Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Зорич, Квазиконформные вложения римановых многообразий и теорема пикаровского типа, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 1, 215–216

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm31>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 16:55:36

КВАЗИКОНФОРМНЫЕ ВЛОЖЕНИЯ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ И ТЕОРЕМА ПИКАРОВСКОГО ТИПА

В. А. Зорич

Цель этой работы – теорема о продолжении ростка локально обратного отображения, которая могла бы служить инструментом исследования особенностей квазиконформных вложений римановых многообразий размерности $n \geq 3$.

Мы рассматриваем многообразия одной и той же размерности и, говоря о вложении, имеем в виду локально инъективное (локально обратимое) отображение. Квазиконформность вложения подразумевает ограниченность его коэффициента квазиконформности (по крайней мере в областях, где отображение инъективно).

ТЕОРЕМА 1 (основная теорема – альтернатива). Пусть M^n и N^n – римановы многообразия конечной размерности n ; $\dot{U} = U \setminus \{o\}$ – проколота окрестность точки $o \in M^n$; $f: \dot{U} \rightarrow N^n$ – квазиконформное вложение. Если $n \geq 3$, то справедлива следующая альтернатива:

- (а) либо отображение f инъективно в некоторой проколоте окрестности точки o ;
- (б) либо любой росток f_r^{-1} локально обратного отображения продолжается вдоль любого пути на N^n с началом в точке r , не задевающего образ $f(\partial U)$ края окрестности U .

Следствием приведенной альтернативы, например, является теорема о глобальном гомеоморфизме (утверждающая, что при $n \geq 3$ всякое квазиконформное вложение $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ глобально обратимо) (см. [1], [2]), а также геометрическая версия этой теоремы, предложенная М. Громовым (см. [3], [4]).

В качестве попутного продукта получается также следующая

ТЕОРЕМА 2 (пикаровского типа для квазиконформных вложений). Квазиконформное вложение одного риманова многообразия в другое риманово многообразие той же размерности $n \geq 3$

- (а) либо инъективно в некоторой проколоте окрестности изолированной особой точки;
- (б) либо образ любой такой окрестности покрывает все многообразие образа.

Отображение $z \mapsto \exp \frac{1}{z}$ показывает, что условие $n \geq 3$ здесь существенно.

Вместе с тем, обе возможности этой альтернативы реализуемы в любой размерности $n \geq 2$. Примером реализации может служить отображение Хопфа $f: \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \setminus \{o\} \rightarrow S^{n-1} \times S^1$, определяемое соответствием $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto \{2^k x \mid k \in \mathbb{Z}\} \in \mathbb{R}^n / G$, где G – группа гомотетий $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, порожденная отображением $x \mapsto 2x$.

Доказательство основной теоремы опирается на ряд лемм. Ключевым является следующее вспомогательное утверждение о связи конформной емкости и геометрии видимой части границы звездной области.

ЛЕММА 1 (о звезде). Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) – область, звездная относительно точки $o \in \mathbb{R}^n$, т.е. D образована бесконечными лучами или их конечными интервалами, исходящими из точки o и заканчивающимися (если интервал конечен) в точках (видимой из o) части Δ границы ∂D области D . Пусть Γ – семейство всех кривых в D , соединяющих ε -окрестность $B(o, \varepsilon)$ точки o с Δ .

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-01218).

Если конформный модуль семейства Γ равен нулю, то

- центральная проекция Δ на сферу $\partial B(o, \varepsilon)$ не содержит отличных от точки связанных компонент и
- ∂D локально не разбивает пространство, если $n > 2$.

Напомним, что конформный модуль произвольного семейства Γ кривых в $\mathbb{R}^n$ определяется равенством

$$\text{mod } \Gamma := \inf \int_{\mathbb{R}^n} \rho^n dv,$$

где нижняя грань берется по всем неотрицательным измеримым по Борелю функциям $\rho: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ таким, что $\int_{\gamma} \rho \geq 1$ для каждой кривой $\gamma \in \Gamma$.

В доказательстве теоремы 1, наряду с условием $n \geq 3$, существенно только то, что выходящее на особенность o семейство кривых имело равный нулю конформный модуль и что образ этого семейства при вложении f тоже имел конформный модуль, равный нулю.

Эти обстоятельства, с одной стороны, допускают расширение самого класса вложений f , например, можно считать f квазиконформным в среднем, а с другой стороны, позволяют сформулировать основную теорему в следующем более общем виде.

ТЕОРЕМА 3 (о квазиконформном вложении многообразий конформно параболического типа). Пусть U^n — n -мерное риманово многообразие с компактным (возможно пустым) краем ∂U^n . Пусть U^n имеет конформно параболический тип и пусть $f: U^n \rightarrow N^n$ — квазиконформное вложение U^n в n -мерное риманово многообразие N^n .

Если $n \geq 3$, то любой росток f^{-1} локально обратного отображения продолжается вдоль любого пути на N^n с началом в точке p , не задевающего образ $f(\partial U^n)$ края и, быть может, еще некоторое (возможно, пустое) множество S особенностей конформной емкости (и метрической размерности) нуль.

О конформном типе (в частности, о конформно параболическом типе) риманова многообразия см. статью [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Зорич В. А. // Матем. сб. 1967. Т. 74. С. 417–433. [2] Zorich V. A. // Lect. Notes in Math. 1992. V. 1508. P. 131–148. [3] Gromov M. // Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference. Ann. of Math. Stud. V. 97, 1981. P. 183–213. [4] Gromov M. // Structures métriques pour les variétés riemanniennes. Notes du cours rédigé par J. Lafontaine et P. Pansu. Paris: CEDIC/Fernand Nathan et Soc. Math. de France, 1981. [5] Зорич В. А., Кесельман В. М. // Функцион. анализ и прилож. 1996. Т. 30. №2. С. 40–55.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: vzor@glasnet.ru

Принято редколлегией
24.12.1997