Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. П. Хэкало, Фундаментальное решение итерированного оператора типа Кэли–Гординга, *УМН*, 2000, том 55, выпуск 3, 191–192

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm307>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 14:53:27

ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ИТЕРИРОВАННОГО ОПЕРАТОРА ТИПА КЭЛИ–ГОРДИНГА

С. П. ХЭКАЛО

1. Пусть M – пространство вещественных симметрических матриц с элементами x_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$, и $\partial_{ii} = \partial/\partial x_{ii}$, $\partial_{ij} = \frac{1}{2}\partial/\partial x_{ij}$ для $i \neq j$. В [1] установлено, что гиперболический дифференциальный оператор Кэли–Гординга $\mathcal{L}_0 := \det(\partial_{ij})$ удовлетворяет принципу Гюйгенса в усиленной форме: часть поверхности, на которой существенно задание начальных данных, имеет коразмерность, большую единицы. Другие примеры дифференциальных операторов с усиленным принципом Гюйгенса рассмотрены в [2]. В [3] поставлена задача расширения класса операторов с усиленным принципом Гюйгенса. В настоящей заметке решается частная задача подобного типа.

Для $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_s) \in \mathbb{R}^s$ рассмотрим многочлены $P_s(y) \equiv P_s(y + \gamma_1; \gamma_2; \dots; \gamma_s)$ Бурчналла–Чаунди по переменной $y \in \mathbb{R}$, которые удовлетворяют следующей рекуррентной системе обыкновенных дифференциальных уравнений: $P'_{s+1}P_{s-1} - P_{s+1}P'_s = (2s+1)P_s^2$; $P_0 := 1$; $P_1 := y$. В M выделим две диагональные переменные x_{ii} , x_{jj} и соответствующую им недиагональную x_{ij} . Без ограничения общности можно считать, что $i = 1$, $j = 2$. Свяжем с ними потенциал Штельмахера–Лагнезе [3], [4]

$$u_m(x) := 2\partial_{11}^2 \log(P_{m_1}(x_{11} + x_{22})/P_{m_2}(x_{11} - x_{22})) - 2\partial_{12}^2 \log P_{m_3}(2x_{12}),$$

где набор $m = (m_1, m_2, m_3)$ состоит из неотрицательных целых чисел. Дифференциальный оператор

$$\mathcal{L}_m := \mathcal{L}_0 + u_m(x) \circ \det((\partial_{ij})_{i,j=3,\dots,n})$$

назовем оператором типа Кэли–Гординга. При $n = 2$ он эквивалентен (в смысле элементарных преобразований [4]) оператору волнового типа

$$\partial^2/\partial t^2 - \partial^2/\partial x_1^2 - \partial^2/\partial x_2^2 + 2\partial_t^2 \log P_{m_1}(t) - 2\partial_{x_1}^2 \log P_{m_2}(x_1) - 2\partial_{x_2}^2 \log P_{m_3}(x_2).$$

Это показывает, что операторы $\mathcal{L}_m$ и $\mathcal{L}_0$ не эквивалентны для любого n .

В работе находится фундаментальное решение итерированного оператора $\mathcal{L}_m^\lambda$, λ – натуральное, и даются достаточные условия усиленного принципа Гюйгенса для него.

2. Построение фундаментального решения оператора $\mathcal{L}_m^\lambda$ ведется методом сплетающих операторов [3], [5] и основывается на следующих трех предложениях.

Для $\xi \in M$ пусть $\overline{M_+(\xi)}$ – множество симметрических матриц x , для которых $x - \xi$ положительно определена; $\overline{M_+^T(\xi)}$ – замыкание подмножества матриц x таких, что матрица $x - \xi$ положительно полуопределенная, ранга $r < n$. На M введем семейство обобщенных функций

$$\Phi_0^{(\lambda)}(x; \xi) = \frac{(\det(x - \xi)_+)^{\lambda - \frac{n+1}{2}}}{\Gamma_n(\lambda)}, \quad \Gamma_n(\lambda) = \pi^{\frac{n(n-1)}{4}} \prod_{i=1}^n \Gamma\left(\lambda - \frac{i-1}{2}\right),$$

целых по комплексному параметру λ [2]. Через $\text{supp } \Phi$ обозначим носитель обобщенной функции Φ . Используя теорию обобщенных функций, из [1] можно извлечь следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. У оператора Кэли–Гординга $\mathcal{L}_0$ имеется ядро Рисса (в смысле работы [3]):

$$\begin{aligned} \Phi_0^{(0)}(x; \xi) &= \delta(x - \xi); & \mathcal{L}_0 \Phi_0^{(\lambda)}(x; \xi) &= \Phi_0^{(\lambda-1)}(x; \xi); \\ \text{supp } \Phi_0^{(\lambda)} &= \begin{cases} \{\xi\}, & \lambda = 0, -1, -2, \dots, \\ \overline{M_+^1(\xi)}, & \lambda = -1/2, -3/2, \dots, \\ \overline{M_+^{2\lambda}(\xi)}, & \lambda = 1/2, 2/2, \dots, (n-1)/2, \\ \overline{M_+(\xi)} & \text{в других случаях.} \end{cases} \end{aligned}$$

Очевидно, что оператор $\mathcal{L}_0$ представим в виде многочлена от ∂_{11} , ∂_{22} и ∂_{12} :

$$\mathcal{L}_0 = \left(\partial_{11} \circ \partial_{22} - \partial_{12}^2 \right) \circ \mathcal{A} + \partial_{11} \circ \mathcal{B}_{11} + \partial_{22} \circ \mathcal{B}_{22} + \partial_{12} \circ \mathcal{B}_{12} + \mathcal{C},$$

где $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}_{ij}$, $\mathcal{C}$ – некоторые дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, не зависящие от ∂_{11} , ∂_{22} , ∂_{12} и однозначно определенные оператором $\mathcal{L}_0$.

Введем обозначения

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{m_1} &:= \frac{1}{4}((\partial_{11} + \partial_{22})^2 \circ \mathcal{A} + 2(\partial_{11} + \partial_{22}) \circ (\mathcal{B}_{11} + \mathcal{B}_{22}) \\ &\quad + 2(\partial_{11} + \partial_{22})^2 \log P_{m_1}(x_{11} + x_{22}) \circ \mathcal{A}), \\ \mathcal{Q}_{m_2} &:= -\frac{1}{4}((\partial_{11} - \partial_{22})^2 \circ \mathcal{A} + 2(\partial_{11} - \partial_{22}) \circ (\mathcal{B}_{22} - \mathcal{B}_{11}) \\ &\quad + 2(\partial_{11} - \partial_{22})^2 \log P_{m_2}(x_{11} - x_{22}) \circ \mathcal{A}), \\ \mathcal{R}_{m_3} &:= -\partial_{12}^2 \circ \mathcal{A} + \partial_{12} \circ \mathcal{B}_{12} + \mathcal{C} - 2\partial_{12}^2 \log P_{m_3}(2x_{12}) \circ \mathcal{A}.\end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Оператор $\mathcal{L}_m$ представим в виде

$$\mathcal{L}_m = \mathcal{P}_{m_1} + \mathcal{Q}_{m_2} + \mathcal{R}_{m_3}.$$

Пусть $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ и $\text{ad}_{\mathcal{F}, \mathcal{H}} \mathcal{G} := \mathcal{F} \circ \mathcal{G} - \mathcal{G} \circ \mathcal{H}$ – оператор косого присоединенного действия [4].

Для $\gamma^{(i)} = (\gamma_1^{(i)}, \dots, \gamma_s^{(i)})$, $i = 1, 2, 3$, положим

$$G_{m_i}(y) := \begin{cases} P_{m_i}(y), & \gamma^{(i)} \neq 0, \\ y^{m_i}, & \gamma^{(i)} = 0; \end{cases} \quad M_i := \begin{cases} m_i(m_i + 1)/2, & \gamma^{(i)} \neq 0, \\ m_i, & \gamma^{(i)} = 0. \end{cases}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Операторы $\mathcal{P}_{m_1}$, $\mathcal{Q}_{m_2}$ и $\mathcal{R}_{m_3}$ являются калибровочно эквивалентными (в смысле работы [3]) операторам $\mathcal{P}_0$, $\mathcal{Q}_0$ и $\mathcal{R}_0$ соответственно, т.е.

$$\text{ad}_{\mathcal{P}_{m_1}, \mathcal{P}_0}^{M_1+1} G_{m_1}(x_{11} + x_{22}) = 0; \text{ad}_{\mathcal{Q}_{m_2}, \mathcal{Q}_0}^{M_2+1} G_{m_2}(x_{11} - x_{22}) = 0; \text{ad}_{\mathcal{R}_{m_3}, \mathcal{R}_0}^{M_3+1} G_{m_3}(2x_{12}) = 0.$$

В результате имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Фундаментальное решение оператора $\mathcal{L}_m^\lambda$, $\lambda = 1, 2, \dots$, имеет вид

$$\begin{aligned}\Phi_m^{(\lambda)}(x; \xi) &= \frac{1}{G_{m_1}(\xi_{11} + \xi_{22})G_{m_2}(\xi_{11} - \xi_{22})G_{m_3}(2\xi_{12})} \\ &\quad \times \sum_{i=0}^{M_1} \sum_{j=0}^{M_2} \sum_{k=0}^{M_3} (-1)^{i+j+k} \frac{(i+j+k)!}{i!j!k!} \binom{\lambda + i + j + k - 1}{i + j + k} \\ &\quad \times (\text{ad}_{\mathcal{P}_{m_1}, \mathcal{P}_0}^i G_{m_1}(x_{11} + x_{22}) \text{ad}_{\mathcal{Q}_{m_2}, \mathcal{Q}_0}^j G_{m_2}(x_{11} - x_{22}) \text{ad}_{\mathcal{R}_{m_3}, \mathcal{R}_0}^k G_{m_3}(2x_{12})) \\ &\quad \times \Phi_0^{(\lambda+i+j+k)}(x; \xi).\end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ. Для оператора $\mathcal{L}_m^\lambda$, $\lambda = 1, 2, \dots$, выполняется усиленный принцип Гюйгенса, если $n - 1 \geq 2(\lambda + M_1 + M_2 + M_3)$.

Первые примеры новых операторов, удовлетворяющих усиленному принципу Гюйгенса, получаются в случае $n = 5$ ($m_1 = m_2 = 0$, $m_3 = 1$, $\gamma^{(3)} = 0$ или $m_1 = m_3 = 0$, $m_2 = 1$, $\gamma^{(2)} = 0$):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{(0,0,1)} &= \det((\partial_{ij})_{i,j=1,\dots,5}) + \frac{1}{2x_{12}^2} \det((\partial_{ij})_{i,j=3,4,5}); \\ \mathcal{L}_{(0,1,0)} &= \det((\partial_{ij})_{i,j=1,\dots,5}) + \frac{2}{(x_{11} - x_{22})^2} \det((\partial_{ij})_{i,j=3,4,5}).\end{aligned}$$

Автор благодарен проф. Ю. Ю. Бересту и проф. А. П. Веселову за поддержку и критические замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Garding L. // Ann. of Math. 1947. V. 48. № 4. P. 785–826. [2] Вайнберг Б. Р., Гиндикин С. Г. // Труды ММО. 1967. Т. 16. С. 151–180. [3] Berest Y. // Acta Appl. Math. 1998. V. 53. P. 125–185. [4] Берест Ю. Ю., Веселов А. П. // УМН. 1994. Т. 49. № 6. С. 8–78. [5] Berest Y., Molchanov Y. // J. Math. Phys. 1995. V. 36. № 8. P. 4324–4339.