Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Данилов, О касательных кольцах к многообразиям мультиоператорных групп, *УМН*, 2000, том 55, выпуск 3, 175–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm299>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 16:29:46

О КАСАТЕЛЬНЫХ КОЛЬЦАХ К МНОГООБРАЗИЯМ МУЛЬТИОПЕРАТОРНЫХ ГРУПП

А. Н. Данилов

В данной работе изучаются некоторые свойства касательных колец к модулярным многообразиям, которые мыслятся при этом как основные объекты, возникающие в конструкции общего представления Магнуса, предложенной в [1]. В этой работе все кольца ассоциативны и с единицей, модули унитарны.

Представление Магнуса играет важную роль в теории групп (см. [2] и [3]), ассоциативных алгебр и алгебр Ли (см. [4]). При обобщении на произвольные модулярные многообразия возникает понятие касательного кольца $\mathbf{R} = \mathbf{R}_V(\mathbf{A}, p)$ к многообразию V с фиксированным термом Гумма p в алгебре $\mathbf{A}$, см. [1]. Касательное кольцо $\mathbf{R}$ определяется как аддитивная категория, объектами которой являются элементы алгебры $\mathbf{A}$ и которая порождается символами $\frac{\partial f}{\partial i}(\vec{a})$, где $f \in F_V(n)$ (свободная алгебра ранга n), $\vec{a} \in A^n$, $i \in \{1, \dots, n\}$, являющимися морфизмами $a_i \rightarrow f(\vec{a})$, и задается соотношениями:

$$\begin{aligned} 1) \quad \frac{\partial(f(\vec{g}))}{\partial i}(\vec{a}) &= \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial j}(\vec{g}(\vec{a})) \right) \left(\frac{\partial g_j}{\partial i}(\vec{a}) \right) \\ 2) \quad \frac{\partial x_j}{\partial i}(\vec{a}) &= \delta_{ij} = \begin{cases} 1 : a_i \rightarrow a_i, & i = j, \\ 0 : a_i \rightarrow a_j, & i \neq j, \end{cases} \\ 3) \quad \frac{\partial p}{\partial 1}(a, a, a) &= 1. \end{aligned}$$

Пусть $V \ni \mathbf{A} \cong \mathbf{F}_V(X)/\theta$, где $\theta \in \text{Con } \mathbf{F}_V(X)$ (конгруэнция свободной алгебры), $\theta = \ker \pi$, $\pi: \mathbf{F}_V(X) \rightarrow \mathbf{A}$ – естественный эпиморфизм; вместо $\pi(x)$ будем также писать $\bar{x}$. Рассмотрим свободный $\mathbf{R}$ -модуль $\mathbf{H} = \{\mathbf{H}(a) \mid a \in A\}$, порожденный множеством $\{e_x \in H(\bar{x}) \mid x \in X\}$. На H вводится структура V -алгебры по правилу $f(\vec{h}) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial i}(\vec{a}) \right) h_i$, где $h_i \in H(a_i)$, f – основная

операция ранности $n > 0$, и $c = 0 \in H(c)$ для каждой нулевой основной операции c . *Представление Магнуса* μ – это такой гомоморфизм V -алгебр $\mathbf{F}_V(X) \rightarrow \mathbf{H}$, что $\mu(x) = e_x$ на X . Если $\ker \mu = [\theta, \theta]$, то представление Магнуса дает описание $\mathbf{F}_V(X)/[\theta, \theta]$ в терминах $\mathbf{F}_V(X)/\theta$.

В случае, когда p – обратимый мальцевский терм, удается переформулировать определение представления Магнуса в терминах кольца и свободного модуля над ним, см. [1]. Пусть $\mathbf{R}$ – кольцо, порожденное символами $\mathcal{D}_i f(\vec{a})$ и заданное соотношениями:

$$\begin{aligned} 1) \quad \mathcal{D}_i(f(\vec{g}))(\vec{a}) &= \sum_{j=1}^m \mathcal{D}_j f(\vec{g}(\vec{a})) \cdot \mathcal{D}_i g_j(\vec{a}), \\ 2) \quad \mathcal{D}_i x_j(\vec{a}) &= \delta_{ij}, \\ 3) \quad \mathcal{D}_1 p(a, a, a) &= 1. \end{aligned}$$

Пусть $\mathbf{U}$ – свободный $\mathbf{R}$ -модуль с базой X , и пусть множество $H = A \times U$. Тогда на H вводится структура V -алгебры по правилу $f(\vec{h}) = (f(\vec{a}), \sum_{i=1}^n \mathcal{D}_i f(\vec{a}) u_i)$, где $h_i = (a_i, u_i)$, f – основная операция ранности $n > 0$, и $c = (c, 0)$ для каждой нулевой основной операции c . Представление Магнуса μ – это такой гомоморфизм V -алгебр $\mathbf{F}_V(X) \rightarrow \mathbf{H}$, что $\mu(x) = (\bar{x}, x)$ на X . В этом случае касательным кольцом называют введенное здесь кольцо $\mathbf{R}$, т.е. проводят коррекцию определения касательного кольца. Однако для ряда важных многообразий (а именно, многообразий Ω -групп) касательное кольцо оказывается избыточным даже после этой коррекции. Поэтому предлагается очередная коррекция.

Заметим, что в любом многообразии Ω -групп можно взять $p = x - y + z$. Кроме инфиксной мы будем использовать и префиксную запись групповых операций: $A(x, y) = x + y$ и $I(x) = -x$. Согласно сказанному выше касательное кольцо $\mathbf{R}$ к многообразию всех Ω -групп в Ω -группе $\mathbf{G}$ – это некоторое кольцо, порожденное символами $\mathcal{D}_j A(a, b)$, $\mathcal{D}I(a)$ и $\mathcal{D}_i f(\vec{a})$.

ТЕОРЕМА 1. Для любого многообразия Ω -групп $\mathbf{R} \cong \mathbb{Z}\mathbf{F}_2(G \setminus \{0\}) * \mathbf{R}'$, где через $\mathbf{F}_2$ обозначена свободная группа, а кольцо $\mathbf{R}'$ порождается символами

$$\mathbf{B}(a) = \mathcal{D}_1 A(a, -a) \mathcal{D}_2 A(a, 0) \quad \text{и} \quad \mathbf{D}f_i(\vec{a}) = \mathcal{D}_1 A(f(\vec{a}), -f(\vec{a})) \mathcal{D}_i f(\vec{a}) \mathcal{D}_1 A(0, a_i)$$

и задается соответствующими соотношениями. В частности, для многообразия всех Ω -групп $\mathbf{R}' \cong \mathbb{Z}\mathbf{G} * \mathbf{F}_\kappa(\mathbf{D}f_i(\vec{a}))$, где первый множитель есть целочисленное групповое кольцо аддитивной группы $\mathbf{G}$, а через $\mathbf{F}_\kappa$ обозначено свободное кольцо.

Предлагаемая коррекция состоит в том, чтобы называть касательным кольцом не $\mathbf{R}$, а $\mathbf{R}'$. Действительно, пусть V – некоторое многообразие Ω -групп, $V \ni \mathbf{G} \cong \mathbf{F}_V(X)/N$, где $N \triangleleft \mathbf{F}_V(X)$, $N = \ker \pi$, $\pi: \mathbf{F}_V(X) \rightarrow \mathbf{G}$ – естественный эпиморфизм; вместо $\pi(x)$ будем также писать $\bar{x}$.

Пусть $\mathbf{U}$ – свободный $\mathbf{R}$ -модуль с базой X , и пусть множество $H = G \times U$. Тогда на H вводится структура V -алгебры:

$$(a, u) + (b, v) = (a + b, A(a + b)(A(a)^{-1}u + B(a)A(b)^{-1}v)),$$

$$\text{где } A(a) = \mathcal{D}_1(0, a), \quad A(a)^{-1} = \mathcal{D}_1(a, -a),$$

$$-(a, u) = (-a, -A(-a)B(-a)A(a)^{-1}u),$$

$$0 = (0, 0), \quad c = (c, 0), \quad \text{где } c - \text{нулевой мультиоператор,}$$

$$f(\vec{h}) = \left(f(\vec{a}), A(f(\vec{a})) \sum_{i=1}^n \mathbf{D}f_i(\vec{a}) A(a_i)^{-1} u_i \right),$$

$$\text{где } h_i = (a_i, u_i), \quad f - \text{мультиоператор арности } n > 0.$$

Представление Магнуса μ – это такой гомоморфизм V -алгебр $\mathbf{F}_V(X) \rightarrow \mathbf{H}$, что $\mu(x) = (\bar{x}, x)$ на X .

С другой стороны, пусть $\mathbf{U}'$ – свободный $\mathbf{R}'$ -модуль с базой X , и пусть множество $H' = G \times U'$. Тогда на H' тоже вводится структура V -алгебры:

$$(a, u) + (b, v) = (a + b, u + B(a)v), \quad -(a, u) = (-a, -B(-a)u),$$

$$0 = (0, 0), \quad c = (c, 0), \quad \text{где } c - \text{нулевой мультиоператор,}$$

$$f(\vec{h}) = \left(f(\vec{a}), \sum_{i=1}^n \mathbf{D}f_i(\vec{a}) u_i \right), \quad \text{где } h_i = (a_i, u_i), \quad f - \text{мультиоператор арности } n > 0.$$

Обозначим через μ' такой гомоморфизм V -алгебр $\mathbf{F}_V(X) \rightarrow \mathbf{H}'$, что $\mu'(x) = (\bar{x}, x)$ на X .

ТЕОРЕМА 2. $\ker \mu = \ker \mu'$.

На касательном кольце к любому многообразию Ω -колец вводится естественная структура алгебры над основным полем. Мы будем называть ее *касательной алгеброй*.

ТЕОРЕМА 3. Касательное кольцо к многообразию всех групп в группе $\mathbf{G}$ есть $\mathbb{Z}\mathbf{G}$. Касательная алгебра к многообразию всех ассоциативных алгебр с единицей в алгебре $\mathbf{A}$ есть $\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}^{op}$. Касательная алгебра к многообразию всех алгебр Ли в алгебре $\mathbf{L}$ есть универсальная обертывающая для $\mathbf{L}$.

Проведенные рассуждения существенно упрощают вычисление касательных колец к конкретным многообразиям Ω -групп. В качестве примера найдено касательное кольцо к многообразию всех p -алгебр Ли.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Артамонов В. А. // Сиб. матем. журн. 1997. Т. 38. № 5. С. 842–854. [2] Ремесленников В. Н., Соколов В. Г. // Алгебра и логика. 1970. Т. 9. № 5. С. 566–578. [3] Gupta N. // Contemp. Math. 1987. V. 66. P. 1–129. [4] Lewin J. // Trans. Amer. Math. Soc. 1974. V. 188. P. 293–308; 309–317.