Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Мелихов, Псевдогомотопия влечет гомотопию для сингулярных зацеплений коразмерности ≥ 3 , *УМН*, 2000, том 55, выпуск 3, 183–184

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm303>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 06:39:07

ПСЕВДОГОМОТОПИЯ ВЛЕЧЕТ ГОМОТОПИЮ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ЗАЦЕПЛЕНИЙ КОРАЗМЕРНОСТИ ≥ 3

С. Мелихов

Пусть X и Q – топологические пространства, причем для X фиксировано разложение в несвязное объединение: $X = X_1 \sqcup \dots \sqcup X_k$. Непрерывное отображение $f: X \rightarrow Q$ называется (обобщенным) *сингулярным зацеплением*, если $f(X_i) \cap f(X_j) = \emptyset$ при $i \neq j$. Сингулярные зацепления $f_0, f_1: X \rightarrow Q$ называются *псевдогомотопными*, если существует сингулярное зацепление $F: X \times I = X_1 \times I \sqcup \dots \sqcup X_k \times I \rightarrow Q \times I$ такое, что $F(x, i) = (f_i(x), i)$ при $i = 0, 1$ и любом $x \in X$. Если, кроме того, F сохраняет уровни (т.е. если $F^{-1}(Q \times t) = X \times t$ при всех $t \in I$), то f_0 и f_1 называются *гомотопными*. Ниже рассматривается только случай компактного полиэдра X и кусочно-линейного многообразия Q ; наибольший интерес (см. [1]–[8]) представляют сингулярные зацепления $S^{n_1} \sqcup \dots \sqcup S^{n_k} \rightarrow S^m$. Далее они называются *сферическими*, а множество их классов эквивалентности по отношению гомотопии обозначается $LM_{n_1, \dots, n_k}^m$.

В 60-х годах было показано, что в гладкой (Смейл, Хэфлигер, Хадсон) и кусочно-линейной (Зиман, Ликориш, Хадсон) категориях в коразмерности ≥ 3 конкордантные вложения объемлемо изотопны (см. [9]; хорошо известно, что это не так в меньших коразмерностях). Аналогичный вопрос в теории сферических сингулярных зацеплений: влечет ли псевдогомотопия гомотопию в коразмерности ≥ 3 – оставался открытым (см. [4; с. 303], а также [2; замечание 2.4]). Развивая методы Зимана, Ликориша и Хадсона, можно показать, что вопрос решается положительно даже для несколько более общих сингулярных зацеплений, чем сферические:

ТЕОРЕМА 1. *Если $m - n \geq 3$ и сингулярные зацепления $f_0, f_1: X \rightarrow Q$ компактного n -мерного полиэдра $X = X_1 \sqcup \dots \sqcup X_k$ в кусочно-линейном m -мерном многообразии Q псевдогомотопны, то они гомотопны.*

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Пусть $F: X \times I \rightarrow Q \times I$ – данная псевдогомотопия между f_0 и f_1 . Условимся считать, что “солнце” испускает свои “лучи” в “вертикальном” направлении I -слоев $Q \times I$. Допустим, что удалось найти отображение $H: X \times I \rightarrow X \times I$, тождественное на $X \times \{0, 1\}$ и такое, что F -образ каждого “слоя” $H(X \times t)$ не затеняет сам себя (т.е. никакие две различные точки $F \circ H(X \times t)$ не лежат на одной вертикали). Тогда при замене $F \circ H$ на сохраняющее уровни отображение $G: X \times I \rightarrow Q \times I$, $G(x, t) = (\pi_Q \circ F \circ H(x, t), t)$, новых двойных точек не появляется. Поскольку G совпадает с F на $X \times \{0, 1\}$, это и есть искомая гомотопия.

Чтобы построить H , заметим, что без ограничения общности F кусочно-линейно, и по общему положению множество S точек из $X \times I$, F -образы которых лежат на одной вертикали с некоторыми другими, имеет коразмерность ≥ 2 в $X \times I$; в частности, $X_i \times I \setminus S$ связно при каждом i . Аналогично доказательству леммы Зимана о солнечном сдавливании (см. [9; 5.2]) можно показать, что $X \times I$ сдавливается на $X \times 0$ так, что симплексы S сдавливаются в порядке взаимного затенения их образов и уменьшения размерностей. Небольшой модификацией сдавливания можно добиться того, что на каждом его этапе F -образ образа $X \times 1$ при сдавливании не затеняет сам себя. Но тогда отображение $X \times I$ в себя, переводящее точку (x, t) в образ точки $(x, 1)$ в момент $(1 - t)$ сдавливания, является требуемым (за исключением того, что оно не тождественно на $X \times 0$, что легко исправить).

Укажем некоторые другие результаты о соотношении гомотопии и псевдогомотопии; в части коразмерности ≥ 3 все они обобщаются теоремой 1. Было установлено, что эти два отношения совпадают для сингулярных зацеплений $S^{n_1} \sqcup \dots \sqcup S^{n_k} \rightarrow S^m$ при $m = 3$, $n_i = 1$ [5], при $n_1 \leq m - 3$ и $n_2, \dots, n_k \leq \frac{2}{3}m - 1$ [3], при $k = 2$ и $2n_1 + 2n_2 \leq 3m - 5$ [1], а также для сингулярных зацеплений, гомотопных гладко вложенным, все строгие подзацепления которых гомотопны тривиальным, при $n_i \leq m - 3$ и $n_2, \dots, n_k \leq k(m - 2) - (n_1 + \dots + n_k)$ (Нежинский и [4; 8.4с]). Тайхнер анонсировал, что гомотопия влечет псевдогомотопию для сферических сингулярных зацеплений коразмерности ≥ 2 [4; сноска на с. 303]. С другой стороны, Саяховой был

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00009).

получен пример псевдогомотопных, но не гомотопных сингулярных зацеплений $S^1 \sqcup S^1 \sqcup S^2 \rightarrow S^3$ [7].

Теорема 1, в частности, утверждает, что при ее условиях любая классификация сингулярных зацеплений по отношению псевдогомотопии (например, классификации Нежинского [6] и Скопенкова [10]) является классификацией и по отношению гомотопии, а любой инвариант гомотопии инвариантен и при псевдогомотопии. Следует отметить, что упомянутые результаты [1], [3], [4] о достаточности псевдогомотопии для гомотопии были получены в качестве следствий полноты и инвариантности при псевдогомотопии некоторых инвариантов гомотопии.

Для любых гомотопических классов $\alpha, \beta \in LM_{n_1, \dots, n_k}^m$ обычным образом определяется их *связная сумма* $\alpha \# \beta \in LM_{n_1, \dots, n_k}^m$, причем в коразмерности ≥ 3 (и в некоторых других случаях) это определение корректно (см. [2], [8], ср. с [6]). *Отражение* $\rho(\alpha) \in LM_{n_1, \dots, n_k}^m$ определяется как гомотопический класс сингулярного зацепления $R \circ f \circ r$, где $f: S^{n_1} \sqcup \dots \sqcup S^{n_k} \rightarrow S^m$ – любой представитель α , а $r: S^{n_1} \sqcup \dots \sqcup S^{n_k} \rightarrow S^{n_1} \sqcup \dots \sqcup S^{n_k}$ и $R: S^m \rightarrow S^m$ – зеркальные отражения в сферах S^{n_i} и S^m (действительно, если f' – другой представитель α , т.е. f и f' гомотопны, то $R \circ f \circ r$ и $R \circ f' \circ r$ гомотопны “отраженной” гомотопией).

Следствие 2. Пусть $n_i \leq m - 3$ при всех $i = 1, \dots, k$. Тогда связная сумма (рассматриваемая в качестве сложения) и отражение (рассматриваемое в качестве обращения) порождают структуру абелевой группы на $LM_{n_1, \dots, n_k}^m$.

Подобное утверждение было сформулировано Скоттом [8]. Однако, как заметил Кошорке [2; 2.4], доказательство этого утверждения содержало пробел: фактически было показано, что отражение – обращение с точностью до псевдогомотопии, а не гомотопии. Пробел закрывает теорема 1; в остальном доказательство следствия аналогично [8] (см. также [2], [6]). Следствие 2 отвечает на [1; вопрос 1] в случае коразмерности ≥ 3 .

Аналогично теореме 1 доказывается следующая более общая

ТЕОРЕМА 3. Пусть X^n – компактный полиэдр, Q^m – кусочно-линейное многообразие, $m - n \geq 3$, и $F: X \times I \rightarrow Q \times I$ – отображение такое, что $F^{-1}(Q \times i) = X \times i$ при $i = 0, 1$. Для любого $\epsilon > 0$ существует сохраняющее уровни отображение $G: X \times I \rightarrow Q \times I$ такое, что $G(x, i) = F(x, i)$ при $i = 0, 1$ и всех $x \in X$, и такое, что для любых $x_1, \dots, x_l \in X$ выполнено следующее: $G(x_1 \times I) \cap \dots \cap G(x_l \times I) \neq \emptyset$, только если $F(N_\epsilon(x_1) \times I) \cap \dots \cap F(N_\epsilon(x_l) \times I) \neq \emptyset$, где $N_\epsilon(x)$ обозначает ϵ -окрестность x в некоторой фиксированной метрике.

Из теоремы 3 вытекают, в частности, аналоги теоремы 1 для обобщенных дудлей, т.е. отображений $f: X_1 \sqcup \dots \sqcup X_k \rightarrow Q$ с $fX_i \cap fX_j \cap fX_k = \emptyset$ при различных i, j, k , и для почти вложений, т.е. отображений $X \rightarrow Q$ с малыми прообразами точек.

Автор выражает благодарность В. М. Нежинскому и А. Б. Скопенкову за введение в круг вопросов, рассматриваемых в данной работе, У. Кошорке за пересылку его статей для ознакомления, П. М. Ахметьеву, Р. Р. Садыкову, К. Р. Салихову, Ю. П. Соловьёву и Е. В. Щепину за полезные обсуждения и ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Habegger N., Kaiser U. // Topology. 1998. V. 37. P. 75–94. [2] Koschorke U. // Manuscripta Math. 1988. V. 61. P. 383–415. [3] Koschorke U. // Global Analysis in Modern Mathematics. Houston, TX: Publish or Perish, Inc., 1993. P. 283–299. [4] Koschorke U. // Topology. 1997. V. 36. P. 301–324. [5] Lin X. S. On equivalence relations of links in 3-manifolds. UCSD 1985 (Preprint). [6] Нежинский В. М. // Алгебра и анализ. 1993. Т. 5. С. 170–190; II // Зап. науч. сем. ПОМИ. 1995. Т. 231. С. 191–196. [7] Саяхова Р. Ф. Сингулярные зацепления типа $(1, 1, m)$ в S^3 , $m > 1$ (Препринт). [8] Scott G. P. // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1968. V. 32. P. 186–190. [9] Hudson J. F. P. // Ann. of Math. 1970. V. 91. P. 425–448. [10] Skopenkov A. B. On the generalized Massey–Rolfen invariant for link maps (Preprint).