Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Боярский, Т. В. Скрышник, Сингулярные орбиты коприсоединенного представления евклидовых групп, *УМН*, 2000, том 55, выпуск 3, 169–170

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm296>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 14:54:31

СИНГУЛЯРНЫЕ ОРБИТЫ КОПРИСОЕДИНЕННОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЕВКЛИДОВЫХ ГРУПП

А. М. БОЯРСКИЙ, Т. В. СКРЫПНИК

В работе предлагается метод вложения некоторых типов сингулярных орбит коприсоединенного представления групп $E(n)$ в пространство, дуальное к соответствующей алгебре Ли, в виде совместных поверхностей уровня полиномов специального вида.

Как известно, $E(n) = SO(n) \times \mathbb{R}^n$ может быть реализована как матричная группа следующим образом:

$$E(n) = \begin{pmatrix} & d_1 \\ & \vdots \\ SO(n) & d_n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ алгебра Ли } e(n) = \begin{pmatrix} & y_1 \\ & \vdots \\ so(n) & y_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Будем задавать элемент $f \in e^*(n)$ в виде пары $f = (\mu, \nu)$, где $\mu \in so^*(n) = so(n)$, $\nu \in \mathbb{R}_n^* = \mathbb{R}_n$. Тогда $ad_{(x,y)}^*(\mu, \nu) = ([x, \mu] - \frac{1}{2}y \wedge \nu, x^T(\nu))$. Известно [1], что все орбиты коприсоединенного действия группы $E(n)$ делятся на полупростые – устроенные как орбиты $SO(n-1)$ (см. [2]), и проходящие через точки с ненулевым y – топологически устроенные как расслоения с базой – кокасательным расслоением над орбитой $SO(n)$ в $\mathbb{R}^n$ и слоем – орбитами ее стабилизатора. То есть $O_{(\mu,\nu)} = (E, T^*(SO(n)/SO(n-1)), O_{SO^*(n-1)}) = (E, T^*S_{\nu}^{n-1}, O_{SP^*(n-1)})(\mu)$. Для описания явного вложения различных типов орбит в алгебры необходимо изучить структуру функций Казимира. В работе [2] было показано, что полный набор примитивных инвариантов ортогональных групп можно выбрать так, чтобы каждый инвариант являлся суммой полных квадратов полиномов специального вида, а именно:

$$p_{n-k} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} Pf_{i_1 \dots i_k}^2(X), \text{ где } X \in so(n) = \{X \in Mat(n, \mathbb{R}) : X^T + X = 0\},$$

$Pf_{i_1 \dots i_k}(X)$ – пфаффиан матрицы X без $i_1, \dots, i_k$ строчек и столбцов. Поскольку алгебра $e(n)$ может быть получена из $so(n+1)$ контракцией, можно использовать результаты работы [3] о структуре функций Казимира контрактированных алгебр:

ЛЕММА 1. *Полный набор функций Казимира группы $E(n)$ имеет вид:*

$$p_{n-k}(x, y) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \left(\sum_{1 \leq j \leq n} Pf_{i_1 \dots j \dots i_k}(X) y_j \right)^2, \\ \text{где } X \in so^*(n) \simeq so(n), \quad y \in \mathbb{R}^{n*} = \mathbb{R}^n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно применить метод “контрактивирования” инвариантов, описанный в [3], к коэффициентам характеристического полинома матрицы $\begin{pmatrix} X & \vec{y} \\ -\vec{y} & 0 \end{pmatrix} \in so^*(n+1)$ и учесть, что для пфаффианов существует, как и для детерминантов, формула разложения по строке и столбцу.

Интересно отметить, что все функции Казимира будут квадратичными по “абелевым” координатам. Легко видеть, что при $p_{n-k} = 0$ автоматически имеем $\sum_{1 \leq j \leq n} Pf_{i_1 \dots j \dots i_k} y_j \equiv Pf_{i_1 \dots i_k}(X, y) = 0$, $i_k = \overline{1, n}$, и размерность орбиты падает, так как эта орбита имеет новые инварианты, являющиеся ковариантами коприсоединенного представления.

ЛЕММА 2. *Уравнение $Pf_{i_1 \dots i_k}(X, y) = 0$ задает $Ad_{E(n)}^*$ – инвариантное подмногообразие в $e^*(n)$.*