Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. М. Кричевер, С. П. Новиков, Голоморфные расслоения и коммутирующие разностные операторы. Двухточечные конструкции, *УМН*, 2000, том 55, выпуск 3, 181–182

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm302>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 17:43:48

ГОЛОМОРФНЫЕ РАССЛОЕНИЯ И КОММУТИРУЮЩИЕ РАЗНОСТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ. ДВУХТОЧЕЧНЫЕ КОНСТРУКЦИИ

И. М. КРИЧЕВЕР, С. П. НОВИКОВ

Настоящая работа непосредственным примыкает к предшествующей работе авторов [1]. Как известно, в современной математической физике теория коммутирующих одномерных операторов появилась, как побочный алгебраический аспект теории интегрирования нелинейных солитонных систем и спектральной теории периодических конечнозонных операторов [2]–[5].

Как чисто алгебраическая задача, проблема классификации обыкновенных скалярных дифференциальных операторов была поставлена еще в 20-х годах Бурхналом и Чаунди [6], которые далеко продвинулись в решении задачи для случая операторов взаимно-простых порядков (в котором ранг всегда равен 1), завершеном в [3]. Они же отмечали, что общая задача для ранга $r > 1$, представляется чрезвычайно трудной.

Первые шаги были сделаны в работах [7], [8]. Метод эффективной классификации коммутирующих дифференциальных операторов ранга $r > 1$ общего положения был создан авторами в работах [9], [10]. Коммутирующие пары ранга r зависят от $(r - 1)$ произвольной функции одной переменной, гладкой алгебраической кривой Γ с *одной* отмеченной точкой P и набора параметров Тюринга (характеризующих оснащенное стабильное голоморфное расслоение). Мы называем такие конструкции *одноточечными*.

Для разностных операторов вся, ставшая уже классической, теория пар коммутирующих операторов ранга $r = 1$ основывалась только на *двухточечных конструкциях* [11], [12]. Кольца таких операторов оказывались изоморфны кольцам $A(\Gamma, P^\pm)$ мероморфных функций на алгебраической кривой Γ с полюсами в паре отмеченных точек $P^\pm$.

В предшествующей работе авторов [1] было показано, что для ранга $2l \geq 2$ широкий класс коммутирующих разностных операторов получается из одноточечной конструкции. Аналогично непрерывному случаю, эти операторы зависят от произвольных функций одной переменной $n \in \mathbb{Z}$.

В настоящей работе нами получено описание широкого класса коммутирующих разностных операторов, построенных исходя из двухточечных конструкций. В отличие от одноточечных конструкций, здесь не возникает никаких произвольных функций; коэффициенты операторов могут быть вычислены через тэта-функции Римана. Как и для случая ранга 1, эти операторы приводят к решениям уравнений $2D$ цепочки Toda и в всей связанной с ними иерархии.

Рассмотрим гладкую алгебраическую кривую Γ рода g с двумя отмеченными точками $P^\pm$. Пусть (γ) является набором rg точек γ_s , $s = 1, \dots, rg$, на Γ , а (α) является набором $(r - 1)$ -мерных векторов: $\alpha_s = (\alpha_{sj})$, $j = 1, \dots, r - 1$. Согласно [9], [10], эти параметры (γ, α) , называются *параметрами Тюринга*. В общем случае они определяют стабильное оснащенное расслоение $\mathcal{E}$ над Γ ранга r и степени $c_1(\det \mathcal{E}) = rg$.

ЛЕММА 1. *Для любого набора параметров Тюринга (γ, α) общего положения существует единственная мероморфная вектор-функция $\psi_n(Q) = (\psi_n^i(Q))$, $i = 1, \dots, r$; $Q \in \Gamma$ такая, что: (i) вне $P^\pm$ функция $\psi_n^i(Q)$ имеет не более чем простые полюсы в точках γ_s ; ее вычеты в этих точках удовлетворяют соотношению $\alpha_{si} \operatorname{res}_{\gamma_s} \psi_n^i = \operatorname{res}_{\gamma_s} \psi_n^r$; (ii) в окрестности отмеченных точек $\psi_n(Q)^i$, $n = kr + j$, $0 \leq j < r$, имеет вид*

$$(1) \quad \psi_n^i = z_{\pm}^{\mp k} (\xi_{n,\pm}^i + O(z_{\pm})),$$

где $\xi_{kr+j,+}^j = 1$, $\xi_{kr+j,+}^i = 0$, $i > j$; $\xi_{kr+j,-}^i = 0$, $i < j$ (здесь $z_{\pm}$ локальные координаты в окрестностях $P^\pm$).

Определенная выше вектор-функция является аналогом разностной функции Бейкера–Ахизера для случая высших рангов.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\psi_n^i(Q)$ является векторной функцией Бейкера-Ахиезера, соответствующей набору алгебро-геометрических данных $\{\Gamma, P^\pm, (\gamma, \alpha)\}$. Тогда для любой функции $f(Q) \in A(\Gamma, P^\pm)$ существует единственный разностный оператор L_f вида:

$$(2) \quad L_f = \sum_{i=-rn_-}^{rn_+} u_i(n) T^i, \quad u_{\pm rn_\pm} = f_\pm \neq 0,$$

такой, что $L_f \psi_n^i(Q) = f(Q) \psi_n^i(Q)$, $i = 1, \dots, r$. Здесь $Tu_n = u_{n+1}$ оператор сдвига, а $n_\pm$ порядки функции $f(Q)$ в точках $P^\pm$.

Как функция ψ , так и коэффициенты операторов могут быть явно вычислены через θ -функцию Римана, отвечающую кривой Γ . Коэффициенты операторов L_f являются периодическими функциями тогда и только тогда, когда $A(P^+) - A(P^-)$ является точкой конечного порядка на якобиане $J(\Gamma)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Обратим внимание на то, что в этой конструкции нет функциональных параметров даже и в случае ранга $r > 1$. Из формула (2) следует, что среди операторов L_f имеются как такие, что все сдвиги T^i положительны, $i > 0$, так и такие операторы, что все сдвиги отрицательны, $i < 0$. Одноточечные конструкции никогда не приводят к таким операторам. Мы естественно приходим здесь и к конструкции представлений варианта алгебры Каца-Мули $\widehat{sl}(r, C)$, ассоциированной с алгебраической кривой Γ с отмеченными точками $P^\pm$ по схеме работы [13].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Авторы также построили для любого ранга $r > 1$ двухточечные вектор-функции Бейкера-Ахиезера, задающие решения полной иерархии уравнений $2D$ цепочки Toda. Они зависят от $2(r-1)$ произвольных функций. Эта конструкция содержит теорию интегрируемых потенциалов двумерного оператора Шредингера, связанных с раслоениями высших рангов, начатую авторами в работе [14].

Рассмотрим кольцо $\mathcal{D}$ разностных операторов конечного порядка. В силу теоремы 1 набор параметров Тюринга общего положения (γ, α) задает гомоморфизм $G_{(\gamma, \alpha)}: A(\Gamma, P^\pm) \mapsto \mathcal{D}$, образ которого является максимальным коммутативным подкольцом. Следующая теорема показывает, что предложенная конструкция описывает все подобные кольца общего положения.

ТЕОРЕМА 2. Для любого кольцевого мономорфизма $G: A(\Gamma, P^\pm) \mapsto \mathcal{D}$, такого что операторы $L_f = G(f)$ имеют вид (2), нормированные совместные собственные функции определяют оснащенное голоморфное расслоение ранга r и степени rg . В общем положении, когда это расслоение описывается параметрами Тюринга (γ, α) , гомоморфизм G совпадает с гомоморфизмом $G = G_{(\gamma, \alpha)}$, задаваемым в силу теоремы 1 с помощью соответствующей векторной функции Бейкера-Ахиезера.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Кричевер И. М., Новиков С. П. // УМН. 2000. Т. 55. №1. С. 187–188. [2] Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П. // УМН. 1976. Т. 31. №1. С. 55–136. [3] Кричевер И. М. // УМН. 1977. Т. 32. №6. С. 183–208. [4] Дубровин Б. А., Кричевер И. М., Новиков С. П. Итоги науки и техники. Фундаментальные проблемы математики. М.: ВИНТИ, 1985. [5] Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов. Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980. [6] Burchdall J. L., Chaundy T. W. // Proc. Roy. Soc. London. 1928. V. 118. P. 557–583. [7] Dixmier J. // Matematika. 1969. V. 13. №4. P. 27–40. [8] Дринфельд В. Г. // Функц. анализ и его прил. 1977. Т. 11. №1. С. 11–31. [9] Кричевер И. М. // Функц. анализ и его прил. 1978. Т. 12. №3. С. 20–31. [10] Кричевер И. М., Новиков С. П. // Функц. анализ и его прил. 1978. Т. 12. №4. С. 41–52. [11] Кричевер И. М. // УМН. 1978. Т. 33. №4. С. 215–216. [12] Mumford D. // Proceedings of International Symposium on Algebraic Geometry (Kyoto Univ., Kyoto 1977). Tokyo: Kinokuniya Book Store, 1978. P. 115–153. [13] Кричевер И. М., Новиков С. П. // Функц. анализ и его прил. 1987. Т. 21. №2. С. 46–63. [14] Кричевер И. М., Новиков С. П. // УМН. 1980. Т. 35. №6. С. 47–68.