Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, Момент-угол комплексы и комбинаторика симплицальных многообразий, *УМН*, 2000, том 55, выпуск 3, 171–172

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm297>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 15:32:37

МОМЕНТ-УГОЛ КОМПЛЕКСЫ И КОМБИНАТОРИКА СИМПЛИЦИАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

В. М. БУХШТАБЕР, Т. Е. ПАНОВ

Пусть $\rho: (D^2)^m \rightarrow I^m$ – проекция на пространство орбит для диагонального действия тора T^m на единичном полидиске $(D^2)^m \subset \mathbb{C}^m$. Каждая грань куба $I^m = [0, 1]^m$, рассматриваемого как кубический комплекс, имеет вид

$$F_{I \subset J} = \{(y_1, \dots, y_m) \in I^m : y_i = 0 \text{ при } i \in I, y_j = 1 \text{ при } j \notin J\},$$

где $I \subset J$ – два подмножества множества $[m] = \{1, \dots, m\}$. Для каждой грани $F_{I \subset J}$ положим $B_{I \subset J} := \rho^{-1}(F_{I \subset J})$. Если $\#I = i$, $\#J = j$, то $B_{I \subset J} \cong (D^2)^{j-i} \times T^{m-j}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть C – некоторый кубический подкомплекс в I^m . Момент-угол комплексом $\text{та}(C)$ называется разбиение T^m -инвариантного подмножества $\rho^{-1}(C) \subset (D^2)^m$ на блоки $B_{I \subset J}$, соответствующие граням $F_{I \subset J}$ комплекса C .

Изучение эквивариантной топологии момент-угол комплексов позволяет решать задачи комбинаторики кубических разбиений. В настоящей работе мы демонстрируем возможности такого подхода в случае кубических разбиений, определяемых симплициальными комплексами. Пусть $K^{n-1} - (n-1)$ -мерный симплициальный комплекс с m вершинами и $|K|$ – соответствующий полиэдр. Если $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset [m]$ является симплексом K , то мы будем писать $I \in K$. Введем два канонических кубических подкомплекса в I^m :

$$\text{sub}(K) = \{F_{I \subset J} : J \in K, I \neq \emptyset\}, \quad \text{ss}(K) = \{F_{I \subset J} : J \in K\}.$$

ЛЕММА 2. Как топологическое пространство, комплекс $\text{sub}(K)$ гомеоморфен $|K|$, а $\text{ss}(K)$ гомеоморфен конусу $|\text{cone}(K)|$.

Кубический комплекс $\text{ss}(K)$ был введен в [1] и затем изучался в [2]. Кубический комплекс $\text{sub}(K)$ появился в [3].

Обозначим момент-угол комплексы, соответствующие $\text{sub}(K)$ и $\text{ss}(K)$ через $\mathcal{W}_K$ и $\mathcal{Z}_K$ соответственно. Фиксируем клеточное разбиение полидиска $(D^2)^m$, при котором каждый D^2 представляется в виде объединения 0-мерной клетки 1, 1-мерной клетки T и 2-мерной клетки D (см. рис. а)). Каждая клетка в $(D^2)^m$ представляется в виде произведения клеток D_i , T_i , 1_i , $i = 1, \dots, m$, т.е. имеет вид $D_I T_J 1_{[m] \setminus I \cup J}$, где I, J – попарно непересекающиеся подмножества $[m]$. Положим $D_I T_J := D_I T_J 1_{[m] \setminus I \cup J}$. При этом $\mathcal{Z}_K$ является клеточным подкомплексом в $(D^2)^m$, состоящим из всех клеток $D_I T_J$, для которых $I \in K$.

ЛЕММА 3. Вложение $T^m = \rho^{-1}(1, \dots, 1) \hookrightarrow \mathcal{Z}_K$ является клеточным отображением, гомотопным отображению в точку.

Как показано в [2], для произвольного поля $\mathbf{k}$ имеет место изоморфизм алгебр:

$$(1) \quad H^*(\mathcal{Z}_K) \cong \text{Tor}_{\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]}(\mathbf{k}(K), \mathbf{k}) \cong H^*[\mathbf{k}(K) \otimes \Lambda[u_1, \dots, u_m], d],$$

где $\mathbf{k}(K)$ – кольцо Стенли–Райснера комплекса K , а дифференциал d определяется как $d(v_i) = 0$, $d(u_i) = v_i$, $i = 1, \dots, m$. Тог-алгебра из (1) естественным образом является биградуированной, причем $\text{bideg}(v_i) = (0, 2)$, $\text{bideg}(u_i) = (-1, 2)$. Вычисление кольца $H^*(\mathcal{Z}_K)$ позволило решить

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00090).

задачу описания мультипликативной структуры когомологий дополнения конфигурации координатных подпространств в $\mathbb{C}^m$ [2].

В [1] был введен подкомплекс $\mathcal{C}^*(K) \subset \mathbf{k}(K) \otimes \Lambda[u_1, \dots, u_m]$, порожденный мономами u_I и $v_I u_J$, для которых $I \cap J = \emptyset$, $I \in K$, и показано, что когомологии $\mathcal{C}^*(K)$ также совпадают с когомологиями $\mathcal{Z}_K$. Обозначим через $\mathcal{C}_*(\mathcal{Z}_K)$ и $\mathcal{C}^*(\mathcal{Z}_K)$ соответственно цепной и коцепной комплексы клеточного разбиения $\mathcal{Z}_K$ типа а).

ТЕОРЕМА 4. Пусть $(D_I T_J)^* \in \mathcal{C}^*(\mathcal{Z}_K)$ – клеточная коцепь, двойственная клетке $D_I T_J \in \mathcal{Z}_K$. Соответствие $v_I u_J \mapsto (D_I T_J)^*$ устанавливает канонический изоморфизм комплексов $\mathcal{C}^*(K)$ и $\mathcal{C}^*(\mathcal{Z}_K)$, каждый из которых вычисляет $H^*(\mathcal{Z}_K)$.

Пара $(\mathcal{Z}_K, T^m)$ приобретает биградуированную клеточную структуру, где $\text{bideg}(D_i) = (0, 2)$, $\text{bideg}(T_i) = (-1, 2)$. Пусть $b_{-q, 2p}(\mathcal{Z}_K, T^m) = \dim H_{-q, 2p}[\mathcal{C}_*(\mathcal{Z}_K, T^m)]$. Фиксируем новое клеточное разбиение полидиска $(D^2)^m$, при котором каждый диск D^2 разбивается на 5 клеток $D, T, I, 1, 0$ (см. рис. 6)). Это позволяет ввести на $\mathcal{W}_K$ биградуированную клеточную структуру и определить числа $b_{q, 2p}(\mathcal{W}_K) = \dim H_{q, 2p}[\mathcal{C}_*(\mathcal{W}_K)]$. Положим

$$\chi(\mathcal{Z}_K, T^m; t) = \sum_{p, q} (-1)^q b_{-q, 2p}(\mathcal{Z}_K, T^m) t^{2p}, \quad \chi(\mathcal{W}_K; t) = \sum_{p, q} (-1)^q b_{q, 2p}(\mathcal{W}_K) t^{2p}.$$

Пусть f_i – число i -симплексов K и $(h_0, \dots, h_n)$ – h -вектор, определяемый из соотношения $h_0 t^n + \dots + h_{n-1} t + h_n = (t-1)^n + f_0(t-1)^{n-1} + \dots + f_{n-1}$.

ТЕОРЕМА 5. Положим $h(t) = h_0 + h_1 t + \dots + h_n t^n$. Тогда

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{Z}_K; T^m, t) &= (1-t^2)^{m-n} h(t^2) - (1-t^2)^m, \\ \chi(\mathcal{W}_K; t) &= (1-t^2)^{m-n} h(t^2) + (-1)^{n-1} h_n (1-t^2)^m. \end{aligned}$$

ЛЕММА 6. Если $|K| \cong S^{n-1}$, то $\mathcal{Z}_K$ является замкнутым многообразием.

Пусть теперь K^{n-1} – симплицальное многообразие. Тогда комплекс $\mathcal{Z}_K$, вообще говоря, не является многообразием, но удаляя малую окрестность $U_\varepsilon(T^m)$ тора $T^m = \rho^{-1}(1, \dots, 1)$, мы получаем многообразие $W_K = \mathcal{Z}_K \setminus U_\varepsilon(T^m)$ с краем $\partial W_K = |K| \times T^m$.

ТЕОРЕМА 7. Многообразие с краем W_K эквивариантно гомотопически эквивалентно комплексу $\mathcal{W}_K$. Имеет место гомеоморфизм пар $(W_K, \partial W_K) \rightarrow (\mathcal{Z}_K, T^m)$.

Из относительной двойственности Пуанкаре для W_K вытекает соотношение $\chi(\mathcal{W}_K; t) = (-1)^{m-n} t^{2m} \chi(\mathcal{Z}_K, T^m; \frac{1}{t})$. Отсюда и из теоремы 5 получаем

СЛЕДСТВИЕ 8. Пусть K^{n-1} – симплицальное многообразие. Тогда

$$(2) \quad h_{n-i} - h_i = (-1)^i (h_n - 1) \binom{n}{i} = (-1)^i (\chi(K^{n-1}) - \chi(S^{n-1})) \binom{n}{i}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Записав соотношения (2) в терминах f -вектора, мы приходим к более сложным соотношениям, полученным в [4], [5]. При $|K| = S^{n-1}$ следствие 8 дает классические соотношения Дена–Соммервилла. Для случая PL-многообразий топологическая инвариантность чисел $h_{n-i} - h_i$, вытекающая из следствия 8, была установлена в [6; (7.11)].

Детальное изложение результатов см. в <http://xxx.lanl.gov/abs/math.AT/0005199>. Авторы выражают благодарность О.Р. Мусину который в ходе полезных обсуждений результатов работы обратил наше внимание на работы [4], [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бухштабер В. М., Панов Т. Е. // Труды МИРАН. 1999. Т. 225. С. 96–131. [2] Бухштабер В. М., Панов Т. Е. // Записки научных семинаров ПОМИ. 2000. Т. 266. С. 29–50. [3] Штанько М. А., Штогрин М. И. // УМН. 1992. Т. 47. №1. С. 219–220. [4] Chen B., Yan M. // Труды МИРАН. 1998. Т. 221. С. 305–319. [5] Klee V. // Canadian J. Math. 1964. V. 16. P. 517–531. [6] Pachner U. // European J. Combin. 1991. V. 12. P. 129–145.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
E-mail: buchstab@mech.math.msu.ru; tpanov@mech.math.msu.ru

Принято редколлегией
03.04.2000