Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Вербовецкий, О когомологиях комплекса совместности, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 1, 213–214

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm30>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 15:58:08

О КОГОМОЛОГИЯХ КОМПЛЕКСА СОВМЕСТИМОСТИ

А. М. ВЕРБОВЕЦКИЙ

Рассмотрим дифференциальное исчисление в некоторой категории проективных конечно порожденных модулей над коммутативной гладкой алгеброй A (см. [1]). Стандартный пример: $A = C^\infty(M)$ – алгебра гладких функций на многообразии M , а все модули суть A -модули гладких сечений векторных расслоений над M .

Пусть $\mathcal{J}^k(P)$ обозначает A -модуль k -джетов элементов модуля P , $j_k: P \rightarrow \mathcal{J}^k(P)$ – дифференциальный оператор, отображающий каждый элемент $p \in P$ в его джет $j_k(p)$. Для любого дифференциального оператора $\Delta: P \rightarrow P_1$ порядка $\leq k$ существует единственный A -гомоморфизм $\varphi_\Delta: \mathcal{J}^k(P) \rightarrow P_1$ такой, что $\Delta = \varphi_\Delta \circ j_k$. Обозначим через $\Delta^{(l)}$ l -е продолжение оператора Δ , т.е. $\Delta^{(l)} = j_l \circ \Delta: P \rightarrow \mathcal{J}^l(P_1)$.

Комплекс дифференциальных операторов $\cdots \rightarrow P_{i-1} \xrightarrow{\Delta_{i-1}} P_i \xrightarrow{\Delta_i} P_{i+1} \rightarrow \cdots$ называется *формально точным* в члене P_i , если для всех l точны комплексы

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{J}^{k_{i-1}+k_i+l}(P_{i-1}) \xrightarrow{\varphi_{\Delta_{i-1}}^{(k_i+l)}} \mathcal{J}^{k_i+l}(P_i) \xrightarrow{\varphi_{\Delta_i}^{(l)}} \mathcal{J}^l(P_{i+1}) \longrightarrow \cdots,$$

где $\varphi_\Delta^{(l)} = \varphi_{\Delta^{(l)}}$ и $k_i = \text{ord } \Delta_i$.

ТЕОРЕМА 1. *Когомологии любого формально точного комплекса*

$$(1) \quad P \xrightarrow{\Delta} P_1 \xrightarrow{\Delta_1} P_2 \xrightarrow{\Delta_2} P_3 \longrightarrow \cdots$$

равны стабильным когомологиям Спенсера оператора Δ .

Это утверждение вытекает из существования бикомплекса $\{\mathcal{J}^{K-k-k_1-\cdots-k_{i-1}-j}(P_i) \otimes \Lambda^j\}$, K – некоторая константа, в котором один дифференциал – это оператор Спенсера, а второй индуцирован операторами Δ_i .

Формально точные комплексы, о которых идет речь в теореме 1, строятся следующим образом. Предположим, не теряя общности, что гомоморфизм $\varphi_\Delta: \mathcal{J}^k(P) \rightarrow P_1$, отвечающий оператору $\Delta: P \rightarrow P_1$, является эпиморфизмом. Его продолжение $\varphi_\Delta^{(k_1)}: \mathcal{J}^{k+k_1}(P) \rightarrow \mathcal{J}^{k_1}(P_1)$ уже не будет, вообще говоря, эпиморфизмом. Положим $P_2 = \text{coker } \varphi_\Delta^{(k_1)}$ и пусть $\varphi_{\Delta_1}: \mathcal{J}^{k_1}(P_1) \rightarrow P_2$ – естественная проекция.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. $\Delta_1 \circ \Delta = 0$.

Повторяя описанную процедуру, мы приходим к комплексу вида (1).

Рассматривая бикомплекс $\{S^{K-k-k_1-\cdots-k_{i-1}-j}(\Lambda^1) \otimes P_i \otimes \Lambda^j\}$, в котором один дифференциал – это δ -оператор Спенсера, а второй индуцирован символами операторов Δ_i , можно показать, что справедлива

ТЕОРЕМА 2. *Если оператор Δ инволютивен по Спенсеру (т.е. его δ -комплекс Спенсера ацикличесен), то для любых положительных значений $k_1, k_2, \dots$ комплекс (1) формально точен.*

Из δ -леммы Пуанкаре вытекает

ТЕОРЕМА 3. *Для произвольного оператора Δ существуют такие числа $l_1, l_2, \dots$, что комплекс (1) формально точен, если $k_i \geq l_i$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 97-01-00462).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Формально точный комплекс вида (1) называется *комплексом совместности* для оператора Δ .

Имеет место следующее элементарное

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Каждый оператор Δ_i , входящий в комплекс совместности, является оператором совместности для предыдущего оператора, т.е. для любого оператора ∇ , удовлетворяющего условию $\nabla \circ \Delta_{i-1} = 0$, найдется такой оператор $\square$, что $\nabla = \square \circ \Delta_i$.*

В работе [2] были построены высшие аналоги комплексов де Рама. Альтернативное определение этих комплексов дает следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Высшие комплексы де Рама*

$$(2) \quad 0 \longrightarrow A \xrightarrow{d} \Lambda^{(k)} \xrightarrow{d} \Lambda^{(k,k_1)} \xrightarrow{d} \Lambda^{(k,k_1,k_2)} \xrightarrow{d} \dots$$

суть комплексы совместности для оператора $d: A \rightarrow \Lambda^{(k)}$, где $\Lambda^{(k)}$ – коядро естественного вложения $A \rightarrow \mathcal{J}^k(A)$, $a \mapsto aj_k(1)$, а оператор d есть композиция $A \xrightarrow{j_k} \mathcal{J}^k(A) \rightarrow \Lambda^{(k)}$.

Оператор $d: A \rightarrow \Lambda^{(k)}$, очевидно, инволютивен, поэтому комплексы (2) формально точны для любых $k_1, k_2, \dots$. Если $k = k_1 = k_2 = \dots = 1$, то комплекс (2) совпадает с обычным комплексом де Рама алгебры A .

Легко видеть, что когомологии Спенсера оператора $d: A \rightarrow \Lambda^{(k)}$ суть обычные когомологии де Рама алгебры A . Таким образом, теорема 1 дает новое элементарное доказательство совпадения высших когомологий де Рама с обычными (см. [3], [4]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Виноградов А. М., Красильщик И. С., Лычагин В. В. Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1986. [2] Виноградов А. М. // УМН. 1979. Т. 34. № 6. С. 145–150. [3] Vezzosi G., Vinogradov A. M. // On higher analogs of the de Rham complex. Vienna. Preprint ESI 202, 1995. [4] Torkhov Yu. N. Higher de Rham complexes // Proc. Conf. Secondary Calculus and Cohomological Physics: Moscow, 1997.

Московский государственный технический
университет им. Н.Э. Баумана,
Институт диффеотопии РАЕН
E-mail: verbovet@mail.ecfor.rssi.ru

Принято редколлегией
27.10.1997