Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Артельных, Произведения Масси и спектральная последовательность Бухштабера, *УМН*, 2000, том 55, выпуск 3, 165–166

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm294>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 16:18:34

**ПРОИЗВЕДЕНИЯ МАССИ И СПЕКТРАЛЬНАЯ
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ БУХШТАБЕРА**

И. В. АРТЕЛЬНЫХ

В 1978 г. в [1] была установлена связь между алгеброй Ландвебера–Новикова S и алгеброй Ли $L_1(W_1)$ формальных векторных полей на прямой, а именно, доказан изоморфизм: $S^{2q} \otimes \mathbb{Q} \cong U(L_1)^q$, где $U(L_1)$ – универсальная обертывающая алгебра алгебры Ли $L_1(W_1)$, и, следовательно, $\text{Ext}_S^*(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q} = H^*(L_1, \mathbb{Q})$. Когомологии алгебры Ли $L_1(W_1)$ были вычислены в [2]: $H^{n,k}(L_1, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ для $k = \frac{3n^2 \pm n}{2}$ и $H^{n,k}(L_1, \mathbb{Q}) = 0$ для $k \neq \frac{3n^2 \pm n}{2}$. По размерностным соображениям умножение в кольце $H^{*,*}(S) = \text{Ext}_S^{*,*}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}$ тривиально. Обозначим через x_+^n и x_-^n старшую и младшую по второй градуировке образующие в группе $H^n(S \otimes \mathbb{Q})$. В начале 70-х годов В. М. Бухштабером была высказана гипотеза о том, что образующие группы $H^n(S)$ представляют собой произведения Масси от образующих группы $H^1(S)$. Напомним определение произведения Масси [3]. Пусть $c_i \in H^{n_i}(S)$, $i = 1, \dots, r$, $n_i > 0$, и существуют коцепи $c_{i,j}$, $i = 1, \dots, r-1$, $j = 1, \dots, r-(i-1)$ такие, что $c_{1,j} \in c_j$ и

$$(1) \quad d c_{i,j} = \sum_{l=1}^{i-1} \bar{c}_{l,j} c_{i-l,j+l},$$

где $\bar{c}_{i,j} = (-1)^{\deg c_{i,j}+1} c_{i,j}$. Множество $\{c_{i,j}\}$ называется определяющей системой для произведения Масси. В этом случае $\sum_{l=1}^{r-1} \bar{c}_{l,1} c_{r-l,1+1}$ является коциклом и определяет когомологический класс $y \in H^{n_1+\dots+n_r-(r-2)}$, называемый реализацией произведения Масси $\langle c_1, \dots, c_r \rangle$. Как видно из определения, присутствует некий произвол при выборе элементов $c_{i,j}$. Этот произвол приводит к тому, что произведение Масси определено неоднозначно. Таким образом, гипотеза В. М. Бухштабера может быть разбита на две проблемы. Первая: найти представления образующих групп $H^n(S)$ в виде реализаций произведений Масси. Вторая: найти среди таких произведений те, которые не допускают нулевых реализаций.

Решение первой проблемы было получено в [4], где доказано, что

$$x_-^n \in \mathbb{Q} \langle x_+^{n-1}, \underbrace{x_-^1, \dots, x_-^1}_{2n-1} \rangle, \quad x_+^n \in \mathbb{Q} \langle x_+^{n-1}, \underbrace{x_-^1, \dots, x_-^1}_{3n-1} \rangle$$

для всех $n \geq 2$. Вторая проблема в статье [4] не рассматривалась, и полученные в ней результаты не дают решения этой проблемы, так как произведение $\langle x_+^{n-1}, \underbrace{x_-^1, \dots, x_-^1}_{2n-1} \rangle$ допускает реализа-

ции, равные нулю, т.е. возможно построить такую определяющую систему, что результирующий коцикл будет когомологичен нулю.

Таким образом, оставалась проблема описания образующих кольца $H^*(S)$ в терминах произведений Масси, не допускающих нулевых реализаций. Следующий результат дает решение этой проблемы для x_-^n , $n \geq 2$, и x_+^{2l+1} , $l \geq 1$.

ТЕОРЕМА 1. *Имеют место следующие произведения Масси, не допускающие нулевых реализаций: $x_-^n \in \mathbb{Q} \langle \underbrace{x_+^1, \dots, x_+^1}_{n-1}, x_+^{n-1}, x_-^1 \rangle$ для $n \geq 2$, $x_+^{2l+1} \in \mathbb{Q} \langle \underbrace{x_+^1, \dots, x_+^1}_{3l+1}, x_+^{2l} \rangle$ для $l \geq 1$.*

В [4] без доказательства упоминается, что образующие x_+^{2l+1} имеют представления, указанные в теореме 1, но вопрос о несуществовании нулевых реализаций не затрагивается.

Доказательство теоремы 1 основано на рассмотрении взаимосвязи произведений Масси с дифференциалами спектральной последовательности Бухштабера. Рассмотрим алгебру Ландвебера–Новикова S и ее действие на кольце кобордизмов Ω_U . Следуя [5], строим в кольце $\Omega_U \otimes \mathbb{Q}$ фильтрацию $N_0 \subset N_1 \subset \dots$, где $N_k = \{y \in \Omega_U \otimes \mathbb{Q} \mid s_\omega(y) \in N_{k-1}, \forall s_\omega \in S\}$, с начальным членом $N_0 = \mathbb{Z}$. Предел этой фильтрации есть подкольцо $\Omega_U(\mathbb{Z}) \subset \Omega_U \otimes \mathbb{Q}$, причем $\Omega_U(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[\beta_1, \beta_2, \dots]$, где $\beta_1, \beta_2, \dots$ – коэффициенты характера Чженя–Дольда согласно

[1], [5]. В итоге получаем триградуированную спектральную последовательность для когомологий алгебры S , ассоциированную с этой фильтрацией. Третья градуировка наследуется из второй градуировки коцепного комплекса алгебры S с коэффициентами $\Omega_U(\mathbb{Z})$. Такая спектральная последовательность называется спектральной последовательностью Бухштабера (СПБ) [6]. Для любого S -подмодуля $V \subset \Omega_U(\mathbb{Z})$ такого, что $\mathbb{Z} = N_0 \subset V$, имеют место индуцированная фильтрация и соответствующая СПБ, сходящаяся к $H^*(S; V)$. Наше доказательство опирается на так называемые ниточные представления алгебры Ландвебера–Новикова S из [4]. Когомологии алгебры S с коэффициентами в этих представлениях будем обозначать далее через $H^*(S; V)$. В рассматриваемом случае определяющая система для произведения Масси строится без препятствий до тех пор, пока $\deg c_{i,j} < 3n^2 - n$, так как $H^{n,q}(S) = 0$ для $q < 3n^2 - n$. Первое препятствие появляется при $\deg c_{i,j} = 3n^2 - n$. В этом случае согласно предложению 2.1 из [4] уравнение (1) разрешимо тогда и только тогда, когда дифференциал $E_{2n-1}^{2n-1, -3n+2, 3n^2-n} \rightarrow E_{2n-1}^{0, -n, 3n^2-n}$ в СПБ для $H^*(S; V)$ равен нулю. Если он равен 0, т.е. уравнение (1) разрешимо, то определяющая система строится без препятствий, пока $\deg c_{i,j} < 3n^2 + n$, так как $H^{n,q}(S) = 0$ для $3n^2 - n < q < 3n^2 + n$. Второе препятствие появляется при $\deg c_{i,j} = 3n^2 + n$. В этом случае уравнение (1) опять разрешимо тогда и только тогда, когда дифференциал $E_{3n-1}^{3n-1, -4n+2, 3n^2+n} \rightarrow E_{3n-1}^{0, -n, 3n^2+n}$ в СПБ для $H^*(S; V)$ равен нулю. В итоге вопрос о существовании произведений Масси, выписанных в теореме 1, сводится к вопросу о существовании некоторых элементов в $H^*(S; V)$. В [4] выписаны минимальная свободная резольвента и явные формулы для дифференциалов, позволяющие вычислить $H^*(S; V)$. Так доказывается существование приведенных в формулировке теоремы 1 произведений Масси. Доказательство того, что эти произведения Масси не допускают нулевых реализаций, основано на рассмотрении второй градуировки в когомологиях алгебры S . Причем существенную роль в этом доказательстве играет особый подбор элементов приведенных произведений Масси. Например, для произведений Масси, указанных в [4], подобное доказательство уже не проходит.

Для рассматриваемых представлений удалось в явном виде описать соответствующие им S -подмодули $V \subset \Omega_U(\mathbb{Z})$. Это дало возможность вычислить некоторые дифференциалы в СПБ для $H^*(S; \Omega_U(\mathbb{Z}))$.

ТЕОРЕМА 2. $d_n^{n, -2n+1}(y_1 y_2^{n-1} \otimes x_+^{n-1}) = x_-^n$ для $n \geq 2$, $d_{3l+1}^{3l+1, -5l-1}(y_2^{3l+1} \otimes x_+^{2l}) = x_+^{2l+1}$ для $l \geq 1$. Здесь $y_1 = \beta_1$, $y_2 = \beta_2 - \beta_1^2$.

Методы, развитые для доказательства теоремы 1, позволили получить результаты о произведениях Масси в когомологиях замечательных нильмногообразий [7]. В [8] эти многообразия описаны в виде последовательности расслоений $M^{k+1} \rightarrow M^k$, $\dim M^k = k$, таких, что $H^*(\varprojlim M^k) = H^*(S)$. В $H^2(M^k)$ существует нетривиальный элемент Ω_k , определяемый формой кривизны связности расслоения $M^{k+1} \rightarrow M^k$, который задает для $k = 2m$ симплектическую структуру на M^k .

ТЕОРЕМА 3. В $H^*(M^k)$ имеют место следующие произведения Масси, не допускающие нулевых реализаций $\Omega_k \in \underbrace{\langle x_-^1, \dots, x_-^1, x_+^1 \rangle}_{k-1}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бухштабер В. М., Шокуров А. В. // Функци. анализ и его прил. 1978. Т. 12. № 3. С. 1–11. [2] Гончарова Л. В. // Функци. анализ и его прил. 1973. Т. 7. № 2. С. 6–14. [3] Krai-
nes D. // Trans. Amer. Math. Soc. 1966. V. 124. P. 431–449. [4] Feigin B. L., Fuchs D. B.,
Retakh V. S. // Lecture Notes in Math. 1988. V. 1346. P. 13–31. [5] Бухштабер В. М. // Матем. сб. 1970. Т. 87. С. 575–595. [6] Фукс Д. Б. Когомологии бесконечномерных алгебр Ли.
М.: Наука, 1984. [7] Babenko I. K., Taimanov I. A. On nonformal simply connected sym-
plectic manifolds // SFB 288 Preprint 358. Berlin, 1998. [8] Бухштабер В. М. // УМН. 1999.
Т. 54. № 4. С. 161–162.