Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Ордин, Обобщенное барицентрическое разбиение треугольника и полу-
группы мебиусовых преобразований, *УМН*, 2000, том 55, выпуск 3, 185–186

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm304>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 17:32:59

ОБОБЩЕННОЕ БАРИЦЕНТРИЧЕСКОЕ РАЗБИЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКА И ПОЛУГРУППЫ МЕБИУСОВЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

А. А. Ордин

Данный треугольник разрезаем медианами на 6 треугольников, каждый из которых в свою очередь разрезаем медианами на 6 меньших треугольников, и т. д. до бесконечности. Следующий вопрос принадлежит В. Стаховскому: найдутся ли для произвольного заданного треугольника сколь угодно близкие к нему с точностью до подобия треугольники из построенного множества? И. Барани и А. Бердон в [1] ответили на этот вопрос положительно. В этой работе мы развиваем идею их доказательства для случая разбиения треугольника чевианами, проходящими через точку с фиксированными барицентрическими координатами относительно вершин треугольника.

Зафиксируем числа $p = (p_0, p_1, p_2) > 0, p_0 + p_1 + p_2 = 1$. Пусть $\mathbf{A} = (A_0, A_1, A_2)$ – треугольник, $C = p_0 A_0 + p_1 A_1 + p_2 A_2$. Рассмотрим 6 треугольников, на которые треугольник $\mathbf{A}$ разбивается прямыми $A_i C$. Занумеруем вершины каждого из них индексами 0, 1, 2 так, чтобы вершина, совпадающая с точкой A_i , получила номер i и чтобы получающаяся ориентация совпадала с ориентацией треугольника $\mathbf{A}$. Построенный набор треугольников мы обозначим через $B(\mathbf{A})$. Пусть $B^0(\mathbf{A}) = \{\mathbf{A}\}$, $B^n(\mathbf{A}) = \bigcup_{\mathbf{A}' \in B^{n-1}(\mathbf{A})} B(\mathbf{A}')$, $n \in \mathbb{N}$, $T(\mathbf{A}) = \bigcup_{n=0}^{\infty} B^n(\mathbf{A})$.

ТЕОРЕМА. Для любого треугольника $\mathbf{B}$ в $T(\mathbf{A})$ найдется треугольник, сколь угодно близкий к $\mathbf{B}$ с точностью до подобия.

План доказательства. Без ограничения общности мы можем считать, что $p_0 \leq p_1 \leq p_2$. Треугольнику $\mathbf{A} = (A_0, A_1, A_2)$ сопоставим вектор $l(\mathbf{A}) = (|A_1 - A_2|^2, |A_2 - A_0|^2, |A_0 - A_1|^2)$. Обозначим через $\mathbf{A}^{ij}$, $i, j \in \overline{0, 2}, i \neq j$, треугольник из $B(\mathbf{A})$, прилегающий к стороне, противоположной A_i , и к вершине, противоположной в этой стороне к A_j . Тогда имеем для любой перестановки i, j, k номеров 0, 1, 2 ([1]): $l(\mathbf{A}^{ij}) = F_{ij} l(\mathbf{A})$, $F_{ij} = M_{ij}^{-1} U_{p_i} V_{p_j / (1-p_i)} M_{ij}$, где $U_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-\alpha & \alpha & -\alpha(1-\alpha) \\ 0 & 0 & \alpha^2 \end{pmatrix}$, $V_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\alpha(1-\alpha) & 1-\alpha & \alpha \end{pmatrix}$, $M_{ij} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i \\ a_j \\ a_k \end{pmatrix}$.

Ясно, что множество векторов треугольников из $T(\mathbf{A})$ есть множество образов (орбита) $l(\mathbf{A})$ под действием полугруппы, порожденной операторами F_{ij} .

ЛЕММА 1 ([1]). $a = (a_0, a_1, a_2)$ есть вектор некоторого треугольника тогда и только тогда, когда $a_i > 0$, $\forall i = 0, 1, 2$ и $q(a) = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 - 2a_0 a_1 - 2a_1 a_2 - 2a_2 a_0 < 0$. Множество таких векторов есть открытый круговой конус C с осью $L = \{t(1, 1, 1) : t \in \mathbb{R}\}$, вписанный в положительный октант $\mathbb{R}^3$. Число $-q(a)/16$ есть квадрат площади треугольника с квадратами сторон a_0, a_1, a_2 .

Операторы F_{ij} отображают конус C на себя, поэтому мы можем рассматривать их как мебиусовы преобразования g_{ij} единичного круга $\Delta = \{z : |z| < 1\}$ ([1]). Пусть G – порожденная ими полугруппа. Нам достаточно доказать, что G всюду плотна в группе ST всех собственных мебиусовых преобразований Δ . Пусть $w = e^{\pi i/3}$, $z_0 = 1$, $z_1 = w^2$, $z_2 = w^4$, $M \subset \Delta$ – гиперболический треугольник с вершинами z_0, z_1, z_2 . Полуплоскость из $\Delta \setminus M$ напротив точки z_i мы обозначаем через Ω_i . Через $\bar{\Omega}$ мы обозначаем замыкание подмножества $\Omega \subset \Delta$ в Δ .

ЛЕММА 2. Пусть $H \subset G$ – полугруппа, $P \subset \Delta$ – многоугольник с конечным числом вершин на абсолюте $\{v_1, \dots, v_k\}$ и всякая орбита $H \cdot z$ пересекается с P . Пусть для всякого $i \in \overline{1, k}$ существует гиперболическая изометрия $g_i \in H$, для которой v_i есть отталкивающая неподвижная точка. Тогда существует компакт $K \subset \Delta$, с которым пересекается всякая орбита $H \cdot z$.

ЛЕММА 3. Пусть $H \subset \Gamma$ – полугруппа и существует компакт $K \subset \Delta$ такой, что для всякой точки $z \in \Delta$ $H \cdot z \cap K \neq \emptyset$. Тогда замыкание полугруппы $\overline{H}$ является группой.

Леммы 2 и 3 применяются для доказательства того, что $\overline{G}$ есть группа. Пару номеров (i, j) , $i, j \in \overline{0, 2}$, $i \neq j$, назовем регулярной, если $p_j > p_i(1 - p_i)$, нерегулярной, если $p_j \leq p_i(1 - p_i)$, нейтральной, если $p_j = p_i(1 - p_i)$, и строго нерегулярной, если $p_j < p_i(1 - p_i)$.

ЛЕММА 4. Пусть i, j, k – произвольная перестановка номеров $0, 1, 2$. Если (i, j) – регулярная пара, то g_{ij} – гиперболическая изометрия с отталкивающей неподвижной точкой z_i и $A_{g_{ij}} \subset \Omega_j$. Если (i, j) – нейтральная пара, то g_{ij} – параболическая изометрия с неподвижной точкой z_i . Если (i, j) – строго нерегулярная пара, то g_{ij} – гиперболическая изометрия с притягивающей неподвижной точкой z_i и $A_{g_{ij}} \subset \Omega_k$. Кроме того, $g_{ij}(\overline{\Omega_k}) \cap \overline{\Omega_j} = \emptyset$, $g_{ij}(\Omega_j) \subset \Omega_j$.

Случай 1: среди пар $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$ есть регулярные. Тогда найдутся номера i, j такие, что пары (i, j) и (j, i) регулярны. Пусть $P_1 = (g_{ij}(\Omega_k) \cup g_{ji}(\Omega_k)) \cap M$.

ЛЕММА 5. В случае 1 любая орбита $G \cdot z$ содержит точки из P_1 .

В силу леммы 4 многоугольник P_1 имеет две вершины z_i, z_j на абсолюте, причем z_i есть отталкивающая неподвижная точка g_{ij} , z_j есть отталкивающая неподвижная точка g_{ji} .

Случай 2: пары $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$ нерегулярны. Пусть $P_2 = (g_{20}(\Omega_2) \cup g_{21}(\Omega_2)) \cap M$.

ЛЕММА 6. В случае 2 любая орбита $G \cdot z$ содержит точки из P_2 .

В силу леммы 4 многоугольник P_2 имеет две вершины z_0, z_1 на абсолюте, причем z_0 есть отталкивающая неподвижная точка g_{02} , z_1 есть отталкивающая неподвижная точка g_{12} .

В каждом из случаев существует многоугольник, удовлетворяющий вместе с G условию леммы 2. Применяя леммы 2 и 3, получаем, что замыкание полугруппы $\overline{G}$ является группой.

ЛЕММА 7 ([2]). Пусть f, g – гиперболические изометрии, имеющие ровно одну общую неподвижную точку z . Тогда замыкание группы, порожденной f и g , содержит все параболические изометрии с неподвижной точкой z .

ЛЕММА 8 ([1]). Пусть f – эллиптическая изометрия бесконечного порядка, g – изометрия, не фиксирующая неподвижную точку f . Тогда полугруппа, порожденная f и g , всюду плотна в SG .

Применяя лемму 7 к g_{01} и g_{02} , находим, что в $\overline{G}$ содержатся все параболические изометрии с неподвижной точкой z_0 . Используя сопряжение g_{10} , получаем, что там также содержатся все параболические изометрии с неподвижной точкой $g_{10}(z_0) \neq z_0$. Из этого следует, что в $\overline{G}$ есть эллиптическая изометрия бесконечного порядка и по лемме 8 $\overline{G} = SG$. Теорема доказана.

Автор благодарит Н. П. Долбилина за постановку задачи и многочисленные обсуждения результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Barany I., Beardon A. F. // *Mathematika* (London). 1996. V. 43. № 1. P. 165–171.
- [2] Бердон А. Геометрия дискретных групп. М.: Наука, 1986.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: ordin@rnt.ru

Принято редколлегией
03.04.2000