференциальные более удобны для формулировки необходимых условий экстремума типа правил множителей. Последнее, вместе с тем обстоятельством, что именно с помощью субдифференциалов были получены первые необходимые условия локальной регулярности, видимо, было причиной того, что субдифференциальным критериям уделялось больше внимания, особенно в последнее время. Однако результаты первой главы, кажется, подтверждают правоту Обэна, многократно, особенно в частных беседах, высказывавшего убеждение, что “прямые” теоремы позволяют в принципе получить более точные результаты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Aubin J. P. Contingent derivatives of set-valued maps and existence of solutions to nonlinear inclusions and differential inclusions // *Adv. Math. Suppl. Stud.* 1981. V. 7A. P. 159–229.
- [2] Aubin J.-P. Lipschitz behavior of solutions to convex optimization problems // *Math. Oper. Res.* 1984. V. 9. P. 87–111.
- [3] Aubin J.-P., Frankowska H. On inverse function theorems for set-valued maps // *J. Math. Pures Appl.* (9). 1987. V. 66. P. 71–89.
- [4] Aubin J.-P., Frankowska H. *Set-Valued Analysis*. Boston: Birkhäuser, 1990.
- [5] Auslender A. Stability in mathematical programming with non-differentiable data // *SIAM J. Control Optim.* 1984. V. 22. P. 239–254.
- [6] Авербух В. И., Смолянов О. Г. Теория дифференцирования в линейных топологических пространствах // *УМН*. 1967. Т. 22. №6. С. 201–260.
- [7] Azé D., Chou C. C., Penot J. P. Subtraction theorems and approximate openness for multifunctions: topological and infinitesimal viewpoints // *J. Math. Anal. Appl.* 1998. V. 221. P. 33–58.
- [8] Azé D., Corvellec J.-N., Lucchetti R. Variational pairs and applications to stability in non-smooth analysis // *Preprint 360/P*. Milano: Politecnico di Milano, 1999.
- [9] Banach S. *Théorie des opérations linéaires*. Warszawa: Subwncji Funduszu Narodowej, 1932.
- [10] Bishop E., Phelps R. The support functional of a convex set // *Proc. Sympos. Pure Math.* 1963. V. 7. P. 27–35.
- [11] Bonnans F., Shapiro A. *Perturbation Analysis of Optimization Problems*. Berlin: Springer-Verlag (to appear).
- [12] Borwein J. M., Fitzpatrick S. P. Weak* sequential compactness and bornological limit derivatives // *J. Convex Anal.* 1995. V. 2. №1–2. P. 59–67.
- [13] Borwein J. M., Ioffe A. D. Proximal analysis in smooth spaces // *Set-Valued Anal.* 1996. V. 4. P. 1–24.
- [14] Borwein J. M., Strojwas H. Tangential approximations // *Nonlinear Anal.* 1985. V. 9. P. 1347–1366.
- [15] Borwein J. M., Zhu Q. J. Multifunctional and functional analytic techniques in non-smooth analysis // *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.* 1999. V. 528. P. 61–157.
- [16] Borwein J. M., Zhu Q. J. A survey on subdifferential calculus with applications // *Nonlinear Anal.* 1999. V. 38. №6. P. 687–773.

- [17] Borwein J. M., Zhuang D. M. Verifiable necessary and sufficient conditions for openness and regularity for set-valued and single-valued maps // J. Math. Anal. Appl. 1988. V. 134. P. 441–459.
- [18] Borwein J. M., Mordukhovich B. S., Shao Y. On the equivalence of some basic principles in variational analysis // J. Math. Anal. Appl. 1999. V. 229. P. 229–256.
- [19] Campa I., Degiovanni M. Subdifferential calculus and nonsmooth critical point theory // Preprint. Brescia: Univ. Cattolica, 1999.
- [20] Clarke F. H. On the inverse function theorem // Pacific J. Math. 1976. V. 64. P. 97–102.
- [21] Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988.
- [22] Clarke F. H., Ledyaev Yu. S., Stern R. J., Wolenski P. R. Nonsmooth Analysis and Control Theory. New York: Springer-Verlag, 1998.
- [23] Cominetti R. Metric regularity, tangent cones and second order optimality conditions // Appl. Math. Optim. 1990. V. 21. P. 265–287.
- [24] Corvellec J. N., Degiovanni M., Marzocchi M. Deformation properties of continuous functionals and critical point theory // Topol. Methods Nonlinear Anal. 1993. V. 1. P. 151–171.
- [25] Deville R., Godefroy G., Zizler V. Smoothness and Renorming in Banach Spaces. Harlow/New York: Longman/Wiley, 1993.
- [26] De Giorgi E., Marino A., Tosques M. Problemi di evoluzione in spazi metrici e curve di massima pendenza // Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. 1980. V. 68. P. 180–187.
- [27] Дмитрук А. В., Милютин А. А., Осмоловский Н. П. Теорема Люстерника и теория экстремума // УМН. 1980. Т. 35. № 6. С. 11–46.
- [28] Dontchev A. L. The Graves theorem revisited // J. Convex Anal. 1996. V. 3. P. 45–53.
- [29] Dontchev A. L. Characterizations of Lipschitz stability in optimization // Recent Development in Well-Posed Variational Problems / ed. R. Lucchetti, J. Revalski. Dordrecht: Kluwer, 1995. P. 95–115.
- [30] Dontchev A. L., Hager W. W. An inverse function theorem for set-valued maps // Proc. Amer. Math. Soc. 1994. V. 121. P. 481–489.
- [31] Dontchev A. L., Hager W. W. Implicit functions, Lipschitz maps and stability in optimization // Math. Oper. Res. 1994. V. 19. P. 753–768.
- [32] Dontchev A. L., Malanowski K. A characterization of Lipschitz stability in optimal control // Preprint. Warsaw: Inst. System Analysis PAN, 1998.
- [33] Ekeland I. Nonconvex minimization problems // Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.). 1979. V. 1. P. 443–474.
- [34] Ekeland I., Lebourg G. Generic Fréchet differentiability and perturbed optimization problems in Banach spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1976. V. 224. P. 193–216.
- [35] Fabian M. On classes of subdifferentiability spaces of Ioffe // Nonlinear Anal. 1988. V. 12. P. 63–74.
- [36] Fabian M. Subdifferentiability and trustworthiness in the light of a new variational principle of Borwein and Preiss // Acta Univ. Carolin. Math. Phys. 1989. V. 30. P. 51–56.
- [37] Frankowska H. An open mapping principle for set-valued maps // J. Math. Anal. Appl. 1987. V. 127. P. 172–180.
- [38] Frankowska H. Higher order inverse function theorems // Ann. Inst. H. Poincaré. Anal. Non-linéaire. 1989. V. 6. P. 283–303.
- [39] Frankowska H. Some inverse mapping theorems // Ann. Inst. H. Poincaré. Anal. Non-linéaire. 1990. V. 7. № 3. P. 183–234.
- [40] Ginsburg B., Ioffe A. D. The maximum principle in optimal control of systems governed by semilinear equations // IMA Vol. Math. Appl. 1996. V. 78. P. 81–110.
- [41] Grasse K. A. A higher order sufficient conditions for local surjectivity // Nonlinear Anal. 1985. V. 9. P. 87–96.
- [42] Graven B. D. Implicit function theorem for Lagrange multipliers // Numer. Funct. Anal. Optim. 1980. V. 2. P. 473–486.
- [43] Graves L. M. Some mapping theorems // Duke Math. J. 1950. V. 17. P. 111–114.

- [44] Hoffman A. On approximate solutions of systems of linear inequalities // J. Res. Nat. Bureau Standards (Section B). 1952. V. 49. P. 263–265.
- [45] Ioffe A. D. Regular points of Lipschitz functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1979. V. 251. P. 61–69.
- [46] Ioffe A. D. Nonsmooth analysis: differential calculus of non-differentiable mappings // Trans. Amer. Math. Soc. 1981. V. 266. P. 1–56.
- [47] Ioffe A. D. Approximate subdifferentials and applications. I. The finite dimensional theory // Trans. Amer. Math. Soc. 1984. V. 281. P. 389–416.
- [48] Ioffe A. D. Necessary conditions in nonsmooth optimization // Math. Oper. Res. 1984. V. 9. P. 159–189.
- [49] Ioffe A. D. Approximate subdifferentials and applications. III. The metric theory // Matematika. 1989. V. 36. P. 1–38.
- [50] Ioffe A. D. On the local surjection property // Nonlinear Anal. 1987. V. 11. P. 565–592.
- [51] Ioffe A. D. Codirectional compactness, metric regularity and subdifferential calculus // Preprint. Constructive, Experimental and Nonlinear Analysis / ed. M. Thera. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1996 (to appear).
- [52] Ioffe A. D. Variational methods in local and global nonsmooth analysis // NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci. 1999. V. 528. P. 447–502.
- [53] Ioffe A. D. Fuzzy principles and characterization of trustworthiness // Set-Valued Anal. 1998. V. 6. P. 265–276.
- [54] Ioffe A. D. Towards metric theory of metric regularity // Preprint. Haifa: Technion, 1999.
- [55] Ioffe A., Schwartzman E. Metric critical point theory. I. Morse regularity and homotopic stability of a minimum // J. Math. Pures Appl. 1996. V. 75. P. 125–153.
- [56] Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
- [57] Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Несколько замечаний о вариационных принципах // Матем. заметки. 1997. Т. 61. №2. С. 305–311.
- [58] Jourani A., Thibault L. Approximate subdifferential and metric regularity: the finite dimensional case // Math. Programming. 1990. V. 47. P. 203–218.
- [59] Jourani A., Thibault L. Verifiable conditions for openness and regularity of multivalued mappings // Trans. Amer. Math. Soc. 1995. V. 347. P. 1255–1268.
- [60] Jourani A., Thibault L. Metric regularity and subdifferential calculus in Banach spaces // Set-Valued Anal. 1995. V. 3. P. 87–100.
- [61] Jourani A., Thibault L. Coderivatives of multivalued mappings, locally compact cones and metric regularity // Nonlinear Anal. 1999. V. 35. №7. P. 925–945.
- [62] Katriel G. Mountain pass theorems and global homeomorphism theorems // Ann. Inst. H. Poincaré. Anal. Non-linéaire. 1994. V. 11. P. 189–211.
- [63] Khan P. Q. An induction theorem and general open mapping theorem // J. Math. Anal. Appl. 1986. V. 118. P. 519–536.
- [64] Kruger A. Ya. A covering theorem for set-valued mappings // Optimization. 1988. V. 19. P. 763–780.
- [65] Kummer B. Lipschitzian inverse functions, directional derivatives and applications in $C^{1,1}$ -optimization // J. Optim. Theory Appl. 1991. V. 70. P. 561–582.
- [66] Kummer B. Metric regularity characterizations, nonsmooth functions and successive approximations // Preprint. Berlin: Humboldt Univ., 1998.
- [67] Lassonde M. First order rules in nonsmooth constrained optimization // Preprint. Pointe-à-Pitre: Univ. des Antilles et de la Guyane, 1998.
- [68] Leach E. B. A note on inverse function theorem // Proc. Amer. Math. Soc. 1961. V. 12. P. 694–697.
- [69] Ledyayev Yu. S., Zhu Q. J. Implicit multifunctions theorems // Preprint. Kalamazoo: Western Michigan Univ., 1998.
- [70] Левитин Е. С., Милютин А. А., Осмоловский Н. П. Условия высших порядков локального минимума в задачах с ограничениями // УМН. 1978. Т. 33. №6. С. 85–148.
- [71] Loewen P. D. Limits of Fréchet normals in nonsmooth analysis // Pitman Res. Notes Math. Ser. 1992. V. 244. P. 178–188.

- [72] Люстерник Л. А. Об условных экстремумах функционалов // Матем. сб. 1934. Т. 41. С. 390–401.
- [73] Магарил-Ильяев Г. Г. Теорема о неявной функции для липшицевых отображений // УМН. 1978. Т. 33. №1. С. 221–222.
- [74] Miljutin A. A., Osmolovski N. P. Calculus of Variations and Optimal Control. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1998.
- [75] Мордухович Б. Ш. Методы аппроксимации в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1988.
- [76] Mordukhovich B. S. Complete characterization of openness, metric regularity and Lipschitzian properties of multifunctions // Trans. Amer. Math. Soc. 1993. V. 340. P. 1–36.
- [77] Mordukhovich B. S. Stability theory for parametric generalized equations and variational inequalities via non-smooth analysis // Trans. Amer. Math. Soc. 1994. V. 343. P. 609–657.
- [78] Mordukhovich B. S., Shao Y. Differential characterizations of covering, metric regularity, and Lipschitzian properties of multifunctions between Banach spaces // Nonlinear Anal. 1996. V. 25. P. 1401–1424.
- [79] Mordukhovich B. S., Shao Y. Nonsmooth sequential analysis in Asplund spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1996. V. 348. P. 1235–1280.
- [80] Mordukhovich B. S., Shao Y. Stability of set-valued mappings in infinite dimensions: point criteria and applications // SIAM J. Control Optim. 1997. V. 35. P. 285–314.
- [81] Nadler S. B. Multivalued contraction mappings // Pacific J. Math. 1969. V. 30. P. 475–488.
- [82] Nijenhuis A. Strong derivatives and inverse mappings // Amer. Math. Monthly. 1974. V. 81. P. 969–980.
- [83] Penot J.-P. Metric regularity, openness and Lipschitzian behavior of multifunctions // Nonlinear Anal. 1989. V. 13. P. 629–643.
- [84] Penot J.-P. Metric estimates for the calculus of multimappings // Set-Valued Anal. 1997. V. 5. №4. P. 291–308.
- [85] Penot J.-P. Compactness properties, openness criteria and coderivatives // Set-Valued Anal. 1998. V. 6. P. 363–380.
- [86] Pták V. A quantitative refinement of the closed graph theorem // Czechoslovak Math. J. 1974. V. 24. P. 503–506.
- [87] Pták V. A nonlinear subtraction theorem // Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A. 1982. V. 82. P. 47–53.
- [88] Robinson S. M. Regularity and stability for convex multivalued functions // Math. Oper. Res. 1976. V. 1. P. 130–143.
- [89] Robinson S. M. Stability theory for system of inequalities. II: Differentiable nonlinear systems // SIAM J. Numer. Anal. 1976. V. 13. P. 497–513.
- [90] Robinson S. M. Strongly regular generalized equations // Math. Oper. Res. 1980. V. 5. P. 43–62.
- [91] Rockafellar R. T., Wets R. J. B. Variational Analysis. Berlin: Springer-Verlag, 1998.
- [92] Shauder J. Über die Umkehrung linearer, stetiger Funktionaloperationen // Studia Math. 1930. V. 2. P. 1–6.
- [93] Thibault L. Equivalence between metric regularity and graphical metric regularity for set-valued mappings // Unpublished note. Univ. de Montpellier, 1999.
- [94] Thibault L. Various forms of metric regularity // Unpublished note. Univ. de Montpellier, 1999.
- [95] Ursescu C. Multifunctions with closed convex graphs // Czechoslovak Math. J. 1975. V. 25. P. 438–441.
- [96] Warga J. Fat homeomorphism and unbounded derivate containers // J. Math. Anal. Appl. 1981. V. 81. P. 545–560.
- [97] Zhu Q. J. The equivalence of several basic theorems for subdifferentials // Set-Valued Anal. 1998. V. 6. P. 171–185.