Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Голубков, Радикалы группы Шевалле над коммутативным кольцом,
УМН, 2000, том 55, выпуск 3, 173–174

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm298>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 18:10:30

РАДИКАЛЫ ГРУППЫ ШЕВАЛЛЕ НАД КОММУТАТИВНЫМ КОЛЬЦОМ

А. Ю. ГОЛУБКОВ

Введение. Основной целью настоящей работы является описание первичного радикала группы Шевалле над произвольным коммутативным кольцом с единицей (за исключением случая A_1 , когда существенным является предположение об обратимости 2 и 3). В качестве следствия получено описание разрешимого радикала группы Шевалле. Отметим также, что близкие по характеру результаты о строении нормальных подгрупп группы Шевалле в терминах идеалов (см., например [1], [2]) требуют, как правило, более сильных ограничений на кольцо коэффициентов.

Первичный и разрешимый радикалы группы Шевалле. Всюду ниже R – коммутативное кольцо с единицей и первичным радикалом $B(R)$. L – полупростая комплексная алгебра Ли с корневой системой Σ и базисом Шевалле $\{X_\alpha, H_i\}_{\alpha \in \Sigma \setminus \{0\}, 1 \leq i \leq l}$, где $l = \text{rk}(\Sigma)$ – мощность фундаментальной подсистемы в Σ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. В неприводимом точном комплексном представлении π алгебры L определена целочисленная решетка базисных векторов V , инвариантная относительно действия операторов $\{\pi(X_\alpha^n/n!)\}$, представляющих соответствующие элементы ее универсальной обертывающей (см. [3; теорема Шевалле–Ри]). Группа $E(\pi, \Sigma, R)$, порожденная всеми автоморфизмами модуля $R \otimes_{\mathbb{Z}} V$ ($\mathbb{Z}$ – кольцо целых чисел) вида

$$x_\alpha(r) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \pi(X_\alpha^n/n!),$$

где $r \in R$, $\alpha \in \Sigma \setminus \{0\}$, называется элементарной группой Шевалле, определенной представлением π , системой Σ и кольцом R .

В частности, в присоединенном представлении алгебры L участвующая в данном определении решетка V задается самим базисом Шевалле.

Над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ элементарная группа Шевалле совпадает с алгебраической матричной группой над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$, представленной в базисе решетки V (см. [3]–[5]). Соответствующий идеал I в кольце целочисленных многочленов от n^2 -переменных ($n = \dim \pi$) $\mathbb{Z}[x_{11}, \dots, x_{ij}, \dots, x_{nn}]$ состоит из всех полиномов, обращающихся в нуль на всех элементах $E(\pi, \Sigma, \mathbb{C})$. Фактор-кольцо $\mathbb{Z}[x_{11}, \dots, x_{nn}]/I$ мы будем обозначать через $\mathbb{Z}[G(\pi, \Sigma)]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Алгебраическая подгруппа в $GL_n(R)$,

$$G(\pi, \Sigma, R) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G(\pi, \Sigma)], R),$$

называется *группой Шевалле*, соответствующей представлению π , системе Σ и кольцу R .

Другими словами, группа $G(\pi, \Sigma, R)$ представляет соответствующую аффинную групповую схему Шевалле–Демазура над кольцом R .

Из сделанного определения непосредственным образом следует включение

$$E(\pi, \Sigma, R) \subseteq G(\pi, \Sigma, R).$$

При этом, если Σ является неразложимой системой ранга выше единицы, элементарная группа Шевалле нормальна в группе $G(\pi, \Sigma, R)$ (см. [6]).

Для произвольного идеала I кольца R определены редукционный эпиморфизм Ψ_I группы $G(\pi, \Sigma, R)$ и его ограничение на элементарную группу $\bar{\Psi}_I$, где

$$\Psi_I: G(\pi, \Sigma, R) \rightarrow G(\pi, \Sigma, R/I), \quad \bar{\Psi}_I: E(\pi, \Sigma, R) \rightarrow E(\pi, \Sigma, R/I).$$

С гомоморфизмами $\Psi_I, \bar{\Psi}_I$ связаны центры по идеалу I в группе Шевалле и в ее элементарной подгруппе:

$$C_I(\pi, \Sigma, R) = \Psi_I^{-1}(C(G(\pi, \Sigma, R/I))), \quad \bar{C}_I(\pi, \Sigma, R) = \bar{\Psi}_I^{-1}(C(E(\pi, \Sigma, R/I))).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Нормальная подгруппа P группы A называется первичной, если для произвольных $A_1, A_2, P \subseteq A_i \triangleleft A$, из условия $[A_1, A_2] \subseteq P$ следует, что для некоторого i $A_i \subseteq P$. Пересечение всех первичных нормальных подгрупп группы A , $b(A)$, называется первичным радикалом группы A . Группа $b(A)$ представляет собой множество всех строго энгелевых элементов A , т.е.

$$b(A) = \{a \in A \mid \forall \{b_i\}_{i=0}^{\infty} \subseteq A, a_0 = a, a_{i+1} = [[b_i, a_i], a_i], \exists j \geq 0, a_j = 1\},$$

где $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$.

Первичный радикал группы A тривиален в том и только том случае, когда A не содержит нетривиальных нормальных абелевых (разрешимых) подгрупп.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Будем говорить, что группа A обладает *разрешимым радикалом*, если в A определена наибольшая нормальная разрешимая подгруппа $\text{Rad}(A)$.

Отметим, что данное определение корректно, поскольку наибольшая нормальная разрешимая подгруппа единственна.

В случае группы Шевалле над коммутативным кольцом связь между введенными радикалами групп и первичным радикалом кольца установлена в рамках следующей теоремы.

ТЕОРЕМА. Пусть Σ – неразложимая система ранга выше единицы. Тогда для произвольного коммутативного кольца R

$$b(G(\pi, \Sigma, R)) = C_{B(R)}(\pi, \Sigma, R), \quad b(E(\pi, \Sigma, R)) = \overline{C}_{B(R)}(\pi, \Sigma, R).$$

В случае $\Sigma = A_1$ указанные равенства выполняются при дополнительном условии: $2, 3 \in \text{Gl}(R)$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть R – коммутативное кольцо с единицей, Σ – неразложимая система неединичного ранга, отличная от B_2 . Тогда разрешимый радикал группы $G(\pi, \Sigma, R)$ существует в том и только том случае, когда первичный радикал кольца R нильпотентен. В случае $\Sigma = B_2$ это утверждение имеет место при условии: $2 \in \text{Gl}(R)$.

Пользуясь случаем, хочу выразить свою благодарность А.В. Михалёву, Н.А. Вавилову и Е.Б. Плоткину за внимание и ценные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Vaserstein L. // Tôhoku Math. J. (2). 1986. V. 38. P. 219–230. [2] Abe E. // Contemp. Math. 1989. V. 83. P. 1–17. [3] Стейнберг Р. Лекции о группах Шевалле. М.: Мир, 1975. [4] Chevalley C. Certains schemas des groupes semisimples // Sémin. Bourbaki. 1960/61. V. 13. Exp. 219. Paris. Secrétariat Mathématique. 1961. [5] Borel A. // Lecture Notes in Math. 1970. V. 131. P. 1–55. [6] Taddei G. // Contemp. Math. 1986. V. 55. P. 693–710.

Принято редколлегией
03.04.2000