Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Черный, Качественное поведение решений стохастических дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами, *УМН*, 2000, том 55, выпуск 3, 193–194

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm308>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 17:21:05

КАЧЕСТВЕННОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А. С. ЧЕРНЫЙ

В настоящей статье рассматриваются одномерные однородные стохастические дифференциальные уравнения вида

$$(1) \quad dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) dW_t, \quad X_0 = x.$$

Коэффициенты b и σ являются измеримыми функциями; никаких условий типа ограниченности или отделенности от нуля не предполагается. Единственное условие, налагаемое с самого начала, состоит в том, что $\forall x \in \mathbb{R}, \sigma(x) \neq 0$. Решение уравнения (1) будет пониматься в слабом смысле.

В статье [1] доказано, что если функция $(1 + |b|)/\sigma^2$ локально интегрируема на $\mathbb{R}$, то для любого x существует единственное решение уравнения (1). Цель настоящей статьи состоит в исследовании поведения решения вблизи тех точек, где функция $(1 + |b|)/\sigma^2$ не локально интегрируема.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. (а) Точка d называется *особой* для уравнения (1), если функция $(1 + |b|)/\sigma^2$ не локально интегрируема в этой точке.

(б) Точка d называется *изолированной особой точкой* для уравнения (1), если d – особая точка и существует проколота окрестность d , состоящая из неособых точек.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. (а) Пусть T – момент остановки на $(\mathcal{F}_t)$, где $(\mathcal{F}_t)$ обозначает каноническую фильтрацию на пространстве $C(\mathbb{R}_+)$. *Решением уравнения (1) до момента T* называется мера $\mathbb{P}$ на $\mathcal{F}_T$ такая, что

i) $\mathbb{P}\{X_0 = x\} = 1$ (здесь X – координатный процесс на $C(\mathbb{R}_+)$);

ii) $\int_0^T (1 + |b(X_s)| + \sigma^2(X_s)) ds < \infty$ $\mathbb{P}$ -п.н.;

iii) процесс $M_t = X_t - \int_0^{t \wedge T} b(X_s) ds$ является $(\mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ -локальным мартингалом с квадратической ковариацией $\langle M \rangle_t = \int_0^{t \wedge T} \sigma^2(X_s) ds$.

(б) Пусть T – предсказуемый момент с предвещающей последовательностью $(T_n)_{n=1}^\infty$ (по поводу терминологии см. [2; гл. I]). *Решением (1) до T* называется мера $\mathbb{P}$ на $\mathcal{F}_{T-}$ такая, что $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}|_{\mathcal{F}_{T_n}}$ – решение (1) до T_n .

Пусть I – некоторый интервал и $(P_x)_{x \in I}$ – непрерывный строго марковский процесс. Поведение этого процесса в правой полукрестности выделенной точки $d \in I$ может быть охарактеризовано следующими параметрами:

$$e_1 = \lim_{b \downarrow d} \mathbb{P}_d\{T_b < \theta\}, \quad e_2 = \lim_{c \downarrow d} \lim_{b \downarrow d} \mathbb{P}_b\{T_c < \theta\}, \quad e_3 = \lim_{b \downarrow d} \mathbb{P}_b\{T_d < \theta\},$$

где $\theta > 0$ – некоторая константа. В [3; §3.3] доказано, что значения параметров e_1, e_2, e_3 не зависят от выбора θ . К примеру, значение $e_3 = 0$ показывает, что процесс не может достичь точку d справа.

Предположим, что ноль – изолированная особая точка уравнения (1). Будем исследовать поведение решения в правой полукрестности нуля. Установлено, что существует 8 различных типов поведения. Сформулируем для примера теорему, относящуюся к тому случаю, когда ноль имеет *правый тип 7*. Теоремы, относящиеся к остальным 7 случаям, схематично представлены на диаграмме. Мы используем следующие обозначения: $T_{0,a} = T_0 \wedge T_a, \rho(x) = \exp\left\{-\int^x \frac{2b}{\sigma^2}\right\}$,

$s(x) = \int^x \rho$ (в случае, когда $\int_0^a \rho < \infty$, выбираем s так, что $s(0) = 0$). Здесь a – такое положительное число, что функция $(1 + |b|)/\sigma^2$ локально интегрируема на $(0, a]$ (т.е. локально интегрируема в каждой точке этого полуинтервала).

ТЕОРЕМА. Предположим, что

$$\int_0^a \rho(x) dx = \infty, \quad \int_0^a \frac{1 + |b(x)|}{\rho(x) \sigma^2(x)} |s| dx = \infty, \quad \int_0^a \frac{|s(x)|}{\rho(x) \sigma^2(x)} dx < \infty.$$

Для любого x из интервала $I = (0, a]$ существует единственное решение уравнения (1), определенное до момента $T = T_a$. Зададим $\tilde{P}_x$ как образ P_x при отображении $(X_t)_{t \geq 0} \mapsto (X_{t \wedge T})_{t \geq 0}$ (т.е. $\tilde{P}_x$ – мера на σ -алгебре $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty$). Тогда $(\tilde{P}_x)_{x \in I}$ является регулярным непрерывным строго марковским процессом. Определим $\tilde{P}_0$ как меру, сосредоточенную на $X \equiv 0$. Тогда $(\tilde{P}_x)_{x \in [0, a]}$ – непрерывный строго марковский процесс, для которого локальные характеристики в нуле имеют следующие значения: $e_1 = 0$, $e_2 = 1$, $e_3 = 0$.

Тип	0	1	2	3	4	5	6	7
I	$[0, a]$	$[0, a]$	$[0, a]$	$[0, a]$	$(0, a)$	$(0, a)$	$(0, a)$	$(0, a]$
T	$T_{0,a}$	$T_{0,a}$	T_a	T_a	$T_a -$	T_a	$T_{0,a} -$	T_a
e_1	0	0	1	1	0	0	0	0
e_2	0	0	1	1	0	0	0	1
e_3	1	1	1	0	0	0	0	0

Автор благодарит профессора А. Н. Ширяева за полезные обсуждения и ценные рекомендации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] 1991. V. 151. P. 149–197. [2] Жакоб Ж., Ширяев А. Н. Пределные теоремы для случайных процессов. М.: Физматлит, 1994. [3] Ито К., Маккин Г. Диффузионные процессы и их траектории. М.: Мир, 1968.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
03.04.2000