Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Джиакоббе, Выпуклость и многозначные гамильтонианы, *УМН*, 2000, том 55, выпуск 3, 177–178

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm300>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 17:49:45

ВЫПУКЛОСТЬ И МНОГОЗНАЧНЫЕ ГАМИЛЬТониАНЫ

А. ДЖИАКОВБЕ

Симплектическое действие связной группы Ли G на симплектическом многообразии (W^{2N}, Ω) определяет отображение $(\xi \mapsto X_\xi)$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G в векторные поля на многообразии, называемое инфинитезимальным действием. Опускание индекса при помощи симплектической 2-формы дает отображение $(\xi \mapsto \tau_\xi)$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в замкнутые 1-формы на W . Эти 1-формы τ_ξ называются гамильтонианами. Если действие гамильтоново (что означает точность всех гамильтонианов), то можно определить отображение моментов $\mu: W \rightarrow \mathfrak{g}^*$.

Если дополнительно G является тором $\mathbf{T}$, то образ такого отображения является выпуклым многогранником, как это было показано в [1] и [2].

Когда не все гамильтонианы точны, возможно определить обобщенное отображение моментов. Это отображение определено на минимальной абелевой накрывающей симплектического многообразия (на которой все гамильтонианы поднимаются до точных 1-форм). В случае тора $\mathbf{T}$ образ этого отображения является выпуклым неограниченным многогранником, так как содержит целое подпространство направлений многозначности. Развитая техника позволяет получить некоторые другие интересные факты: гамильтоновы действия являются устойчивыми относительно возмущений симплектической формы, а действие тора (с неподвижными точками) размерности вдвое меньше размерности симплектического многообразия является обязательно гамильтоновым.

Условие однозначности гамильтонианов не подходит для некоторых интересных физических ситуаций, как показано в [3]. Вопрос справедливости теоремы выпуклости при ослаблении условия однозначности гамильтонианов является интересным как в физике, так и в математике.

Для замкнутых 1-форм τ_ϑ , $\vartheta \in \mathfrak{t}$, где $\mathfrak{t}$ – алгебра Ли тора $\mathbf{T}$, все критические многообразия являются симплектическими (и, следовательно, четномерными); более того, индекс τ_ϑ на критическом многообразии является четным, а следовательно, таковым является и коиндекс. Это следует из локального выражения для отображения моментов. Индекс τ_ϑ в критической точке есть удвоенное число весов α_j таких, что $\langle \alpha_j, \vartheta \rangle < 0$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть τ -замкнутая 1-форма Морса–Ботта без критических подмногообразий индекса 1 на компактном многообразии W . Если u – локальный минимум, то он единственный, а τ – точная форма.

Предложение может быть доказано сначала для рациональных 1-форм. Рациональная 1-форма корректно определяет S^1 -значное отображение. Это отображение может быть пропущено через граф, вершины которого соответствуют критическим многообразиям данной 1-формы. Стандартные комбинаторные рассуждения на графе завершают доказательство для рациональных 1-форм. Для произвольных 1-форм теорема верна потому, что любая замкнутая 1-форма Морса–Ботта степени иррациональности r ($r > 1$) может быть аппроксимирована замкнутой 1-формой Морса–Ботта с теми же особенностями и степенью иррациональности $r - 1$.

Первым следствием этой теоремы является

ТЕОРЕМА 2. Если действие тора $\mathbf{T}^n$ на компактном симплектическом многообразии (W^{2n}, Ω) имеет неподвижные точки, то действие гамильтоново.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что действие является эффективным. Рассмотрим неподвижную точку p . Ковекторы α_j должны порождать (над $\mathbb{Z}$) $\mathbb{Z}^n$ и их не может быть больше n . Следовательно, после $SL(n, \mathbb{Z})$ -замены координат в $\mathfrak{t}^*$ получаем, что $\alpha_j = e_j$, $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $e_n = (0, \dots, 0, 1)$. Теперь выберем произвольный $\vartheta \in \mathfrak{t}$ из первого октанта, т.е. ϑ с положительными координатами относительно канонического базиса. 1-форма τ_ϑ имеет локальный минимум в p и, следовательно, должна быть точной. В этом случае подпространство $\mathfrak{t}_e$ векторов в $\mathfrak{t}$, соответствующих точным гамильтонианам, совпадает с алгеброй Ли $\mathfrak{t}$. Отсюда следует гамильтоновость действия.

ТЕОРЕМА 3. *На компактном симплектическом многообразии с симплектическим действием тора подпространство t_e векторов из t , соответствующих точным гамильтонианам, является рациональным подпространством. Это подпространство не меняется при малых возмущениях симплектической формы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно показать: если 1-форма τ_ϑ точна (для каждого вектора $\vartheta \in t$), то она должна остаться точной при малой деформации симплектической формы. Аналогично для векторов $\vartheta \in t$, соответствующих неточным формам τ_ϑ .

Имеется одно интуитивно понятное следствие этой теоремы: многозначные гамильтонианы остаются многозначными. Для неточной τ_ϑ верно, что $\int_\gamma \tau_\vartheta \neq 0$ для некоторой нетривиальной петли γ из фундаментальной группы многообразия. При любой малой деформации симплектической формы Ω 1-форма τ_ϑ меняется гладким образом, и, соответственно, гладко меняется ее интеграл, который должен оставаться ненулевым при малых деформациях Ω (неточность является устойчивым свойством).

Что остается неясным, так это локальная устойчивость точных гамильтонианов. Ранее мы доказали, что τ_ϑ является точной тогда и только тогда, когда у нее есть минимум, что эквивалентно существованию точки p , неподвижной для τ_ϑ .

Но самом деле от симплектической структуры Ω зависит только знак этих весов, причем зависит непрерывным образом, следовательно, веса являются устойчивыми относительно малых возмущений Ω . Соответственно, существование или отсутствие неподвижных точек локально не зависит от Ω , а значит, таким же является и свойство точности/неточности формы.

Это приводит к другой теореме, которая является естественным обобщением результатов из [1], [2]:

ТЕОРЕМА 4. *Пусть тор T^n действует на симплектическом многообразии (W^{2N}, Ω) . Существует абелево накрытие $\widetilde{W}$, на котором каждая 1-форма τ_ϑ поднимается до точной 1-формы. $\widetilde{W}$ есть минимальное накрытие, на котором отображение моментов определено как функция. Образ отображения моментов $\tilde{\mu}: \widetilde{W} \rightarrow t^*$ является выпуклым, но возможно некомпактным многогранником.*

В самом деле, образ $\tilde{\mu}(\widetilde{W})$ получается следующим образом: рассмотрим максимальный тор T_e , отвечающий однозначным гамильтонианам. Его неподвижные многообразия Z_j (j пробегает конечное множество) определяют вершины выпуклого ограниченного многогранника P в t_e^* , который является образом ограничения отображения моментов на T_e . Множество $\tilde{\mu}(\widetilde{W})$ является выпуклым многогранником $P \times (t_e^*)^\perp$.

Можно доказать утверждение, параллельное результату в [4]. В этом случае выпуклый многогранник является пересечением образа многозначного отображения моментов с некоторой камерой Вейля.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть W – симплектическое многообразие с симплектическим действием компактной группы Ли G . Тогда существует отображение моментов, определенное на соответствующей накрывающей многообразия W со значениями в сопряженном пространстве к алгебре Ли группы G : $\tilde{\mu}: \widetilde{W} \rightarrow \mathfrak{g}^*$.*

Пересечение образа $\tilde{\mu}$ с положительной камерой Вейля является выпуклым многогранником.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Atiyah M. F. // Bull. London Math. Soc. 1982. V. 14. P. 1–15. [2] Guillemin V., Stenberg S. // Invent. Math. 1982. V. 67. P. 491–513. [3] Новиков С. П. // УМН. 1982. Т. 37. №5. С. 3–49. [4] Kirwan F. // Invent. Math. 1984. V. 77. P. 547–552.