Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Л. Бланк, Точный анализ динамических систем, возникающих в моделях транспортных потоков, *УМН*, 2000, том 55, выпуск 3, 167–168

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm295>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 03:24:51

ТОЧНЫЙ АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ, ВОЗНИКАЮЩИХ В МОДЕЛЯХ ТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ

М. Л. Бланк

При помощи техники двойственных отображений получены точные результаты динамики нескольких моделей транспортных потоков, для которых также получено полное описание их предельных режимов в пространстве конфигураций. Используя эти результаты, мы изучаем движение пассивной быстрой частицы, двигающейся по потоку/против потока медленных частиц.

1. Поводом для настоящей работы послужило следующее наблюдение: в медленно двигающейся толпе быстрее идти против общего движения, чем по нему. Этот эффект особенно заметен при движении около границы двух медленных “потоков” людей, двигающихся в противоположных направлениях (например, в переходе метро). Очевидно, это наблюдение противоречит стандартной модели диффузии частицы по потоку/против потока и, как минимум, говорит об очень специальной (неслучайной) структуре транспортных потоков.

Начнем с простейшей одномерной модели транспортного потока, введенной в [1]. Эта модель, которую мы будем называть моделью с медленными частицами, описывается следующей динамической системой с дискретным временем и дискретным фазовым пространством – решеткой, на которой расположены частицы. В следующий момент времени каждая частица либо передвигается вперед на одну позицию – если она свободна, либо остается на месте – в противном случае. В случае конечной решетки с периодическими граничными условиями анализу (в основном численному) этой модели и некоторых ее обобщений в последнее время было посвящено большое число публикаций (см. [1]–[6] и дальнейшие ссылки в них). Наиболее интересным явлением, обнаруженным в этих работах, является нетривиальная зависимость $V(\rho)$ средней скорости движения частиц от их плотности, равная 1 при $\rho \in [0, 1/2]$ и $\frac{1}{\rho} - 1$ при $\rho \in (1/2, 1]$. Ниже мы выведем этот результат при помощи техники двойственных отображений для произвольных конечных и бесконечных решеток и начальных конфигураций. Кроме того, мы дадим полное описание предельных множеств (соответствующих стационарным транспортным потокам) и точную оценку длины переходного периода.

С точки зрения теории динамических систем описанная выше модель может быть представлена следующим образом. Пусть $\mathbf{X} = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^1}$ – множество всех возможных конфигураций – бинарных последовательностей X , единицы в которых соответствуют частицам, а нули – незанятым позициям на решетке. Рассмотрим отображение $T: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$,

$$TX(x) := \begin{cases} 1, & \text{если } X(x) = 0 \text{ и } X(x-1) = 1 \text{ или } X(x) = X(x+1) = 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Группу из k последовательно стоящих частиц, $k > 1$, мы назовем кластером; а частицу в позиции x (т.е. $X(x) = 1$), позиция после которой не занята (т.е. $X(x+1) = 0$), назовем свободной. Будем называть конфигурацию $X \in \mathbf{X}$ регулярной, если имеется число $\rho = \rho(X)$ (плотность частиц) и монотонная функция $\varphi(N)$, $\varphi(N) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, такие, что для любого N число частиц с координатами от $n+1$ до $n+N$ отличается от $N\rho$ не более чем на $N\varphi(N)$ для любого n . Заметим, что конфигурация на конечной решетке длины n с периодическими граничными условиями соответствует n -периодической конфигурации на бесконечной решетке, которая удовлетворяет условию регулярности с $\varphi(N) = n\rho(1-\rho)/N$. Под средней (по пространству) скоростью (частиц) $V(X)$ понимается среднее значение (если оно корректно определено) перемещения частиц в конфигурации X во время следующей итерации отображения T .

ТЕОРЕМА 1. *Для любой регулярной начальной конфигурации $X \in \mathbf{X}$ с плотностью $\rho = 1/2$ через не более чем $t_c(X) = \frac{1}{2}\varphi^{-1}(|\frac{1}{2} - \rho(X)|)$ итераций отображения T средняя скорость станет равна $V = \min(1, \frac{1}{\rho} - 1)$, и при любом $t \geq t_c(X)$ справедлива следующая альтернатива: конфигурация $T^t X$ состоит либо только из свободных частиц, либо не имеет кластеров незанятых позиций. Более того, при любом n для n -периодических начальных конфигураций ограничение $\rho \neq 1/2$ снимается, для $t_c(X)$ справедлива*

Работа частично поддержана грантами РФФИ и INTAS.

лучшая оценка $t_c(X) = \min(\rho(X)N, N - \rho(X)N)$ и при $t \geq t_c(X)$ последовательность $\{T^t X\}_t$ становится n -периодической по t .

Доказательство этой теоремы и ряда других результатов настоящей работы основано на идее введения двойственной динамической системы $(T^*, \mathbf{X}^*)$, описывающей динамику незанятых позиций на решетке под действием основного отображения T . Здесь для конфигурации $X \in \mathbf{X}$ двойственная конфигурация X^* определяется соотношением $X^*(x) = 1 - X(x)$ для всех x . Можно показать, что $(TX)^* = T^*X^*$ при всех $X \in \mathbf{X}$. Для рассматриваемой модели отображение T^* отличается от T только направлением движения частиц, что сводит анализ к конфигурациям низкой плотности $\rho \in [0, 1/2]$, поскольку большая плотность соответствует плотности незанятых позиций, меньшей $1/2$. Это наблюдение резко упрощает задачу, поскольку динамика в случае высокой плотности частиц нетривиальна и трудно поддается непосредственному анализу. Далее, показывая, что длина любого кластера частиц не может возрастать (т.е. в этой модели не могут возникать транспортные пробки), а число свободных частиц убывать, мы приходим к описанной в формулировке теоремы альтернативе, что и приводит к требуемым оценкам.

2. Рассмотрим теперь модель движения с быстрыми частицами, отличающуюся от предыдущей тем, что на каждом шагу частица сдвигается вперед до следующей занятой позиции.

ТЕОРЕМА 2. Для любой начальной конфигурации X , удовлетворяющей закону больших чисел с плотностью $\rho(X) \notin \{0, 1\}$, средняя скорость частиц не зависит от времени и равна $\frac{1}{\rho(X)} - 1$.

Качественно динамика этой модели богаче, чем в модели с медленными частицами, например, транспортные пробки типичны даже для конфигураций малой плотности. С другой стороны, несмотря на это средняя скорость движения частиц $V(\rho)$ для этой модели совпадает с предыдущим случаем при высокой плотности и аналитически продолжает ее при малой плотности.

3. Дадим теперь математическое описание наблюдения о движении пассивной быстрой частицы (имитирующей поведение спешащего прохожего) в медленном транспортном потоке, которое мы сформулировали в начале заметки. Упрощая ситуацию, мы будем полагать (как обычно делают в гидродинамике), что движение нашей быстрой частицы не влияет на транспортный поток и описывается следующим образом. Положим $\tau_X^+(y) := \min(x : y < x \text{ и } X(x) = 1)$, $\tau_X^-(y) := \max(x : y > x \text{ и } X(x) = 1)$. Тогда совместная динамика конфигурации медленных частиц $X \in \mathbf{X}$ и положения быстрой частицы $y \in \mathbb{Z}^1$ определяется косым произведением отображений T и одного из $\tau^\pm$ (знак соответствует движению по потоку/против потока), т.е. $\mathcal{T}_\pm(X, y) := (TX, \tau_X^\pm(y))$. Под скоростью в момент t пассивной частицы будем понимать суммарное расстояние (со знаком), пройденное ею к этому моменту времени, деленное на t . Опираясь на полученное полное описание предельных множеств модели медленных частиц, мы получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 3. Для любой регулярной начальной конфигурации с плотностью $\rho(X) \notin \{0, 1/2, 1\}$ в случае неограниченной решетки средняя скорость быстрой частицы стремится (по t) к 1 при $\rho \leq 1/2$ и движении вперед (по потоку) и к $-\max(1, \frac{1}{\rho(X)} - 1)$ при движении назад (против потока).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Nagel K., Schreckenberg M. // J. Physique I. 1992. V. 2. P. 2221-2229. [2] Fukš H. // Phys. Rev. E. 1999. V. 60. P. 197-202, comp-gas/9902001. [3] Krug J., Spohn H. // Phys. Rev. A. 1988. V. 38. P. 4271-4283. [4] Nagel K., Herrmann H. J. // Phys. A. 1993. V. 199. P. 254-269. [5] Boccara N., Fukš H. Critical behavior of a cellular automaton highway traffic model // adap-org/9705003. [6] Simon P. M., Nagel K. // Phys. Rev. E. 1998. V. 58. P. 1286-1295, cond-mat/9801022.