Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И, Я. Г. Синай, Новые результаты в математической и статистической гидродинамике, *УМН*, 2000, том 55, выпуск 4, 25–58

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm313>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 05:47:34

УДК 517.95+519.21

НОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ И СТАТИСТИЧЕСКОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

В. И. Я. Г. Синай

Эта статья является обзором новых результатов авторов и их сотрудников по теории стохастических дифференциальных уравнениях с частными производными в гидродинамике. Мы рассматриваем стохастическое уравнение Бюргерса, стохастическое уравнение Навье–Стокса и стохастическое уравнение для пассивного скаляра. В отличие от предыдущих работ на эту тему (см., например, книгу [25], которая сосредоточена главным образом на вопросах существования стохастической динамики), источники, включенные в настоящий обзор, подчеркивают качественные свойства решений, в том числе существование и единственность инвариантной меры при некоторых предположениях физического характера, асимптотическое поведение их статистических характеристик, и т. д. Мы обсуждаем также некоторые новые работы о детерминированном уравнении Навье–Стокса.

Библиография: 70 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

Часть I. Система Бюргерса	26
1. Определение и общие свойства системы Бюргерса	26
2. Уравнение Бюргерса без вязкости и его модификации со случайными начальными условиями	27
3. Динамика со слипанием и обобщение уравнения Бюргерса	31
4. $1\mathcal{D}$ -уравнение Бюргерса со случайной силой	33
5. Некоторые асимптотики для стационарного распределения	37
6. Асимптотическое поведение функций плотности распределения вероятностей u_x	37
7. Заключительные замечания	39
Часть II. Системы Навье–Стокса с периодическими граничными условиями	40
8. Общие замечания, касающиеся системы Навье–Стокса	40
9. Теорема существования глобальных решений системы Навье–Стокса	41
10. Двумерная система Навье–Стокса с периодическими граничными условиями и случайной силой	46
Часть III. Стохастическое уравнение переноса пассивного скаляра	47
11. Модель Крайчана	49
12. Принцип “одна сила – одно решение”	51
Список литературы	56

Часть I. Система Бюргерса

1. Определение и общие свойства системы Бюргерса

Система Бюргерса является упрощением системы Навье–Стокса. В d -мерном случае она записывается для d неизвестных функций $u(x, t) = \{u_j(x, t), 1 \leq j \leq d\}$, зависящих от d пространственных переменных $x = \{x_j, 1 \leq j \leq d\}$ и времени, следующим образом:

$$(1) \quad \frac{\partial u_j}{\partial t} + \sum_{\ell=1}^d u_\ell \frac{\partial u_j}{\partial x_\ell} = \nu \sum_{\ell=1}^d \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_\ell^2} + f_j(x, t).$$

Эта система отличается от системы Навье–Стокса отсутствием давления и условия несжимаемости. По этой причине семейство задач для системы Бюргерса иногда называется гидродинамикой без давления. Коэффициент ν – это вязкость, и случай $\nu = 0$ называется системой Бюргерса без вязкости. Ее иногда называют системой Хопфа, а при $d = 1$ – также уравнением Римана. В последнем случае мы получаем простейшее квазилинейное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, t).$$

В общем случае вектор $f = \{f_j, 1 \leq j \leq d\}$ в (1) – это внешняя сила. Я. Б. Зельдович [70] предложил рассматривать свободную ($f = 0$) систему без вязкости как уравнение, описывающее эволюцию разреженного газа невзаимодействующих частиц. По его мысли, чистая кинематика соответствующих частиц может приводить к особенностям в распределении масс и отвечает за неравномерность вещества во вселенной.

Система (1) прощеполной системы Навье–Стокса на пространстве градиентоподобных решений. А именно, если $u(x, 0) = -2\nu \frac{\nabla \varphi(x, 0)}{\varphi(x, 0)}$ для некоторой положительной функции $\varphi(x, 0)$ и если $f_j = \frac{\partial F(x, t)}{\partial x_j}$, то векторное равенство $u(x, t) = -2\nu \frac{\nabla \varphi(x, t)}{\varphi(x, t)}$ выполняется для всех $t > 0$, где функция $\varphi(x, t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$(2) \quad \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} = \nu \Delta \varphi(x, t) - \frac{1}{2\nu} F(x, t) \varphi.$$

Переход от уравнения для u к уравнению для φ называется подстановкой Хопфа–Коула (см. [11], [31]). Однако можно полагать, что этот переход был известен гораздо раньше [68].

Случай $\nu > 0$ во многих отношениях проще, чем случай $\nu = 0$, который, строго говоря, является пределом при $\nu \rightarrow 0$. Обсуждая теорию при $\nu = 0$, мы, как правило, ограничиваемся лишь упоминанием соответствующих результатов для $\nu > 0$. Однако, как обычно, вопросы непрерывности при $\nu = 0$ трудны.

Мы в основном будем обсуждать две группы вопросов, касающихся системы Бюргерса.

- А. Система (1) без вязкости со случайными начальными условиями. Сам Бюргерс в своей монографии [8] рассматривал случай $d = 1$, $f = 0$ и начальное

условие $u(x, 0) = B(x)$, где B – белый шум, т.е. обобщенный случайный процесс. Он показал, что решение $u(x, t)$ является кусочно линейной функцией от x при $t > 0$. Разрывы решений квазилинейного уравнения называются *ударными волнами*. Можно сказать, что нерегулярности в начальных условиях вызывают нерегулярности решений, т.е. ударные волны. Мы обсудим работу Авелланеда и И об асимптотике статистик для ударных волн (см. [1], [3], [4]). Фриш первым понял, что интересная ситуация возникает при замене $B(x)$ однородным случайным процессом с независимыми приращениями, подобным броуновскому движению или устойчивому процессу Леви. В его совместной статье с Ше и Ореллом (см. [56]) были численно построены решения и обнаружено появление бесконечного числа ударных волн при любом $t > 0$. В этом случае возникает интересный пример того, как динамика преобразует непрерывное распределение массы в дискретное. Математическая теория, относящаяся к случаю, рассмотренному в [56], была построена в [58]. Мы обсудим далее некоторые связанные с этим задачи.

В. Статистически однородные режимы в уравнении Бюргерса со случайной силой. Мы обсудим главным образом результаты И, Ханина, Мазеля и Синая (см. [18], [19]), полученные при $d = 1$, и некоторые связанные с этим задачи. Мы также обсудим метод кинетического уравнения, примененный И и Ванден Эйнденом (см. [14], [15]) при изучении статистических свойств системы Бюргерса.

2. Уравнение Бюргерса без вязкости и его модификации со случайными начальными условиями

В одномерном случае задача является совершенно классической. Есть уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} = 0,$$

и мы хотим построить решения при нерегулярных начальных условиях, которые являются типичными реализациями некоторого случайного процесса. Обычный метод характеристик не работает из-за нерегулярностей, поскольку характеристики пересекаются при сколь угодно малых $t > 0$. Мы должны использовать так называемый вариационный принцип Лакса–Олейник (см. [42], [52], [65], [68]). В соответствии с этим принципом, возьмем функцию

$$W(x, t) = \int_0^x \left[u(y, 0) + \frac{y}{t} \right] dy = \int_0^x u(y, 0) dy + \frac{x^2}{2t}.$$

Если $u(y, 0)$ – такая реализация случайного процесса, что $|u(y, 0)|$ растет медленнее, чем $|y|$, то W – параболоподобная функция, возмущенная случайным процессом. Следующий шаг состоит в рассмотрении выпуклой *миноранты* C функции W , т.е. наибольшей выпуклой функции, ограниченной сверху функцией W . График $C(x, t)$ состоит из отрезков прямых и некоторого замкнутого множества вне их. Производная

$$F(x, t) = \frac{\partial C(x, t)}{\partial x}$$

постоянна всюду, где $C(x, t)$ линейна. По этой причине функция F является канторовой лестницей. Решение имеет вид

$$(3) \quad u(x, t) = \frac{x}{t} - \frac{F^{-1}(x/t, t)}{t},$$

где $F^{-1}(x, t)$ – обратная функция. Простейший способ понять соотношение (3) состоит в том, чтобы рассматривать F как непрерывную кривую на плоскости и F^{-1} как непрерывную кривую, получаемую при перестановке осей координат.

Решение $u(x, t)$ также может рассматриваться как непрерывная кривая на плоскости с вертикальными отрезками, соответствующими ударным волнам.

С математической точки зрения, основная задача может быть сформулирована как анализ выпуклых минорант случайных процессов. Приведем пример простого общего утверждения, которое может быть доказано в такой постановке. Предположим для простоты, что $t = 1$, и рассмотрим случайный процесс

$$W(x) = W(x, 1) = \int_0^x [u(y, 0) + y] dy = \int_0^x u(y, 0) dy + \frac{x^2}{2}.$$

Пусть $u(\cdot, 0)$ непрерывна с вероятностью 1. Тогда W дифференцируема почти всюду, и $W'(x) = u(x, 0) + x$. Назовем точку $\bar{x}$ специальной (для $W(x)$ или $u(\cdot, 0)$), если существует такая окрестность $(\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$, что одно из соотношений

$$(4') \quad W(x) \geq W(\bar{x}) + (x - \bar{x})(u(\bar{x}, 0) + \bar{x})$$

или

$$(4'') \quad W(x) \leq W(\bar{x}) + (x - \bar{x})(u(\bar{x}, 0) + \bar{x})$$

выполняется для всех $x \in (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$, т.е. график W лежит либо над, либо под касательной к нему, проходящей через $\bar{x}$.

Событие, описываемое последними неравенствами, зависит от поведения процесса $u(x, 0)$ в сколь угодно малой окрестности $\bar{x}$, т.е. принадлежит локальной σ -алгебре процесса u . Во многих случаях (для броуновского движения, дробного броуновского движения, устойчивых процессов Леви, диффузионных процессов) известно, что эта σ -алгебра тривиальна, т.е. содержит лишь события с вероятностями 0 или 1. Отсюда можно вывести, что наше событие (4') или (4'') имеет нулевую вероятность. Это можно сделать во всех указанных выше случаях.

Вернемся к графику F . Напомним следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Канторова лестница называется *полной*, если объединение интервалов ее постоянства есть множество полной меры.

Предположим, что для любой точки $\bar{x}$ вероятность того, что она специальна, равна нулю. Применяя теорему Фубини, легко убедиться, что график F есть полная канторова лестница с вероятностью 1, т.е. множество специальных точек имеет меру нуль для почти всех u . Фриш поставил задачу оценки хаусдорфовой размерности этого множества (см. [56]). В случае броуновского движения ответ был получен в [58], где было показано, что он равен $\frac{1}{2}$. Доказательство основано на оценке

$$P \left\{ \int_0^t b(s) ds > -a_0 + a_1 t \text{ для всех } 0 \leq t \leq T \right\} \sim \frac{C(a_0, a_1)}{T^{1/4}}$$

при $T \rightarrow \infty$. Вывод этого неравенства приведен в ряде публикаций, см., например, [33], [59]. Ханда [30] получил простое доказательство оценки снизу хаусдорфовой размерности, которая верна в более общей ситуации.

Случай устойчивого процесса Леви был изучен Яницким и Войцинским (см. [34]) численно и качественно. Полный ответ был недавно получен Ж. Бертунаном (см. [7]).

Рассмотрим теперь случай, когда начальные данные – это белый шум. Именно этой задачей интересовался сам Бюргерс, и ей посвящена большая часть его книги [8]. В этой книге Бюргерс вычислил много интересных статистических характеристик для этой задачи. Его решения часто выражены в форме рядов. По этой причине трудно выделить явную информацию об асимптотиках таких статистических величин, как распределение мощности ударных волн. Однако Фрашбур и Мартин [23] недавно привели более простые формулы для многих статистических характеристик, и из этих формул можно легко извлечь асимптотику. Их работа дает чрезвычайно ценные точные результаты в этой классической задаче.

Самый первый вопрос, который может быть задан в этой задаче, – это динамические пространственно-временные масштабные соотношения. Точнее, так как распределение белого шума инвариантно относительно масштабных преобразований $\delta^{1/2}u_0(\delta x) \stackrel{D}{=} u_0(x)$, то можно рассматривать преобразования замены масштаба

$$\delta x = x', \quad \delta^{1/2}u = u', \quad \delta^\gamma t = t'$$

и спросить: для какого значения γ уравнение в масштабированных переменных (x', t', u') имеет нетривиальную динамику при $\delta \rightarrow 0$? Это сводится к вопросу о том, каким членом управляется динамика: конвективным или диффузионным. Для обобщенного уравнения Бюргерса

$$u_t + \left(\frac{1}{p}|u|^p\right)_x = u_{xx}$$

ответ дает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1.

$$\gamma = \begin{cases} 1 + \frac{1}{2}(p-1) & \text{при } p \leq 3, \\ 2 & \text{при } p \geq 3, \end{cases}$$

и эффективные уравнения в масштабированных переменных имеют следующий вид (без штрихов):

$$\begin{aligned} u_t + \left(\frac{1}{p}|u|^p\right)_x &= 0 & \text{для } p < 3, \\ u_t + \left(\frac{1}{p}|u|^p\right)_x &= u_{xx} & \text{для } p = 3, \\ u_t &= u_{xx} & \text{для } p > 3. \end{aligned}$$

Этот результат показывает, что поведение задачи диффузионно при больших масштабах для $p > 3$ и конвективно при больших масштабах для $p < 3$. Аналогичные вопросы могут быть заданы и для начальных данных с другими статистиками, см. [29], [68]. С помощью вариационной характеристики решений вопрос часто сводится

к изучению статистики экстремальных значений начальных данных. Именно эти вопросы изучаются в книге [40], и результат зависит от поведения хвоста распределения одноточечной статистики.

Вернемся к уравнению Бюргерса (без вязкости) с белым шумом в качестве начальных данных. Решение инвариантно в том смысле, что

$$u(x, t) \stackrel{D}{=} t^{-2/3} \bar{u}\left(\frac{x}{t^{2/3}}\right),$$

где $\bar{u}(x) = u(x, 1)$. Можно показать, что $\bar{u}$ состоит из прямых (склонов) с единичным наклоном, разделенных ударными волнами. Изучение $\bar{u}$ сводится к изучению выпуклой оболочки функции $F(y) = y^2/2 + B(y)$, где $B(y)$ – двусторонний винеровский процесс.

Следующий обсуждаемый нами вопрос – статистика мощности ударных волн. Вот результат, полученный Авелланеда и ИИ [3].

ТЕОРЕМА 2. *Существуют такие постоянные C_1 и C_2 , что*

$$C_1 \sqrt{s} \leq \mathbf{P}\{S < s\} \leq C_2 \sqrt{s}$$

для $s \ll 1$.

Здесь $\mathbf{P}$ – условная вероятность при условии, что в x_0 есть ударная волна, и S – его мощность. Так как процесс пространственно однороден, то $\mathbf{P}$ не зависит от x_0 .

Этот результат был доказан с помощью метода Питмана и Гроенбума для изучения выпуклых огибающих винеровского процесса с использованием техники условных диффузионных процессов и диффузионных процессов с обращенным временем, см. [28], [53]. Более точный результат получен в недавней работе Фрашбура и Мартина [23].

Рассмотрим наконец статистику больших ударных волн. Оказывается, главный член асимптотики распределения больших ударных волн определяется хвостовым поведением распределения интеграла начальных данных, который в нашем случае является двусторонним винеровским процессом. Следующее рассуждение объясняет суть дела. Чтобы получить ударную волну амплитуды λ в точке $x = 0$, нужно, чтобы соотношение $F(y) = y^2/2 + B(y) \leq 0$ выполнялось при $0 \leq y \leq \lambda$. Вероятность этого события меньше величины

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\lambda^2}{2} + B(\lambda) \leq 0\right\} \leq e^{-\frac{1}{2\lambda}\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)^2} = e^{-\frac{\lambda^3}{8}}.$$

Оказывается, что это соотношение с точностью до некоторых алгебраических множителей также дает некоторую нижнюю границу. Это было впервые понято в [2]–[4].

ТЕОРЕМА 3. *Существуют такие постоянные C_1 и C_2 , что*

$$C_1 \leq s^{-3} \ln \mathbf{P}\{S > s\} \leq C_2$$

при $s \rightarrow \infty$.

В этой форме результат был независимо получен Молчаном и Рианом [51], [55], которые доказали также различные обобщения этого утверждения. Получение точных границ сводится к оценке некоторых вероятностей больших уклонений, связанных с винеровским процессом; см. [51], [55]. Это рассуждение может быть обобщено на случай начальных данных с более общими статистиками. Например, для рассматривавшихся выше начальных данных в виде броуновского движения, главный член асимптотики для распределения больших ударных волн имеет вид

$$P\left\{\min_{y>\lambda} F(y) < 0\right\} \propto e^{-\frac{1}{8}\lambda}$$

при $\lambda \gg 1$. Насколько известно авторам, этот факт еще не доказан строго.

Другой недавно изученный интересный вопрос – это флуктуация положения ударной волны под действием возмущения в виде белого шума [20], [67]. Вер и Ксин [67] доказали для уравнения Бюргерса, что статистика флуктуации гауссова.

3. Динамика со слипанием и обобщение уравнения Бюргерса

Уравнение Бюргерса связано с динамикой так называемых липких частиц. Предположим, что при $t = 0$ имеется набор частиц (x_i, v_i, m_i) , $i = 1, \dots, I$. Каждая частица движется со своей скоростью, пока не столкнется с другой частицей. При столкновении рождается новая частица, масса и импульс которой равны суммам масс и импульсов сталкивающихся частиц. В течение всего процесса полная масса и полный импульс сохраняются. В одномерном случае этот процесс можно описать системой двух законов сохранения

$$(5) \quad \begin{aligned} \rho_t + (\rho u)_x &= 0, \\ (\rho u)_t + (\rho u^2)_x &= 0. \end{aligned}$$

Мы будем рассматривать также более общий случай частиц, взаимодействующих по закону тяготения. В одномерном случае сила тяготения, действующая на частицу, пропорциональна разности масс справа и слева от частицы. Это можно формально описать системой уравнений

$$(6) \quad \begin{aligned} \rho_t + (\rho u)_x &= 0, \\ (\rho u)_t + (\rho u^2)_x &= -\rho \mathcal{R}_x, \\ \mathcal{R}_{xx} &= \rho. \end{aligned}$$

Однако форма систем (5) и (6) является недостаточно общей, поскольку нужно рассматривать произвольные распределения масс, вообще говоря, не имеющие плотностей. Общее решение систем (5) или (6) должно быть семейством конечных мер P_t , описывающих распределение массы. Распределение импульса дается зарядом (мерой, не обязательно положительной) I_t , абсолютно непрерывным относительно P_t , причем производная Радона–Никодима $\frac{dI_t(x)}{dP_t(x)} = u(x, t)$ равна скорости в точке x, t .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 (см. [17]). Семейство $\{P_t, I_t, t > 0\}$ называется *слабым решением* системы (5), если

- (i) оно непрерывно по t в слабой топологии;

- (ii) для любых $f, g \in C_0^1(\mathbb{R}^1)$ ($C_0^1(\mathbb{R}^1)$ – пространство C^1 -функций с компактными носителями) и $t_2 > t_1$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \int f(x) dP_{t_2}(x) - \int f(x) dP_{t_1}(x) &= \int_{t_1}^{t_2} d\tau \int f'(y) dI_\tau(y), \\ \int g(x) dI_{t_2}(x) - \int g(x) dI_{t_1}(x) &= \int_{t_1}^{t_2} d\tau \int g'(y) u(y, \tau) dI_\tau(y). \end{aligned}$$

В случае (6) определение аналогично, если заметить, что третье уравнение можно заменить соотношением

$$\mathcal{R}_x(x, t) = P_t(x, \infty) - P_t(-\infty, x).$$

Тогда вместо второго равенства в п. (ii) получаем

$$\begin{aligned} \int g(y) dI_{t_2}(y) - \int g(y) dI_{t_1}(y) \\ = \int_{t_1}^{t_2} d\tau \int g'(y) u(y, \tau) dI_\tau(y) + \int_{t_1}^{t_2} d\tau \int \mathcal{R}_y(y, \tau) dP_\tau(y). \end{aligned}$$

Замечательное свойство уравнений (5) и (6) состоит в их интегрируемости (в некотором смысле). Оно было обнаружено Мартином и Пяезки (см. [47]). В [17] мы переоткрыли это свойство, не зная о работе [47].

Идея состоит в следующем. Так как мы имеем динамику со слипанием, то для любого $t > 0$ множество слипающихся частиц образует отрезок на $\mathbb{R}^1$. Обозначим разбиение $\mathbb{R}^1$ на эти отрезки (которые могут быть и точками) через ξ_t .

Ключевое наблюдение состоит в том, что положения всех частиц $x \in C_{\xi_t}$ в момент времени t , где C_{ξ_t} – элемент разбиения ξ_t , совпадают с положением $x(t)$ центра масс элемента C_{ξ_t} , который в случае (5) движется равномерно с такой скоростью $\bar{v}$, что

$$X(t) = X(0) + I(C_{\xi_t})t, \quad \text{где} \quad I(C_{\xi_t}) = \int_{C_{\xi_t}} u(x, 0) dP_0.$$

В случае частиц под действием силы тяготения правило имеет тот же вид, за исключением того, что траектория центра масс является квадратичной функцией от t , описывающей движение с постоянным ускорением.

В рамках этой картины мы можем ввести лагранжево отображение $\mathcal{L}_t$, переводящее x в положение центра масс элемента $C_{\xi_t}(x)$, содержащего x в момент времени t . Обобщенный вариационный принцип для систем (5) и (6), доказанный в [47] и [17], утверждает, что $\mathcal{L}_t(x)$ – это траектория x .

Разбиение ξ_t можно построить явно по начальным условиям, и в этом смысле системы (5) и (6) интегрируемы. Мы объясним этот факт для системы (5), а рассуждения в случае (6) совершенно такие же. Оказывается, можно охарактеризовать точки x , являющиеся левыми концами элементов разбиения ξ_t . А именно, x является левым концом, если для любых y_1, y_2 , $y_1 < x < y_2$, выполняется соотношение $\bar{y}_1 + t I_t((y_1, x)) < \bar{y}_2 + t I_t([x, y_2])$, где $\bar{y}_1$ и $\bar{y}_2$ – центры масс множеств (y_1, x) и $[x, y_2]$ соответственно.

В [47] Мартин и Пязеcki рассмотрели множество из n притягивающихся точек с координатами ka/n , $k = 1, \dots, n$, массами $1/n$ и случайными начальными скоростями v_i , имеющими симметричное гауссово распределение. Они показали, что существует такой неслучайный момент времени τ^* , что все массы до этого момента макроскопически малы с вероятностью, стремящейся к 1 при $n \rightarrow \infty$, в то время как после τ^* происходит почти коллапс в том смысле, что появляется частица, масса которой стремится к 1 при $n \rightarrow \infty$. Суидан (Принстон) недавно доказал аналогичное утверждение для гораздо более широкого класса распределений скоростей.

4. 1D-уравнение Бюргерса со случайной силой

Рассмотрим уравнение

$$(7) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sum_k f'_k(x) B_k(t),$$

где последняя сумма конечна, $B_k(t)$ – независимые стандартные белые шумы, а $f_k \in C^2$ – детерминированные линейно-независимые функции. Мы рассматриваем (7) с периодическим граничным условием на интервале $[0, 1)$, которое требует периодичности f_k с периодом 1. Распространение изложенной ниже теории на всю прямую выглядит очень трудной задачей. Используя подстановку Хопфа–Коула, мы можем свести эту задачу к задаче о статистиках упорядоченных полимеров, трудность которой известна.

На самом деле уравнение (7) есть стохастическое дифференциальное уравнение в функциональном пространстве.

Основной проблемой является существование и единственность стационарной меры для возникающего марковского процесса. Случай $\nu > 0$ рассматривался в [60], где доказаны существование и единственность стационарной меры. Доказательство использует некоторые методы статистической механики.

Гораздо более трудным является случай $\nu = 0$, который должен рассматриваться как предельный при $\nu \rightarrow +0$. Первые численные результаты были получены в [9]. Мы формально снова получаем уравнение

$$(8) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} = \sum_k f'_k(x) B_k(t).$$

Ограничимся случаем $\int_0^1 u(x, t) dx = 0$. Общий случай может быть изучен аналогично (см. [19]).

В уравнении (8) есть скрытая диссипация. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим

уравнение (7) при $\nu > 0$ и, используя формулу Ито, напомним:

$$\begin{aligned}
d \int_0^1 \frac{u^2(x, t)}{2} dx &= \int_0^1 \frac{u^2(x, t + dt) - u^2(x, t)}{2} dx \\
&= \int_0^1 u(x, t)(u(x, t + dt) - u(x, t)) dx \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^1 (u(x, t + dt) - u(x, t))^2 dx \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^1 u(x, t) \frac{\partial}{\partial x} u^2(x, t) dx dt - \nu \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx dt \\
&\quad - \int_0^1 u'(x, t) \sum_k f_k(x) B_k(t) dt dx + \frac{1}{2} \sum_k \int_0^1 f_k^2(x) dx dt \\
&= -\nu \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx dt - \sum_k \int_0^1 u'_k(x, t) f_k(x) dx B_k(t) dt \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_k \int_0^1 f_k^2(x) dx dt.
\end{aligned}$$

Переходя к математическим ожиданиям, мы получаем

$$\frac{d}{dt} \mathbb{E} \int_0^1 \frac{u^2(x, t)}{2} dx \leq -8\pi^2 \nu \mathbb{E} \int_0^1 \frac{u^2(x, t)}{2} dx + \frac{1}{2} \sum_k \int_0^1 f_k^2(x) dx.$$

Отсюда следует, что $\mathbb{E} \int \frac{u^2(x, t)}{2} dx$ остается ограниченным. При $\nu \rightarrow 0$ основной вклад в интеграл $\nu \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx$ дают малые окрестности ударных волн. Обсуждаемая ниже теория позволяет доказать, что

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \nu \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx = \frac{1}{12} \sum_i [u(x_i - 0, t) - u(x_i + 0, t)]^3,$$

где последняя сумма распространена на множество всех ударных волн. Из так называемого энтропийного условия ([52], [63]) следует, что каждое выражение в квадратных скобках положительно.

В [19] мы строим стационарную меру для (8) явно. Чтобы описать наш подход, введем некоторые обозначения. Обозначим через $\mathcal{F}_{t_1}^{t_2}$, $t_1 < t_2$, наименьшую σ -алгебру, порожденную всеми $B_k(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$. Если $\{S^\tau\}$ — однопараметрическая группа сдвигов, $S^\tau B_k(t) = B_k(t + \tau)$, то $\{S^\tau\}$ сохраняет естественную меру $\mathbb{P}$, определенную на всем $\mathcal{F}_{t_1}^{t_2}$, и является эргодической и перемешивающей относительно $\mathbb{P}$.

Предположим теперь, что мы сумели построить специальный функционал $M(B)$, измеримый относительно $\mathcal{F}_\infty^0$ и принимающий значения в пространстве Скорохода $\mathcal{D}_0$ функций с разрывами первого рода и с нулевым интегралом. Естественно искать решения уравнения (8) в этом пространстве. Основное свойство этого функционала

состоит в том, что $u(x, t) = MS^t(B)$ – слабое решение (8). Теперь, ввиду инвариантности P относительно группы сдвигов $\{S^\tau\}$, вероятностное распределение $M(B)$ приводит к стационарной мере для марковского процесса (8).

Функционал M имеет специальный вид, описываемый ниже.

Рассмотрим произвольную кусочно C^1 -гладкую функцию $x(t): \mathbb{R}^- \rightarrow S^1$ и формальный интеграл

$$A(\{x(t)\}) = \int_{-\infty}^0 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \sum_k f_k(x) B_k(t) \right] dt.$$

Мы назовем этот интеграл действием. Последняя часть формулы – это стохастический интеграл Ито. Однако хорошо известные трудности стохастического исчисления здесь не возникают, поскольку мы можем выполнить интегрирование по частям и свести дело к интегрированию кусочно непрерывной функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Функция $\bar{x}(t)$ называется *односторонним минимизатором*, если $A\{\bar{x}(t)\}$ – минимум относительно всех локальных непрерывных возмущений, т.е. для любого $x(t)$ такого, что $x(t) = \bar{x}(t)$ для всех $t \leq t'$, имеем

$$A(x(t)) - A(\bar{x}(t)) = \int_{t'}^0 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \sum_k f_k(x) B_k(t) - \frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{x}}{dt} \right)^2 - \sum_k f_k(\bar{x}) B_k(t) \right] dt \geq 0.$$

Нетрудно показать, что любой односторонний минимизатор удовлетворяет уравнению Эйлера–Лагранжа, которое в нашем случае имеет вид

$$(9) \quad \frac{dx}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = \sum f'_k(x) B_k(t).$$

Это уравнение также должно рассматриваться как стохастическое дифференциальное уравнение.

Не любое решение (9) является односторонним минимизатором. Мы опишем ниже некоторые специальные свойства минимизаторов.

ТЕОРЕМА 4. *C вероятностью 1 для любой точки $x \in S^1$ существует по крайней мере один односторонний минимизатор $\bar{x}(t)$, удовлетворяющий условию $\bar{x}(0) = x$.*

То, что любые два односторонних минимизатора не могут иметь двух пересечений, – это общий факт вариационного исчисления. В нашей вероятностной постановке справедливо более сильное утверждение.

ТЕОРЕМА 5. *С вероятностью 1 любые два односторонних минимизатора не могут пересечься. Более точно, если два односторонних минимизатора пересекаются в некоторый момент времени, то их продолжения в виде решений уравнения (9) уже не могут быть односторонними минимизаторами.*

Из теоремы 2 легко следует, что множество точек $x \in S^1$, являющихся концами нескольких минимизаторов, не более чем счетно. Опишем теперь функционал M . Положим $M(B)(x) = d\bar{x}/dt$, если односторонний минимизатор $\bar{x}(t)$, удовлетворяющий условию $\bar{x}(0) = x$, единствен. Для всех других точек пределы $\lim_{x' \rightarrow x-0} M(B)(x')$ и $\lim_{x'' \rightarrow x+0} M(B)(x'')$ существуют, и $\lim_{x' \rightarrow x-0} M(B)(x') > \lim_{x'' \rightarrow x+0} M(B)(x'')$. Иначе говоря, точки неединственности односторонних минимизаторов — это ударные волны. Положим $M(B) = \bar{u}(x, 0)$.

Из вариационного принципа Лакса–Олейник [42], [52] следует, что функция $\bar{u}(x, t) = M(S^t B)$, $-\infty < t < \infty$, является слабым решением уравнения Бюргерса без вязкости (8) (см. также [19]). Отсюда следует существование хотя бы одной стационарной меры для (8). Единственность можно вывести из другого свойства уравнения (8).

Следующая теорема утверждает существование так называемой главной ударной волны.

ТЕОРЕМА 6. *Существует единственная непрерывная кривая $\bar{y}(t)$, $-\infty < t < \infty$, для которой функция $\bar{u}(x, t)$ есть решение, разрывное при $x = \bar{y}(t)$.*

Эта кривая называется главной ударной волной нашего решения $\bar{u}(x, t)$. Можно показать, что все другие ударные волны в конце концов поглощаются главной ударной волной. В этом смысле, главная ударная волна служит аттрактором всех односторонних минимизаторов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Кривая $\bar{x}(t): \mathbb{R}^1 \rightarrow S^1$ называется *двусторонним минимизатором*, если она дает минимум функционалу двустороннего действия

$$A(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 + \sum f_k(x) B_k(\tau) \right] d\tau$$

относительно всех локальных непрерывных возмущений.

ТЕОРЕМА 7. *С вероятностью 1 двусторонний минимизатор $\bar{x}(t)$ существует и единствен.*

Это утверждение играет совершенно особую роль в нашей теории. Оказывается, этот двусторонний минимизатор является гиперболической траекторией системы (9) в том смысле, что он имеет устойчивое многообразие и неустойчивое многообразие, которые в нашем случае являются одномерными кривыми. Основной вывод — следующая теорема [19].

ТЕОРЕМА 8. *Решение $\{\bar{u}(x, 0)\} = M(B)$ является подмножеством неустойчивого многообразия двустороннего минимизатора. Более точно, если $\gamma^{(u)}$ есть это неустойчивое многообразие, то $(x, \bar{u}(x, 0)) \in \gamma^{(u)}$. Число ударных волн функции $\bar{u}(x, 0)$ конечно с вероятностью 1.*

5. Некоторые асимптотики для стационарного распределения

Обозначим через μ_0 стационарную вероятностную меру, соответствующую (8), которая является распределением $\bar{u}(x, 0)$. Она имеет ряд свойств, которые более или менее непосредственно следуют из ее построения.

1°. Если μ_ν – аналогичная мера для уравнения Бюргерса с вязкостью, то

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \mu_\nu = \mu_0,$$

где сходимость рассматривается в слабой топологии (см. [19]).

2°. Марковский процесс (8) имеет единственную стационарную меру (см. [19]).

Теория, описанная в разделе 4, позволяет также получать некоторые количественные результаты (см. [18]).

6. Асимптотическое поведение функций плотности распределения вероятностей u_x

Рассмотрим асимптотическое поведение функции распределения вероятностей для u_x и $\delta u = u(x+r, t) - u(x)$ для нашей стационарной меры.

6.1. Функция распределения градиента скорости. Этот вопрос недавно привлек большое внимание. Пусть $Q(\xi)$ – функция распределения (ФР) регулярной части $\xi = u_x$. Она корректно определена, поскольку в [19] доказано, что ударные волны изолированы, а вне ударных волн решение гладко. Поляков [54] впервые предложил следующую асимптотику для Q :

$$(10) \quad Q(\xi) \sim \begin{cases} C_- |\xi|^{-\alpha} & \text{при } \xi \rightarrow -\infty, \\ C_+ \xi^\beta e^{-\xi^3/3B_1} & \text{при } \xi \rightarrow +\infty, \end{cases}$$

где B_1 – постоянная, связанная с силой. Однако предсказания значений показателей α и β в разных работах отличаются вследствие различий в используемых технических приемах. Привлекая разложение в операторное произведение, Поляков [54] показал, что $\alpha = \frac{5}{2}$ и $\beta = \frac{1}{2}$. Вейнан И с соавторами [18] предположили, что основной вклад в большие отрицательные значения ξ поступает от малых областей вблизи точек рождения ударной волны. Это рассуждение дает значение $\alpha = \frac{7}{2}$. Гото и Крайчнан считают, что слагаемым, содержащим вязкость, можно пренебречь при вычислении старшего порядка, что приводит к значениям $\alpha = 3$ и $\beta = 1$ [26].

Пусть Q^ν есть ФР для статистического стационарного состояния вязкой задачи. В предположении статистической однородности, Q^ν удовлетворяет следующему основному уравнению:

$$(11) \quad B_1 Q_{\xi\xi}^\nu + \xi Q^\nu + (\xi^2 Q^\nu)_\xi - \nu (\langle \xi_{xx} | \xi \rangle Q^\nu)_\xi = 0,$$

где $\langle \xi_{xx} | \xi \rangle$ – условное среднее ξ_{xx} относительно ξ , а B_1 – тот же параметр, что и выше. Это уравнение незамкнуто из-за слагаемого, содержащего вязкость, и суть дела состоит в том, чтобы оценить это слагаемое. В [14], [15] И и Ван ден Эйнден оценили его, пользуясь формально согласованными асимптотиками, и в пределе при $\nu \rightarrow 0$ они получили

$$(12) \quad F(\xi) = - \lim_{\nu \rightarrow 0} \nu (\langle \xi_{xx} | \xi \rangle Q^\nu)_\xi = \varrho \int_{-\infty}^0 s V(s, \xi) ds;$$

в этой формуле ϱ – среднее число ударных волн и $V(s, \xi) = \frac{1}{2}(V_+(s, \xi) + V_-(s, \xi))$, где $V_\pm(s, \xi)$ – условные ФР для $(s(y_0, t), \xi_\pm(y_0, t) = u_x(y_0 \pm, t))$ относительно y_0 (местоположения ударной волны). Тогда уравнение для $Q(\xi) = \lim_{\nu \rightarrow 0} Q^\nu(\xi)$ принимает вид

$$(13) \quad B_1 Q_{\xi\xi} + \xi Q + (\xi^2 Q)_\xi + F(\xi) = 0.$$

Можно по-другому определить Q формулой $Q(\xi) = \lim_{\delta \rightarrow 0} Q^\delta(\xi)$, где Q^δ – ФР разнесенной разности $(u(x + \delta, t) - u(x, t))/\delta$. Тот факт, что эти два определения дают один и тот же результат, еще не доказан строго, хотя вычисление в [15], использующее согласованные асимптотики, убедительно подсказывает, что это действительно так. Тем не менее, при втором определении Q можно доказать, используя ВВ-исчисление, развитое Вольпертом [66], и, более общим образом, геометрическую теорию меры, что Q удовлетворяет уравнению (13).

Чтобы двигаться дальше, И и Ван ден Эйнден сделали следующие предположения:

- 1) решения уравнения (7) кусочно-гладки на плоскости (x, t) ,
- 2) ударные волны возникают при нулевой амплитуде, и мощности ударных волн складываются при столкновении.

Эти требования несколько сильнее утверждений, доказанных в [19]. Можно верить, что техника, развитая в [19], после некоторого улучшения, способна доказать, что эти предположения выполняются, но это еще не сделано. Тем не менее, в указанных предположениях, И и Ван ден Эйнден доказали, что Q допускает следующее представление:

$$(14) \quad Q(\xi) = |\xi|^{-3} \int_{-\infty}^{\xi} \xi' F(\xi') d\xi' + O(|\xi|^{-6}).$$

Кроме того, $G(\xi) = \xi F(\xi)$ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}^1$. Отсюда сразу следует, что

$$(15) \quad \lim_{\xi \rightarrow -\infty} |\xi|^3 Q(\xi) = 0.$$

В предположении, что Q имеет вид (10), этот факт исключает возможность $\alpha \leq 3$, что не отбрасывает только одну кандидатуру $\alpha = \frac{7}{2}$.

Для дальнейшего продвижения И и Ван ден Эйнден вывели основные уравнения для $V_\pm(s, \xi)$. На основании этих уравнений, самосогласованное асимптотическое рассуждение показывает, что главный вклад в $F(\xi)$ вносят рождения ударных волн, что согласуется с основным предположением в [18] и с их предсказанием $\alpha = \frac{7}{2}$. Этот круг идей не вполне строг, но они подкрепляют предположение, что правилен ответ $\alpha = \frac{7}{2}$ и $\beta = 1$. Далее, здесь мы имеем дело с одним из редких случаев, когда ответы получаются из основного уравнения без каких-либо неконтролируемых замыкающих предположений. Нужно также отметить, что даже если Поляков неправильно предсказал показатели α и β [54], то, тем не менее, впервые выписав уравнения типа (11), он ясно показал, что трудность замыкания основных уравнений связана с так называемой “диссипативной аномалией”, а не с нелинейным членом. Это наблюдение привело к другим чрезвычайно интересным предсказаниям.

6.2. Функция распределения для разности скоростей. Рассмотрим величину

$$\lambda = \delta u(r) = u(x + r, t) - u(x, t).$$

Совершенно ясно, что ФР правого хвоста λ , обозначаемая через $Q(\lambda, r)$, должна вести себя так же, как и Q , см. (10). Ясно также, что крайний левый хвост $Q(\lambda, r)$ управляется большими ударными волнами, что должно дать $e^{-C|\lambda|^3}$. Посередине есть по крайней мере два режима. Вблизи начала координат имеем $\delta u(r) \approx ru_x = r\xi$ при малых λ . Следовательно, этот режим должен масштабироваться с $|\lambda|^{-\frac{7}{2}}$. При движении влево, между этим режимом и дальним левым хвостом должен быть режим, управляемый статистикой малых ударных волн. Об этом режиме известно очень мало. Любые продвижения, включая аккуратные численные результаты, были бы очень важны.

7. Заключительные замечания

Важно понять, в каком смысле теория уравнения Бюргерса без вязкости (8) специальна.

В теории динамических систем двадцать лет назад была развита красивая теория отображений с перекручиванием, известная также как теория Обри–Мезера (см. [1], [48], [62]). Она может быть описана как относящаяся к двумерным отображениям цилиндра $\mathbb{R}^1 \times S^1$, которые в простейшем случае имеют вид

$$T(x, \varphi) = (z', \varphi'),$$

где $z' = z + V'(\varphi)$, $\varphi' = \varphi + z' \pmod{1}$ и V — гладкая периодическая функция. Дискретный вариант уравнения Бюргерса со случайной силой может быть описан как последовательность (z_n, φ_n) , где

$$z_{n+1} = z_n + \xi_n, \quad \varphi_{n+1} = \varphi_n + z_{n+1},$$

и ξ_n — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин. Однако следует подчеркнуть, что переход от (8) к (10) не является простым и аналог теории Обри–Мезера для (10) еще не создан.

Бек, Фриш и Ханин (см. [6]) рассматривали случай, который они называли уравнением Бюргерса с толчками, в котором сила действует в дискретные моменты времени, и вывели результаты, подобные полученным в [18]. См. также [24].

Наша теория, описанная в разделах 4 и 5, связана также с теорией стохастических динамических систем Баксендейла (см. [5]). Из этой теории следует, что у таких систем есть несколько положительных (т.е. неустойчивых) показателей Ляпунова и несколько отрицательных (т.е. устойчивых). В связи со скрытой диссипацией, объясненной в начале раздела 4, на самом деле система Бюргерса (8) имеет только отрицательные показатели Ляпунова. Можно надеяться, что наш подход работает для всего класса таких систем. Например, есть основания надеяться, что он будет работать и в случае многомерного уравнения Бюргерса. В то же время, по-видимому, системы Навье–Стокса с произвольной вязкостью могут иметь любое число положительных показателей Ляпунова, и здесь ситуация совершенно другая. Мы обсудим систему Навье–Стокса во второй части нашей статьи.

Часть II. Системы Навье–Стокса с периодическими граничными условиями

8. Общие замечания, касающиеся системы Навье–Стокса

Общая d -мерная система Навье–Стокса (НС) записывается для d неизвестных функций $u(x, t) = (u_1(x, t), \dots, u_d(x, t))$ от d переменных $x = (x_1, \dots, x_d)$ и от времени t и для давления $p(x, t)$ в виде

$$(16) \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_k u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \nu \Delta u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + f^{(i)}.$$

Мы рассматриваем несжимаемую жидкость с плотностью $\rho \equiv 1$. В этом случае мы получаем дополнительное уравнение

$$(17) \quad \operatorname{div} u = \sum_{i=1}^d \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \equiv 0.$$

Функции $f^{(i)}$ являются компонентами внешней силы, а $\nu > 0$ — вязкость.

Уравнения (16), (17) играют в гидродинамике центральную роль, особенно в связи с турбулентностью. Основной вопрос математической теории — насколько сложными могут быть решения системы (16), (17).

Интеграл $E(u) = \frac{1}{2} \int u^2(x, t) dx = \frac{1}{2} \int \sum_{i=1}^d u_i^2(x, t) dx$ — это энергия. Как правило, интерес представляют решения (16), (17) с конечной $E(u)$.

В качестве первого упрощения рассмотрим (16), (17) с периодическими граничными условиями, что позволяет использовать аппарат рядов Фурье. Пусть

$$u(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} u_k(t) e^{2\pi i(k, x)},$$

где $u_k \in \mathbb{R}^d$ при любом k ; тогда условие несжимаемости сводится к требованию $u_k \perp k$ при всех $k \in \mathbb{Z}^d$. Вместо (16), (17) получаем

$$(18) \quad \frac{du_k}{dt} = -2\pi i \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}^d} (u_{k_1}, k) \Pi_k u_{k-k_1} - \nu |k|^2 u_k + f_k.$$

Здесь Π_k — оператор ортогонального проектирования на $(d-1)$ -мерную плоскость ортогональную k , а f_k — компоненты внешней силы. Мы предположим для простоты, что лишь конечное число f_k отлично от нуля. В случае конечной энергии имеем $\sum_k |u_k|^2 < \infty$. Иногда система (18) называется системой Галеркина для исходной НС. Конечномерное галеркинское приближение для (18) возникает, если $k_1, k, k - k_1 \in O$ в (18), где O — конечная выпуклая симметричная область (т.е. k и $-k$ принадлежат O одновременно). Для соответствующей системы мы используем обозначение $(18)_O$. Сформулируем следующую простую лемму.

ЛЕММА 1. *Если $E(u) < \infty$, то правая часть равенства (18) конечна при любом k .*

Эта лемма показывает, что, по крайней мере формально, векторное поле, соответствующее (18), корректно определено на всем гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{Z}^d)$ функций u , для которых $E(u)$ конечна. Разумеется, из этой леммы не следует, что правая часть (18) тоже принадлежит $L^2(\mathbb{Z}^d)$. Введем следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. *Сильным решением* уравнения (18) на интервале $[0, T]$ называется такое однопараметрическое семейство $\{u_k(t)\} \in L^2(\mathbb{Z}^d)$, что функция $u_k(t)$ дифференцируема по t для любого k и равенство (18) выполняется для любого $k \in \mathbb{Z}^d$.

Локальное существование сильных решений означает, что для данного семейства $\{u_k(0), k \in \mathbb{Z}^d\}$ можно найти отрезок $[0, t_0]$, на котором существует сильное решение $\{u_k(t), k \in \mathbb{Z}^d\}$, $t \in [0, t_0]$. Другими словами, существует конечный кусок траектории СНС, выходящий из $\{u_k(0)\}$. Глобальное существование означает, что существует целая траектория $\{u_k(t), t \geq 0\}$, выходящая из $\{u_k(0)\}$. Утверждение о локальном существовании, конечно, гораздо проще (см. ниже). Аналогичные определения можно ввести для любых галеркинских аппроксимаций (18_O) .

Задачи существования и единственности решений СНС впервые рассматривались Ж. Лерев его классической статье [44] в 1934 году. Он доказал глобальное существование слабых решений задачи Коши в $\mathbb{R}^3$. Позже Хопф [32] распространил эти результаты на случай ограниченных областей с нулевыми граничными условиями. Существование сильных решений было доказано в двумерном случае Ладыженской в шестидесятые годы (см. [41]). Другие методы были развиты в работах Фояша и Темама (см. [22] и обзор [64]), Юдовича [69], Константина–Фояша [12] и др. Однако основная задача глобального существования сильных решений в трехмерном случае остается нерешенной. Есть люди, включая одного из авторов этих строк, которые даже не верят в положительный ответ.

9. Теорема существования глобальных решений системы Навье–Стокса

Методы доказательства теоремы о глобальном существовании основаны на энергетических и энтропийных оценках. Возьмем любую систему (18_O) и положим $E_O(u) = \sum_{k \in O} |u_k|^2$.

ЛЕММА 2 (энергетическая оценка). Пусть $\{u_O(t)\}$, $t \in [t_1, t_2]$, – сильное решение (18_O) , где O либо конечно, либо совпадает с $\mathbb{Z}^d$. Тогда

$$\frac{d}{dt} E(u_O(t)) \leq -4\pi^2 \nu E(u_O(t)) + 2F \sqrt{E(u_O(t))},$$

где $F = \sum_k |f_k|^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО получается непосредственным подсчетом (см., например, [61]). Имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(u(t)) &= \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \sum_{k \in O} (u_k, u_k) = \frac{1}{2} \sum_{k \in O} \left(\frac{du_k}{dt}, u_k \right) + \frac{1}{2} \sum_{k \in O} \left(u_k, \frac{du_k}{dt} \right) \\ &= -\pi i \sum_{k, k_1 \in O} (u_{k_1}, k)(u_{k-k_1}, u_k) - \pi i \sum_{k, k_1 \in O} (u_{k_1}, u_{k-k_1})(u_{k_1}, k) \\ &\quad - 4\pi^2 \nu \sum_{k \in O} |k|^2 (u_k, u_k) + \sum_{k \in O} (f_k, u_k) + \sum_{k \in O} (u_k, f_k). \end{aligned}$$

Нетрудно показать, что первые две суммы тождественно равны нулю. Несложная оценка остальных слагаемых дает требуемый результат.

Лемма 2 показывает, что если начальная энергия конечна, то она остается ограниченной на всем интервале существования сильного решения.

ТЕОРЕМА 9 (локальная теорема существования). Пусть семейство функций $\{u_k(0)\}$ удовлетворяет условию $\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |u_k(0)| = h < \infty$. Тогда существует сильное решение системы (18) на интервале $[0, t_0]$, где $t_0 = cv/h$ и c — абсолютная постоянная, зависящая от размерности.

Имеются другие, более сильные результаты, не покрываемые этой теоремой (см. [35], [45]). Один из примеров дает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 10 (Калошин и Санников). Пусть $d = 3$ и $|u_k(0)| \leq c/|k|^\gamma$, где $\gamma \geq 2$. Если c достаточно мало, то существует сильное решение системы (18) для всех $t > 0$.

Есть несколько методов доказательства результатов о локальном существовании. Однако значения t_0 имеют при этом один и тот же порядок величины.

Доказательство теоремы о глобальном существовании основано на понятии энтропии. В дальнейшем мы предполагаем, что $d = 2$ или 3 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Энтропия семейства $\{u_k, k \in O\}$ — это величина

$$V_O(\{u_k, k \in O\}) = \sum_{k \in O} |k|^2 |u_k|^2.$$

При $O = \mathbb{Z}^d$ мы пишем просто $V(\{u_k\})$. Основной результат утверждает, что если энтропия $V_O(\{u_k(t), k \in O\})$ остается ограниченной вдоль сильного решения системы (18) или (18_O) , то моды u_k экспоненциально убывают. Вот более точная формулировка.

ТЕОРЕМА 11. Пусть функции $\{u_k(0), k \in O \text{ или } \mathbb{Z}^d\}$ удовлетворяют условию

$$(19) \quad |u_k(0)| \leq \frac{\mathcal{D}}{|k|^\gamma}, \quad k \in O \text{ или } \mathbb{Z}^d,$$

для некоторых $\mathcal{D} < \infty$ и $\gamma > \frac{d}{2} + 1$, и пусть

$$V(\{u_k(t), k \in O \text{ или } \mathbb{Z}^d\}) \leq V_0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

для сильного решения $\{u_k(t)\}$. Тогда существуют такие положительные α и $\mathcal{D}_0$, что

$$(20) \quad |u_k(t)| \leq \frac{\mathcal{D}_0 e^{-\alpha t \cdot |k|}}{|k|^\gamma}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

для всех k .

Эта теорема была доказана Фояшем и Темамом (см. [22]). Приведенное ниже доказательство вытекает из результатов статей [50] и [61]. Начнем со следующего предварительного утверждения.

ЛЕММА 3. Если $\{u_k(0)\}$ удовлетворяет оценке (19) и энтропия ограничена, то существует другая постоянная $\mathcal{D}_1$, при которой выполнены неравенства $|u_k(t)| \leq \mathcal{D}_1/|k|^\gamma$ при всех k и для всех $0 \leq t \leq T$. Эта постоянная не зависит от O .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В этой лемме, как и в последующих, мы рассмотрим для простоты вещественный вариант системы (18):

$$(21) \quad \frac{du_k}{dt} = 2\pi \sum (u_{k_1}, k) \cap_k u_{k-k_1} - \nu k^2 u_k + f_k.$$

Мы предположим также, что все u_k одномерны. Это — тоже лишь техническое упрощение. Возьмем достаточно большое число K , значение которого мы определим позже. Так как $V(\{u_k(t), k \in \mathbb{Z}^d\}) \leq V_0$, то можно найти постоянную $\mathcal{D}_1(K)$, удовлетворяющую условию

$$|u_k(t)| \leq \frac{\sqrt{V_0}}{|k|} \leq \frac{\mathcal{D}_1(K)}{|k|^\gamma}, \quad |k| \leq K.$$

Докажем, что $|u_k(t)| < \mathcal{D}_1(K)|k|^{-\gamma}$ для всех k при $|k| > K$, если K достаточно велико. Пусть это не так, и для некоторых значений $\bar{k}$ ($|\bar{k}| > K$) и $\bar{t} \leq T$ выполняется неравенство

$$|u_{\bar{k}}(\bar{t})| = \frac{\mathcal{D}_1(K)}{|\bar{k}|^\gamma}.$$

Возьмем наименьшее $\bar{t}$ и рассмотрим случай

$$u_{\bar{k}}(\bar{t}) = \frac{\mathcal{D}_1(K)}{|\bar{k}|^\gamma}.$$

Второй случай можно рассмотреть аналогично. Мы должны получить

$$(22) \quad \frac{du_{\bar{k}}(\bar{t})}{dt} \geq 0.$$

Приведенное ниже рассуждение показывает, что это невозможно, поскольку доминирует слагаемое, содержащее вязкость. А именно,

$$(23) \quad \nu |\bar{k}|^2 u_{\bar{k}} > \nu \mathcal{D}_1(K) \cdot |\bar{k}|^{2-\gamma}.$$

Мы всегда можем предполагать, что K настолько велико, что $f_k = 0$ при $|k| \geq K$. Чтобы оценить сумму

$$\left| \sum_{k_1} (u_{k_1}, \bar{k}) \cdot \cap_{\bar{k}} u_{\bar{k}-k_1} \right| \leq \sum_{k_1} |u_{k_1}| \cdot |\bar{k} - k_1| \cdot |u_{\bar{k}-k_1}|,$$

мы рассмотрим три случая.

Случай I. $|k_1| \leq \frac{1}{2}|\bar{k}|$.

Здесь $|\bar{k} - k_1| \geq \frac{1}{2}|\bar{k}|$, и поэтому $|u_{\bar{k}-k_1}| \cdot |\bar{k} - k_1| \leq 2^\gamma \mathcal{D}_1(K) \cdot |\bar{k}|^{1-\gamma}$. С другой стороны, по неравенству Коши–Буняковского имеем

$$\begin{aligned} \sum_{|k_1| \leq \frac{1}{2}|\bar{k}|} |u_{k_1}| &\leq \sum_{|k_1| \leq \frac{1}{2}|\bar{k}|} |k_1| \cdot |u_{k_1}| \cdot \frac{1}{|k_1|} \leq \sqrt{\sum |k_1|^2 |u_{k_1}|^2} \cdot \sqrt{\sum \frac{1}{|k_1|^2}} \\ &\leq \text{const } \sqrt{V} \cdot |\bar{k}|^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Последнее неравенство справедливо при $d \leq 3$. Мы видим, что слагаемое, содержащее вязкость, доминирует при достаточно большом K .

Случай II. $\frac{1}{2}|\bar{k}| < |k_1| \leq 2|\bar{k}|$.

В этом случае $|u_{k_1}| \leq 2^\gamma \mathcal{D}_1(K) \cdot |k_1|^{-\gamma}$, и мы снова получаем

$$\sum_{\frac{1}{2}|\bar{k}| \leq |k_1| \leq 2|\bar{k}|} |u_{\bar{k}_1}| \cdot |k - k_1| \cdot |u_{k-k_1}| \leq \frac{2^\gamma \mathcal{D}_1(K)}{|\bar{k}|^{\gamma-1}} \cdot \sum |u_{\bar{k}-k_1}| \cdot |\bar{k} - k_1|.$$

То же рассуждение, что и в случае I, показывает, что

$$\sum |u_{\bar{k}-k_1}| \cdot |\bar{k} - k_1| \leq \text{const} \sqrt{\sum_{|k| \leq 3|\bar{k}|} |u_k|^2 |k|^2} \cdot |\bar{k}|^{3/2} \leq \text{const} \sqrt{V} |\bar{k}|^{3/2}.$$

Мы снова видим, что и при $d \leq 3$ слагаемое, содержащее вязкость, доминирует при достаточно большом K .

Случай III. $|k_1| > 2|\bar{k}|$.

Здесь $|\bar{k} - k_1| > |\bar{k}|$. Поэтому

$$\begin{aligned} \sum |u_{k_1}| \cdot |\bar{k} - k_1| \cdot |u_{\bar{k}-k_1}| &\leq \frac{1}{|\bar{k}|} \sum |u_{k_1}| \cdot |k_1| \cdot |\bar{k} - k_1| \cdot |u_{\bar{k}-k_1}| \\ &\leq \frac{1}{|\bar{k}|} \cdot \sqrt{\sum |u_{k_1}|^2 \cdot |k_1|^2} \cdot \sqrt{\sum |\bar{k} - k_1|^2 \cdot |u_{\bar{k}-k_1}|^2} \\ &\leq \frac{\sqrt{V}}{|\bar{k}|} \cdot \mathcal{D}_1(K) \sqrt{\sum_{|k_1| \geq 2|\bar{k}|} \frac{1}{|k_1|^{2\gamma-2}}} \\ &\leq \frac{\text{const} \sqrt{V} \cdot \mathcal{D}_1(K)}{|\bar{k}|} \cdot \frac{|\bar{k}|^{1+d/2}}{|\bar{k}|^\gamma}. \end{aligned}$$

Слагаемое, содержащее вязкость, снова доминирует, и это завершает доказательство леммы 3.

Мы завершим теперь доказательство теоремы 6. Рассмотрим случай $O = \mathbb{Z}^d$. Ввиду леммы 3, для любых $k \in \mathbb{Z}^d$ имеем

$$|u_k(t)| \leq \frac{\mathcal{D}_1}{|k|^\gamma}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Поэтому при каждом K можно найти такое $\alpha(K) = \alpha$, что

$$(24) \quad |u_k(t)| \leq \frac{2\mathcal{D}_1}{|k|^\gamma} e^{-\alpha t |k|}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

для всех k таких, что $|k| < K$. Мы снова рассмотрим вещественный вариант системы (18):

$$(18') \quad \frac{du_k}{dt} = 2\pi \sum_{k_1} (u_{k_1}, k) \cap_k u_{k-k_1} - \nu |k|^2 u_k + f_k.$$

Положим $v_k(t) = e^{\alpha|k|t} u_k(t)$. Тогда для v_k мы получаем следующую систему уравнений:

$$(25) \quad \frac{dv_k(t)}{dt} = \sum (v_{k_1}, k) \Pi_k v_{k-k_1} \cdot \frac{e^{-\alpha|k_1|t - \alpha|k-k_1|t}}{e^{-\alpha|k|t}} - (\nu|k|^2 - \alpha|k|)v_k + e^{\alpha|k|t} f_k.$$

Теперь наше рассуждение практически не будет отличаться от рассуждения в доказательстве леммы 3. При $|k| \leq K$ у нас есть нужные оценки, которые можно переписать в виде

$$|v_k(t)| \leq \frac{2\mathcal{D}_1}{|k|^\gamma}.$$

Предположим, что для некоторого $\bar{k}$, $|\bar{k}| > K$, можно найти такое t_0 , $0 < t_0 \leq T$, что $|v_{\bar{k}}(t_0)| = 2\mathcal{D}_1|\bar{k}|^{-\gamma}$. Для определенности мы снова рассмотрим случай $v_{\bar{k}}(t_0) = 2\mathcal{D}_1|\bar{k}|^{-\gamma}$. Мы можем также предположить, что t_0 — наименьшее число с требуемыми свойствами. Тогда должно выполняться соотношение $(dv_{\bar{k}}/dt)(t_0) \geq 0$. Противоречие с этим неравенством получается так же, как и в лемме 3. Отметим, что $e^{-\alpha|k_1|t - \alpha|k-k_1|t} \leq e^{-\alpha|k|t}$, поскольку $|k_1| + |k - k_1| \geq |k|$. Вместо конечности энтропии мы всюду используем оценки $|v_k(t_0)| \leq 2\mathcal{D}_1|k|^{-\gamma}$. Подробности предоставляются читателю.

В двумерном случае можно доказать существование сильных решений для всех $t > 0$ при очень умеренных предположениях относительно начальных условий. При $d = 2$ компоненты скорости $u^{(1)}(x_1, x_2, t)$, $u^{(2)}(x_1, x_2, t)$ удовлетворяют условию несжимаемости $\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x_1} + \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x_2} = 0$. Поэтому можно ввести завихренность

$$\omega = \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x_2} - \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x_1}$$

так, что энтропия становится пропорциональной L^2 -норме завихренности; она удовлетворяет так называемому энтропийному неравенству, аналогичному энергетическому неравенству:

ЛЕММА 4. Для любого решения системы (18) или (18_O) имеем

$$\frac{dV(\{u_k(t)\})}{dt} \leq -4\pi^2\nu V(\{u_k(t)\}) + 2F\sqrt{V(\{u_k(t)\})}.$$

Доказательство можно найти во многих учебниках; см. также [61].

Эта лемма показывает, что если энтропия при $t = 0$ конечна, то она остается ограниченной на любом временном интервале. Тогда из теоремы 6 непосредственно следует существование глобальных сильных решений для $d = 2$.

Как мы говорили выше, проблема существования глобальных сильных решений СНС при $d = 3$ остается стимулирующей нерешенной задачей.

10. Двумерная система Навье–Стокса с периодическими граничными условиями и случайной силой

Система Навье–Стокса со случайной силой рассматривается как наиболее популярная модель турбулентности. Однако некоторые авторы выражают сомнения по поводу адекватности этой модели истинной гидродинамике. Мы не будем обсуждать этот вопрос. Начнем со случая $d = 2$, поскольку он более изучен в связи с большей простотой проблемы существования решения также и в случайной ситуации.

Система уравнений имеет тот же вид, что и выше:

$$(26) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial t} + u^{(1)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x_1} + u^{(2)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x_2} &= \nu \Delta u^{(1)} + g^{(1)}, \\ \frac{\partial u^{(2)}}{\partial t} + u^{(1)} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x_1} + u^{(2)} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x_2} &= \nu \Delta u^{(2)} + g^{(2)}, \\ \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x_1} + \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x_2} &= 0, \end{aligned}$$

где $g = (g^{(1)}, g^{(2)})$ – случайные функции пространственных и временных переменных. Удобно рассматривать завихренность $\omega = \partial u^{(1)} / \partial x_2 - \partial u^{(2)} / \partial x_1$ и написать для нее уравнение

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u^{(1)} \frac{\partial \omega}{\partial x_1} + u^{(2)} \frac{\partial \omega}{\partial x_2} = \nu \Delta \omega + f$$

с $f = \partial g^{(1)} / \partial x_2 - \partial g^{(2)} / \partial x_1$. Разлагая ω в ряд Фурье, $\omega = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} w_k e^{2\pi i(k, x)}$, мы получаем для w_k систему уравнений

$$(27) \quad \frac{dw_k}{dt} = -2\pi i \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}^2} w_{k_1} w_{k-k_1} \frac{(k, k_1^\perp)}{(k_1, k_1)} - \nu |k|^2 w_k + f_{L^k}(t), \quad w_{-k} = \overline{w_k}.$$

Предположим, что f_k – независимые белые шумы, за исключением соотношений $f_{-k} = \bar{f}_k$, из которых следует, что решения (27) вещественны. Можно переписать систему (27) в виде бесконечномерной системы стохастических дифференциальных уравнений. Различные теоремы существования, справедливые в этой ситуации, имеются в [13], [39], [25].

Ограничимся общими свойствами системы (27) и сделаем упрощающее предположение: $f_k = 0$ при $|k| > K_0$. Нам нужно понятие определяющих мод, введенное К. Фояшом (см. [64]). Возьмем K и любые функции $\bar{w}_k(t)$, $-\infty < t \leq 0$, $|k| \leq K$. Рассмотрим систему (27) при $|k| \geq K$ и $t \geq -T$ с начальными условиями $w_k(-T) = 0$, $k > K$. Обозначим это решение через $w_k(t; -T)$ и предположим существование предела $\lim_{T \rightarrow \infty} w_k(t; -T) = w_k(t, -\infty)$. Этот предел может существовать, если K достаточно велико и слагаемое, содержащее вязкость, доминирует. Разумеется, функции $w_k(t)$, $|k| \leq K$, не должны расти слишком быстро при $t \rightarrow -\infty$.

Если $w_k(t)$, $|k| \leq K$, – определяющие моды, то любая “высокая” мода $w_k(t, -\infty)$, $|k| > K$, может быть переписана в виде $w_k(t, -\infty) = \Phi_k(w_{k_1}(\zeta))$, $s \leq t$, $|k_1| \leq K$, где Φ_k – функционал, зависящий от всей предыстории высоких мод с $|k| \leq K$. Поэтому вся система (27) эффективно сводится к конечномерной системе стохастических дифференциальных уравнений

$$(28) \quad dw_k = + \left[2\pi i \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}^2} w_{k_1} w_{k-k_1} \frac{(k, k_1^\perp)}{(k_1, k_1)} - \nu |k|^2 w_k \right] dt + f_k db_k(t),$$

где “высокие” моды w_{k_1} , $|k_1| > K$, являются функционалами от мод с низкими номерами, а b_k – броуновские движения, которые независимы за исключением соотношения $b_{-k} = b_k$.

Первые результаты, касающиеся существования инвариантной меры для марковского процесса в функциональном пространстве, отвечающего (28), были получены Вишиком и Фурсиковым (см. [25]) и Фландоли и Масловски (см. [21]). Рассуждение несложно. Рассмотрим энтропию $V(t) = \sum_k w_k^2(t)$. Ее дифференциал может быть записан с помощью формулы Ито:

$$dV(t) = \sum dw_k(t) w_{-k}(t) + \sum w_k(t) dw_{-k}(t) + \sum |f_k|^2.$$

Подставляя сюда правую часть (28), мы легко получаем неравенство (см. [21], [49])

$$EV(t) \leq C_1 + C_2(EV(t_0) - C_3)$$

для некоторых постоянных $C_1 < \infty$, $C_2 < 1$, $C_3 < \infty$. Отсюда сразу следует ограниченность $EV(t)$. Тогда из общих результатов теории марковских процессов следует существование инвариантной меры.

Единственность гораздо труднее. Фландоли и Масловски (см. [21]) доказали единственность инвариантной меры в предположении, что коэффициенты f_k не обращаются в нуль для всех k и регулярно убывают на бесконечности. Мэттингли (см. [49]) доказал единственность при меньших ограничениях относительно f_k и при больших ν . Единственность для другого типа случайной силы была доказана в статье С. Куксина и А. Ширикяна [38]. В недавней статье И. Мэттингли и Синая единственность инвариантной меры была доказана в предположении, что $f_k \neq 0$ для всех определяющих мод.

Часть III. Стохастическое уравнение переноса пассивного скаляра

Рассмотрим уравнение переноса пассивного скаляра скалярного поля $\theta^\kappa(\vec{x}, t)$ в $\mathbb{R}^d$:

$$(29) \quad \frac{\partial \theta^\kappa}{\partial t} + (\vec{u}(\vec{x}, t) \cdot \nabla) \theta^\kappa = \kappa \Delta \theta^\kappa,$$

где $\vec{u}$ – “белый по времени” случайный процесс (бесконечномерное броуновское движение), определенный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Хорошо известно, что эта задача тесно связана со стохастическим обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ)

$$(30) \quad d\varphi_{s,t}^\omega(\vec{x}) = \vec{u}(\varphi_{s,t}^\omega(\vec{x}), t) dt, \quad \varphi_{s,s}^\omega(\vec{x}) = \vec{x}.$$

В связи с уравнением переноса наиболее естественно рассматривать это стохастическое ОДУ в смысле Стратоновича. Показано [39], что если локальная характеристика $\vec{u}$ дважды непрерывно дифференцируема по пространственным переменным, то система (30) имеет единственное решение. Но, для типичных турбулентных полей скоростей, “на интересных масштабах” эти условия не выполняются. На самом деле колмогоровская теория турбулентности подсказывает, что в трехмерном случае функция $\vec{u}$ удовлетворяет всего лишь условию Гёльдера с показателем, примерно равным $\frac{1}{3}$.

Если условие регулярности для $\vec{u}$ не выполняется, то имеется по крайней мере два естественных метода регуляризации (29). Первый состоит в том, чтобы добавить диффузию:

$$(31) \quad d\varphi_{s,t}^{\omega,\kappa}(\vec{x}) = \vec{u}(\varphi_{s,t}^{\omega,\kappa}(\vec{x}), t) dt + \sqrt{2\kappa} d\vec{\beta}(t),$$

и рассмотреть предел при $\kappa \rightarrow 0$, как в (29). Этот путь мы назовем κ -пределом. Вторым методом состоит в сглаживании поля скоростей. Пусть ψ_ε определено равенством

$$\psi_\varepsilon(\vec{x}) = \frac{1}{\varepsilon^d} \psi\left(\frac{\vec{x}}{\varepsilon}\right),$$

где ψ — стандартный сглаживатель: $\psi \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^d} \psi d\vec{x} = 1$ и ψ быстро убывает на бесконечности. Положим $\vec{u}^\varepsilon = \vec{u} \star \psi_\varepsilon$ и рассмотрим

$$(32) \quad d\varphi_{s,t}^{\omega,\varepsilon}(\vec{x}) = \vec{u}^\varepsilon(\varphi_{s,t}^{\omega,\varepsilon}(\vec{x}), t) dt$$

в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$. Мы назовем этот переход ε -пределом. Физически, κ играет роль молекулярного коэффициента диффузии, а ε можно представлять себе как грубую модель вязкой срезающей шкалы. Таким образом, κ -предел соответствует ситуации, в которой число Прандтля стремится к нулю, $Pr \rightarrow 0$, в то время как ε -предел соответствует ситуации, в которой число Прандтля расходится, $Pr \rightarrow \infty$.

Перед тем как двигаться дальше, мы свяжем регуляризованные потоки в (31), (32) с решением уравнения переноса. Рассмотрим сначала κ -регуляризацию. Удобно ввести вероятность обратного перехода

$$(33) \quad g_\omega^\kappa(\vec{x}, t | d\vec{y}, s) = \mathbb{E}_\beta \delta(\vec{y} - \varphi_{t,s}^{\omega,\kappa}(\vec{x})) d\vec{y}, \quad s < t,$$

где математическое ожидание берется относительно $\vec{\beta}(t)$ и $\varphi_{t,s}^{\omega,\kappa}(\vec{x})$ — поток, обратный к потоку $\varphi_{s,t}^{\omega,\kappa}(\vec{x})$, определенному в (31) (т.е. $\varphi_{s,t}^{\omega,\kappa}(\vec{x})$ — прямой поток, а $\varphi_{t,s}^{\omega,\kappa}(\vec{x})$ — поток в обратную сторону). Действие g_ω^κ порождает полугруппу преобразований

$$(34) \quad S_{t,s}^{\omega,\kappa} \psi(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} \psi(\vec{y}) g_\omega^\kappa(\vec{x}, t | d\vec{y}, s)$$

для всех пробных функций ψ . Функции $\theta_\omega^\kappa(\vec{x}, t) = S_{t,s}^{\omega,\kappa} \psi(\vec{x})$ решают уравнение переноса в (29) при начальных условиях $\theta_\omega^\kappa(\vec{x}, s) = \psi(\vec{x})$. Аналогично, для потока (32) положим

$$(35) \quad S_{t,s}^{\omega,\varepsilon} \psi(\vec{x}) = \psi(\varphi_{t,s}^{\omega,\varepsilon}(\vec{x})), \quad s < t.$$

Тогда $\theta_\omega^\varepsilon(\vec{x}, t) = S_{t,s}^{\omega,\varepsilon} \psi(\vec{x})$ решает уравнение переноса

$$(36) \quad \frac{\partial \theta^\varepsilon}{\partial t} + (\vec{u}^\varepsilon(\vec{x}, t) \cdot \nabla) \theta^\varepsilon = 0$$

с начальным условием $\theta(\vec{x}, s) = \psi(\vec{x})$. Аналогичные определения могут быть даны для прямых потоков, но мы сосредоточим наше внимание на обратных потоках, поскольку мы заинтересованы главным образом в скалярном переносе. Приведенные ниже результаты тривиально обобщаются на прямые потоки.

11. Модель Крайчнана

Мы рассмотрим обобщение модели Крайчнана [37], в которой $\vec{u}$ предполагается статистически однородным, изотропным и стационарным гауссовым полем с нулевым средним и с ковариацией

$$(37) \quad Eu_\alpha(\vec{x}, t)u_\beta(\vec{y}, s) = (C_0\delta_{\alpha\beta} - c_{\alpha\beta}(\vec{x} - \vec{y}))\delta(t - s).$$

Предположим, что $\vec{u}$ имеет корреляционную длину ℓ_0 , т.е. ковариация в (37) быстро убывает при $|\vec{x} - \vec{y}| > \ell_0$. Согласованным образом, $c_{\alpha\beta}(\vec{x}) \rightarrow C_0\delta_{\alpha\beta}$ при $|\vec{x}|/\ell_0 \rightarrow \infty$. С другой стороны, мы заинтересованы главным образом в мелкомасштабных явлениях, для которых $|\vec{x}| \ll \ell_0$. В этой связи мы возьмем $c_{\alpha\beta}(\vec{x}) = d_{\alpha\beta}(\vec{x}) + O(|\vec{x}|^2/\ell_0^2)$, где

$$(38) \quad d_{\alpha\beta}(\vec{x}) = Ad_{\alpha\beta}^P(\vec{x}) + Bd_{\alpha\beta}^S(\vec{x}),$$

и

$$(39) \quad \begin{aligned} d_{\alpha\beta}^P(\vec{x}) &= D \left(\delta_{\alpha\beta} + \xi \frac{x_\alpha x_\beta}{|\vec{x}|^2} \right) |\vec{x}|^\xi, \\ d_{\alpha\beta}^S(\vec{x}) &= D \left((d + \xi - 1)\delta_{\alpha\beta} - \xi \frac{x_\alpha x_\beta}{|\vec{x}|^2} \right) |\vec{x}|^\xi. \end{aligned}$$

Величина D – параметр, размерность которого $[\text{длина}]^{2-\xi}[\text{время}]^{-1}$. Безразмерные параметры A и B измеряют дивергенцию и вихрь поля $\vec{u}$. Случай $A = 0$ соответствует несжимаемым полям с $\nabla \cdot \vec{u} = 0$, случай $B = 0$ соответствует безвихревым полям с $\nabla \times \vec{u} = 0$. Параметр ξ измеряет пространственную регулярность $\vec{u}$. При $\xi \in (0, 2)$, локальная характеристика поля $\vec{u}$ перестает быть дважды дифференцируемой, и этот факт имеет важные следствия как для уравнения переноса в (29), так и для систем ОДУ в (30) или (31).

Существующая физическая литература сосредоточена на κ -пределе для модели Крайчнана [26], [10], [57]. Пусть $\mathcal{S}^2 = A + (d - 1)B$, $\mathcal{C}^2 = A$, $\mathcal{P} = \mathcal{C}^2/\mathcal{S}^2$. Величина $\mathcal{P} \in [0, 1]$ – мера степени сжимаемости поля $\vec{u}$. Пионерская работа Гавецки и Вергассола [27] выделяет два различных режима для κ -предела.

1. Сильно сжимаемый режим с

$$(40) \quad \mathcal{P} \geq \frac{d}{\xi^2}.$$

В этом режиме g_ω^κ сходится к потоку отображений, т.е. существует такое двухпараметрическое семейство отображений $\{\varphi_{t,s}^\omega(\vec{x})\}$, что

$$(41) \quad g_\omega^\kappa(\vec{x}, t | d\vec{y}, s) \rightarrow \delta(\vec{y} - \varphi_{t,s}^\omega(\vec{x})) d\vec{y}.$$

Кроме того, частицы имеют конечную вероятность объединиться под действием потока $\{\varphi_{t,s}^\omega(\vec{x})\}$.

2. Если

$$(42) \quad \mathcal{P} \leq \frac{d}{\xi^2},$$

то g_ω^κ сходится к “обобщенному стохастическому потоку” [16],

$$(43) \quad g_\omega^\kappa(\vec{x}, t | d\vec{y}, s) \rightarrow g_\omega(\vec{x}, t | d\vec{y}, s),$$

и предел g_ω является вероятностным распределением по $\vec{y}$. Это означает, что образ частицы под действием потока, определенного полем скоростей $\vec{u}$, не является однозначно определенным и имеет нетривиальное распределение. Иными словами, траектории частиц ветвятся.

Следующий результат И и Ванден Эйндена обеспечивает строгую проверку этих предсказаний и также расширяет результат об ε -пределе. В частности, он указывает, что есть три режима, в которых можно рассматривать и κ -, и ε -пределы.

ТЕОРЕМА 12. *В случае такого сильно сжимаемого режима, что*

$$(44) \quad \mathcal{P} \geq \frac{d}{\xi^2},$$

существует двупараметрическое семейство случайных отображений $\{\varphi_{t,s}^\omega(\vec{x})\}$, для которого соотношения

$$(45) \quad \mathbb{E}(S_{t,s}^{\omega,\kappa}\psi(\vec{x}) - \psi(\varphi_{t,s}^\omega(\vec{x})))^2 \rightarrow 0, \quad \kappa \rightarrow 0,$$

$$(46) \quad \mathbb{E}(\psi(\varphi_{t,s}^{\omega,\varepsilon}(\vec{x})) - \psi(\varphi_{t,s}^\omega(\vec{x})))^2 \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

выполняются при любой гладкой пробной функции ψ и для всех $(s, t, \vec{x})$, $s < t$. Кроме того, предельный поток $\{\varphi_{t,s}^\omega(\vec{x})\}$ слипается в том смысле, что для почти всех $(s, \vec{x}, \vec{y})$, $\vec{x} \neq \vec{y}$, можно найти момент времени τ , $0 < \tau < \infty$, удовлетворяющий условию

$$(47) \quad \varphi_{s,t}^\omega(\vec{x}) = \varphi_{s,t}^\omega(\vec{y})$$

при $t \geq \tau$.

В случае слабо сжимаемого режима, в котором

$$(48) \quad \mathcal{P} \leq \frac{d + \xi - 2}{2\xi},$$

существует такое случайное семейство обобщенных потоков $g_\omega(\vec{x}, t | d\vec{y}, s)$, что для всех пробных функций ψ семейство

$$(49) \quad S_{t,s}^\omega \psi(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} \psi(\vec{y}) g_\omega(\vec{x}, t | d\vec{y}, s)$$

удовлетворяет условию

$$(50) \quad \mathbb{E}(S_{t,s}^{\omega,\kappa}\psi(\vec{x}) - S_{t,s}^\omega\psi(\vec{x}))^2 \rightarrow 0$$

при $\kappa \rightarrow 0$ для любых $(s, t, \vec{x})$, $s < t$, и

$$(51) \quad \mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{R}^d} \eta(\vec{x}) (\psi(\varphi_{t,s}^{\omega,\varepsilon}(\vec{x})) - S_{t,s}^\omega\psi(\vec{x})) d\vec{x}\right)^2 \rightarrow 0$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$ для любых (s, t) , $s < t$, и для любой пробной функции η . Кроме того, $g_\omega(\vec{x}, t | d\vec{y}, s)$ невырождено в том смысле, что

$$(52) \quad S_{t,s}^\omega \psi^2(\vec{x}) - (S_{t,s}^\omega \psi(\vec{x}))^2 > 0 \quad \text{почти всюду.}$$

В промежуточном режиме, в котором

$$(53) \quad \frac{d + \xi - 2}{2\xi} \leq \mathcal{P} \leq \frac{d}{\xi^2},$$

существуют такое случайное семейство отображений $\{\varphi_{t,s}^\omega(\vec{x})\}$ и такое случайное семейство обобщенных потоков $g_\omega(\vec{x}, t | d\vec{y}, s)$, что соотношение

$$(54) \quad \mathbb{E}(S_{t,s}^{\omega,\kappa} \psi(\vec{x}) - S_{s,t}^\omega \psi(\vec{x}))^2 \rightarrow 0$$

выполняется при $\kappa \rightarrow 0$ для всех пробных функций ψ и для любых $(s, t, \vec{x})$, где $s < t$. В ε -пределе, потоки $\varphi_{t,s}^{\omega,\varepsilon}(x)$ сходятся в смысле распределений, т.е. существует такое семейство вероятностных плотностей $\{G_n(x_1, \dots, x_n, t | y_1, \dots, y_n, s) dy_1 \cdots dy_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, что

$$(55) \quad \mathbb{E} \psi(\varphi_{t,s}^{\omega,\varepsilon}(x_1), \dots, \varphi_{t,s}^{\omega,\varepsilon}(x_n)) \rightarrow \int_{\mathbb{R}^d \times \dots \times \mathbb{R}^d} \psi(y_1, \dots, y_n) \times G_n(x_1, \dots, x_n, t | y_1, \dots, y_n, s) dy_1 \cdots dy_n$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$ для любой непрерывной функции ψ с компактным носителем. Кроме того, ε -предел слипается в том смысле, что

$$(56) \quad G_2(x_1, x_2, t | y_1, y_2, s) = \tilde{G}_2(x_1, x_2, t | y_1, y_2, s) + A(y_1, x_1, x_2, t, s) \delta(y_1 - y_2),$$

где $A > 0$ при $t > s$. Здесь $\tilde{G}_2$ — абсолютно непрерывная часть G_2 по отношению к лебеговой мере. Аналогичные утверждения справедливы для других плотностей G_n . В частности, $\{G_n\}$ отличаются от моментов κ -предела g_ω , определенного в (54).

12. Принцип “одна сила — одно решение”

Обратимся к проблеме инвариантной меры для уравнения переноса при подходящей силе. Мы сосредоточимся сначала на невырожденном случае. Этот случай включает слабо сжимаемые режимы и промежуточный режим в κ -пределе. Невырожденность $g_\omega(\vec{x}, t | d\vec{y}, s)$ как вероятностного распределения по $\vec{y}$ вызывает диссипацию энергии или, иначе говоря, разрушение памяти в полугруппе $S_{t,s}^\omega$ порожденной $\{g_\omega\}$. Это — основная причина того, что уравнение переноса имеет единственную инвариантную меру, как мы сейчас объясним.

Рассмотрим (ср. с (29))

$$(57) \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} + (\vec{u}(\vec{x}, t) \cdot \nabla) \theta = b(\vec{x}, t).$$

где внешняя сила b есть белый шум и

$$(58) \quad \mathbb{E} b(\vec{x}, t) b(\vec{y}, s) = B(|\vec{x} - \vec{y}|) \delta(t - s).$$

Функция $B(r)$ предполагается гладкой и быстро стремящейся к нулю при $r > L$; L называется масштабом силы. Решение уравнения (57) при начальных условиях $\theta_\omega(\vec{x}, s) = \theta_0(\vec{x})$ понимается в следующем смысле:

$$(59) \quad \theta_\omega(\vec{x}, t) = S_{t,s} \theta_0(\vec{x}) + \int_s^t S_{t,\tau} b(\vec{x}, \tau) d\tau.$$

Определим вероятностное пространство-произведение $(\Omega_u \times \Omega_b, \mathcal{F}_u \times \mathcal{F}_b, \mathbf{P}_u \times \mathbf{P}_b)$ и оператор сдвига

$$(60) \quad T_\tau \omega(t) = \omega(t + \tau)$$

с $\omega = (\omega_u, \omega_b)$.

ТЕОРЕМА 13 (одна сила – одно решение, I). *Для почти всех ω существует единственное решение уравнения (57), определенное на $\mathbb{R}^d \times (-\infty, \infty)$. Это решение можно представить в виде*

$$(61) \quad \theta_\omega^*(\vec{x}, t) = \int_{-\infty}^t S_{t,s} b(\vec{x}, s) ds.$$

Кроме того, отображение $\omega \rightarrow \theta_\omega^*$ имеет следующее свойство инвариантности:

$$(62) \quad \theta_{T_\tau \omega}^*(\vec{x}, t) = \theta_\omega^*(\vec{x}, t + \tau).$$

Теорема 13 – это “принцип одна сила – одно решение”, сформулированный явным образом в [19]. В связи со свойством инвариантности (62), отображение в (61) приводит к естественной инвариантной мере. Мы получаем следствие:

ТЕОРЕМА 14. *Существует единственная инвариантная мера на $L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^d \times \Omega)$ для динамики, определенной формулой (57).*

Связь между отображением (61) и инвариантной мерой, вместе с единственностью, объяснена в [19].

Приведем схему доказательства теоремы 13. В основном оно сводится к проверке того факта, что диссипация и потеря памяти в системе достаточно сильны в том смысле, что

$$(63) \quad \mathbb{E} \left(\int_{T_1}^{T_2} \int_{\mathbb{R}^d} b(\vec{y}, s) g(\vec{x}, 0 | d\vec{y}, s) ds \right)^2 \rightarrow 0$$

при $T_1, T_2 \rightarrow -\infty$ для фиксированных $\vec{x}$ и t . Среднее в (63) явно выражается формулой

$$(64) \quad \int_{T_1}^{T_2} \int_0^\infty B(r) P(0 | r, s) dr ds.$$

Здесь $P(\rho | r, s)$ определяется для всех пробных функций η формулой

$$(65) \quad \int_0^\infty \eta(r) P(\rho | r, s - t) dr = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \eta(|x - x'|) \mathbb{E}(g_\omega(y, t | x, s) g_\omega(z, t | x', s)) dx dx'$$

в невырожденном случае и формулой

$$(66) \quad \int_0^\infty \eta(r) P(\rho | r, s - t) dr = \mathbb{E} \eta(|\varphi_{t,s}(y) - \varphi_{t,s}(z)|)$$

в случае слипания. Здесь $\rho = |y - z|$ и $s < t$. Функцию $P(\rho | r, s)$ можно понимать как вероятностную плотность для того факта, что две частицы находятся на расстоянии r в момент времени $s < t$, если их конечное расстояние в момент времени t равно ρ . В модели Крайчана P удовлетворяет обратному уравнению

$$(67) \quad -\frac{\partial P}{\partial s} = -\frac{\partial}{\partial r}(b(r)P) + \frac{\partial^2}{\partial r^2}(a(r)P)$$

с конечным условием $\lim_{s \rightarrow 0-} P(\rho | r, s) = \delta(r - \rho)$ и с такими $a(r)$ и $b(r)$, что

$$(68) \quad \begin{aligned} a(r) &= D(\mathcal{J}^2 + \xi \mathcal{C}^2) r^\xi + O(r^2 / \ell_0^2), \\ b(r) &= D((d - 1 + \xi) \mathcal{J}^2 - \xi \mathcal{C}^2) r^{\xi-1} + O(r / \ell_0^2). \end{aligned}$$

При $r \gg \ell_0$ функция $a(r)$ стремится к C_0 , а $b(r)$ — к $C_0(d - 1)/r$, и уравнение в (62) сводится к уравнению диффузии с постоянным коэффициентом. Уравнение в (62) сингулярно при $r = 0$. Сходимость интеграла в (63) зависит от скорости убывания по $|s|$ функции $P(0 | r, s)$. Так как интеграл по r в (64) имеет срезку на масштабе силы L в связи с $B(r)$, то мы можем сосредоточить внимание на поведении $P(0 | r, s)$ при $r < L$. Из уравнения (62) вытекает, что для не слишком больших r величину P можно приблизить следующим образом:

$$(69) \quad P = C(s) r^{d-1} + o(r^{d-1}),$$

где $C(s)$ еще подлежит определению. Область значений r , для которых справедливо приближение в (69), увеличивается вместе с $|s|$. Для достаточно больших $|s|$ большая часть массы $P(0 | r, s)$ находится в области $r \gg \ell_0$, где P удовлетворяет уравнению диффузии с постоянным коэффициентом диффузии C_0 , точное решение которой известно. Стандартные рассуждения о согласовании между этим решением и приближением в (69) могут быть использованы для оценки $C(s)$. Отсюда следует формула

$$(70) \quad P(0 | r, s) = \frac{C r^{d-1}}{|s|^{d/2}} + o(r^{d-1}).$$

Применение формулы (70) дает следующую оценку главного члена для среднего в (63):

$$(71) \quad C \int_0^\infty B(r) r^{d-1} dr \int_{T_1}^{T_2} |s|^{-d/2} ds.$$

Интеграл по s в этом выражении стремится к нулю при $T_1, T_2 \rightarrow -\infty$, если $d > 2$. Отсюда следует, что инвариантная мера в (61) существует, если $d > 2$. Ограничение по размерности можно ослабить, сосредоточивая внимание на силах, удовлетворяющих условию $\int_0^\infty B(r)r^{d-1}dr = 0$, что можно легко показать, вычисляя следующее по порядку величины слагаемое в выражении (70).

Рассмотрим теперь случай слипания, т.е. сильно сжимаемый режим и промежуточный режим в ε -пределе. Так как в этом случае нет никакой аномальной диссипации, то нет никакой инвариантной меры для поля температур, подобной мере в (61). Однако, имеет смысл вопрос, есть ли инвариантная мера для разности температур. Таким образом, рассмотрим

$$(72) \quad \delta\theta_\omega^*(\vec{x}, \vec{y}, t) = \int_{-\infty}^t S_{t,s}(b(\vec{x}, s) - b(\vec{y}, s)) ds.$$

Если θ_ω^* существует, то $\delta\theta_\omega^*(\vec{x}, \vec{y}, t) = \theta_\omega^*(\vec{x}, t) - \theta_\omega^*(\vec{y}, t)$, но может случиться, что $\delta\theta_\omega^*$ существует в случае слипания, даже хотя θ_ω^* и не определен. Причина в том, что из слипания в обобщенном потоке следует, что поле температур уплощается со временем, что является диссипационным механизмом по отношению к разности температур. Конечно, этот эффект должен преодолевать флуктуации, вызываемые внешней силой, и существование инвариантной меры, подобной (72), зависит от того, насколько часто частицы слипаются под действием потока.

Здесь возникает трудность. Если мы должны рассматривать две частицы на расстоянии, значительно превосходящем корреляционную длину ℓ_0 , то динамика расстояния между этими частицами в потоке управляется уравнением (62) с $\eta \approx C_0$, т.е. уравнением диффузии с постоянным коэффициентом диффузии на интересующем нас масштабе. Отсюда следует, что не наблюдается никакой тенденции к слипанию, пока расстояние не станет меньше чем ℓ_0 , что, как показано ниже, происходит недостаточно часто, чтобы преодолеть флуктуации, вызываемые внешней силой. Другими словами,

ЛЕММА 5. *В случае слипания, при конечном ℓ_0 , инвариантной меры с конечной энергией для разности температур нет.*

Следующий по порядку очевидный вопрос: что происходит, если допустить, что $\ell_0 \rightarrow \infty$? Однако этот вопрос нужно рассматривать очень аккуратно, поскольку поле скоростей с ковариацией в (37) расходится при $\ell_0 \rightarrow \infty$. Правильный путь продолжать рассуждение состоит во введении альтернативной скорости $\vec{v}$, которая предполагается гауссовой, белым шумом по времени, но *неоднородной*, с ковариацией

$$(73) \quad Ev_\alpha(\vec{x}, t)v_\beta(\vec{y}, s) = (c_{\alpha\beta}(\vec{x}) + c_{\alpha\beta}(\vec{y}) - c_{\alpha\beta}(\vec{x} - \vec{y}))\delta(t - s).$$

Для конечного ℓ_0 имеем $\vec{v}(\vec{x}, t) = \vec{u}(\vec{x}, t) - \vec{u}(\vec{a}, t)$, где $\vec{a}$ произволен, но фиксирован. Однако $\vec{v}$ имеет смысл в пределе при $\ell_0 \rightarrow \infty$. Через $\vartheta_\omega(\vec{x}, t)$ обозначим поле температур, получаемое адвекцией из $\vec{v}$, т.е. решение уравнения переноса (57) с $\vec{u}$, замененным на $\vec{v}$. Если мы ограничимся нулевым начальным условием, то из однородности внешней силы следует, что моменты с одним временем для θ_ω и ϑ_ω совпадают при конечных ℓ_0 , но, в отличие от θ_ω , ϑ_ω имеет смысл при $\ell_0 \rightarrow \infty$. Таким образом, ϑ_ω — естественный процесс для изучения предела при $\ell_0 \rightarrow \infty$, и, начиная отсюда, мы сосредоточим

на нем свое внимание. Пусть $\delta\vartheta_\omega(\vec{x}, \vec{y}, t) = \vartheta_\omega(\vec{x}, t) - \vartheta_\omega(\vec{y}, t)$. Разность температур $\delta\vartheta_\omega$ удовлетворяет уравнению переноса

$$(74) \quad \frac{\partial \delta\vartheta}{\partial t} + (\vec{v}(\vec{x}, t) \cdot \nabla_x + \vec{v}(\vec{y}, t) \cdot \nabla_y) \delta\vartheta = b(\vec{x}, t) - b(\vec{y}, t).$$

Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 15 (одна сила – одно решение, II). *Для почти всех ω в сильно и слабо сжимаемых режимах, а также и в промежуточном режиме для невырожденного потока существует единственное решение уравнения (74), определенное на $\mathbb{R}^d \times (-\infty, \infty)$. Это решение допускает представление в виде*

$$(75) \quad \delta\vartheta_\omega^*(\vec{x}, \vec{y}, t) = \int_{-\infty}^t S_{t,s}(b(\vec{x}, s) - b(\vec{y}, s)) ds.$$

Далее, отображение $\omega \rightarrow \delta\vartheta_\omega^*$ имеет следующее свойство инвариантности:

$$(76) \quad \delta\vartheta_{T_\tau\omega}^*(\vec{x}, \vec{y}, t) = \delta\vartheta_\omega^*(\vec{x}, \vec{y}, t + \tau).$$

Напротив, в промежуточном режиме, если поток слипается (ε -предел), то решения с конечной ковариацией, подобного (75), нет.

Вот непосредственное следствие этой теоремы.

ТЕОРЕМА 16. *В сильно и слабо сжимаемых режимах, а также в промежуточном режиме для невырожденного потока существует единственная инвариантная мера на $L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^d \times \Omega)$ для динамики, определенной формулой (74). В промежуточном режиме для случая, когда обобщенный поток слипается, инвариантной меры для уравнения (74) с конечной энергией нет.*

В режимах, для которых обобщенный поток невырожден, теорема 15 следует из теоремы 13. В случаях слипания можно действовать, как в доказательстве теоремы 13, и изучать сходимость при $T_1, T_2 \rightarrow -\infty$ величины

$$(77) \quad \mathbb{E} \left(\int_{T_1}^{T_2} (b(\varphi_{t,s}^\omega(\vec{x}, s)) - b(\varphi_{t,s}^\omega(\vec{y}, s))) ds \right)^2.$$

Среднее в (63) может быть явно задано формулой

$$(78) \quad 2 \int_{T_1}^{T_2} \int_0^\infty (B(0) - B(\rho)) P(r | \rho, s) dr ds,$$

где $r = |\vec{x} - \vec{y}|$, а P удовлетворяет соотношению (62) с $\ell_0 = \infty$. Так как в случае слипания $r = 0$ является границей выхода, то P теряет массу при $r = 0+$. Сходимость временного интеграла в (78) зависит от скорости, с которой убывает масса (т.е. от скорости, с которой частицы слипаются). Анализ уравнения (62) показывает, что процесс достаточно быстрый для того, чтобы интеграл по s в (78) стремился к нулю при $T_1, T_2 \rightarrow -\infty$ в сильно сжимаемом режиме. Наоборот, интеграл расходится в слабо сжимаемом режиме в случае слипания.

Благодарности. Мы благодарим наших коллег М. Авелланеда, К. Ханина, Дж. Маттингли, А. Мазеля и И. Ванден Эйндена за их вклад в работу, обзор которой здесь приведен. Мы благодарим У. Фриша и Г. Молчана за предложения по улучшению первого варианта этой статьи. Первый автор частично поддержан президентской стипендией для преподавателей из Национального научного фонда (NSF). Второй автор частично поддержан NSF (грант DMS-97067994) и Российским фондом фундаментальных исследований (грант 99-01-00314).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Aubry S. The twist map, the extended Frenkel–Kontorova model and the devil’s staircase // *Phys. D*. 1983. V. 7. №1–3. P. 240–258.
- [2] Avellaneda M. Statistical properties of shocks in Burgers turbulence. II: Tail probabilities for velocities, shock-strengths and rarefaction intervals // *Comm. Math. Phys.* 1995. V. 169. №1. P. 45–59.
- [3] Avellaneda M., E W. Statistical properties of shocks in Burgers turbulence // *Comm. Math. Phys.* 1995. V. 122. №1. P. 13–38.
- [4] Avellaneda M., Ryan R., E W. PDFs for velocity and velocity gradients in Burgers turbulence // *Phys. Fluids*. 1994. V. 7. №12. P. 3067–3071.
- [5] Baxendale P. H. Statistical Equilibrium and two-point motion for a stochastic flow of diffeomorphisms spatial stochastic processes // *Progr. Probab.* 1991. V. 19. P. 189–218.
- [6] Bec J., Frisch U., Khanin K. Kicked Burgers turbulence // *chao-dyn/9910001*; *J. Fluid Mech.* (submitted).
- [7] Bertoin J. The inviscid Burgers equation with Brownian initial velocity // *Comm. Math. Phys.* 1998. V. 193. №2. P. 397–406.
- [8] Burgers J. M. The Nonlinear Diffusion Equation. Dordrecht: Reidel, 1974.
- [9] Chekhlov A., Yakhot V. Algebraic tails of probability density functions in the random-force-driven Burgers turbulence // *Phys. Rev. Lett.* 1996. V. 77. P. 3118–3121.
- [10] Chertkov M., Falkovich G., Kolokolov I., Lebedev V. Normal and anomalous scaling of the fourth-order correlation function of a randomly advected passive scalar // *Phys. Rev. E*. 1995. V. 52. №5. P. 4924–4941.
- [11] Cole J. On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics // *Quart. Appl. Math.* 1951. V. 9. P. 225–236.
- [12] Constantin P., Foias C. Navier–Stokes Equations. Chicago: Univ. of Chicago Press, 1988.
- [13] Da Prato G., Zabczyk J. Ergodicity for Infinite-Dimensional Systems. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996.
- [14] E W., Vanden Eijnden E. Asymptotic theory for the probability density functions in Burgers turbulence // *Phys. Rev. Lett.* 1999. V. 83. P. 2572–2575.
- [15] E W. and Vanden Eijnden E. Statistical theory of the stochastic Burgers equation in the inviscid limit // *Comm. Pure Appl. Math.* (to appear).
- [16] E W., Vanden Eijnden E. Generalized flows, intrinsic stochasticity and turbulent transport // *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* (submitted).
- [17] E W., Rykov Y., Sinai Ya. Generalized variational principles, global weak solutions and behaviour with random initial data for systems of conservation laws arising in adhesion particle dynamics // *Comm. Math. Phys.* 1996. V. 177. №2. P. 349–380.
- [18] E W., Khanin K., Mazel A., Sinai Ya. Probability distribution function for the random forced Burgers equation // *Phys. Rev. Lett.* 1997. V. 78. P. 1904–1907.
- [19] E W., Khanin K., Mazel A., Sinai Ya. Invariant measure for Burgers equation with random forcing // *Ann. of Math.* (to appear).
- [20] Fan H. Elementary waves of Burgers equation under white noise perturbation // Preprint.
- [21] Flandoli F., Maslowski B. Ergodicity of the 2D Navier–Stokes equation under random perturbation // *Comm. Math. Phys.* 1995. V. 171. №2. P. 119–141.
- [22] Foias C., Temam R. Gevrey class regularity for the solutions of the Navier–Stokes equations // *J. Funct. Anal.* 1989. V. 87. №2. P. 359–369.
- [23] Frachebourg L., Martin Ph. Exact statistical properties of the Burgers equation // *cond-mat/9905056*.
- [24] Frisch U., Bec J., Villone B. Singularities and the distribution of density in the Burgers adhesion model // Preprint, 1999; *Phys. D* (submitted).
- [25] Fursikov A. V., Vishik M. J. Mathematical Problems of Statistical Hydromechanics. Dordrecht: Kluwer Acad. Publishers, 1988.
- [26] Gawędzki K., Kupiainen A. Anomalous scaling of a passive scalar // *Phys. Rev. Lett.* 1995. V. 75. P. 3834–3837.
- [27] Gawędzki K., Vergassola M. *cond-mat/9811399*.

- [28] Groenboom P. The concave majorant of Brownian motion // *Ann. Probab.* 1983. V. 11. №4. P. 1016–1027.
- [29] Gurbatov S., Malakhov A., Saichev A. *Nonlinear Random Waves and Turbulence in Nondispersive Media: Waves, Rays and Particles.* Manchester: Manchester Univ. Press, 1991.
- [30] Handa K. A remark on shocks in inviscid Burgers turbulence // *Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.* 1993. V. 11. P. 339–345.
- [31] Hopf E. The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$ // *Comm. Pure Appl. Math.* 1950. V. 3. P. 201–230.
- [32] Hopf E. Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen // *Math. Nachr.* 1951. V. 4. P. 213–231.
- [33] Iozaki Y., Watanabe S. An asymptotic formula for the Kolmogorov diffusion and a refinement of Sinai's estimates for the integral of Brownian motion // *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* 1994. V. 70. №9. P. 271–276.
- [34] Janicki A., Wołczyński W. Hausdorff dimension of regular points in stochastic Burgers flows with Levy α -stable initial data // *J. Statist. Phys.* 1997. V. 86. P. 277–299.
- [35] Kato T. Nonstationary flows of viscous and ideal fluids in R^3 // *J. Funct. Anal.* 1972. V. 9. P. 296–305.
- [36] Kida S. Asymptotic properties of Burgers turbulence // *J. Fluid Mech.* 1979. V. 93. P. 337–377.
- [37] Kraichnan R. H. Small-scale structure of a scalar field convected by turbulence // *Phys. Fluids.* 1968. V. 11. P. 945–953.
- [38] Kuksin S., Shirikyan A. Stochastic dissipative PDEs and Gibbs measures // *Comm. Math. Phys.* (submitted).
- [39] Kunita H. *Stochastic Differential Equations.* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990.
- [40] Lachal A. Quelques applications de la théorie des excursions à l'intégrale du mouvement brownien // *Lecture Notes in Math.* (to appear).
- [41] Ladyženskaya O. A. *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow.* New York: Gordon and Breach, 1969.
- [42] Lax P. D. Hyperbolic systems of conservation laws, II // *Comm. Pure Appl. Math.* 1957. V. 10. P. 537–556.
- [43] Leadbetter M., Lindgren G., Rootzen H. *Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes.* Berlin: Springer-Verlag, 1983.
- [44] Leray J. Essai sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace // *Acta Math.* 1934. V. 63. P. 193–248.
- [45] Majda A. Lectures on hydrodynamics (unpublished). Princeton University.
- [46] Majda A. J. // *J. Stat. Phys.* 1993. V. 73. P. 515–542.
- [47] Martin Ph., Piasecki J. Aggregation dynamics in a self-gravitating one-dimensional gas // *J. Statist. Phys.* 1996. V. 84. №3/4. P. 837–857.
- [48] Mather J. Existence of quasi-periodic orbits for twist homeomorphisms of the annulus // *Topology.* 1982. V. 21. №4. P. 457–567.
- [49] Mattingly J. Ergodicity of 2D Navier–Stokes equations with random forcing and large viscosity // *Comm. Math. Phys.* 1999. V. 206. №2. P. 273–288.
- [50] Mattingly J., Sinai Ya. An elementary proof of the existence and uniqueness theorem for the Navier–Stokes equations // *Contem. Math.* 1999. V. 1. №4. P. 497–516.
- [51] Molchan G. Burgers equation with self-similar Gaussian initial data: Tail probabilities // *J. Statist. Phys.* 1997. V. 88. №5/6. P. 1139–1150.
- [52] Oleinik O. Discontinuous solutions of nonlinear differential equations // *Uspekhi Math. Nauk.* 1957. V. 12. P. 3–73.
- [53] Pitman J. M. Remarks on the convex minorant of Brownian motion // *Progr. Probab. Statist.* 1982. V. 5. P. 219–227.
- [54] Polyakov A. M. Turbulence without pressure // *Phys. Rev. E.* 1995. V. 52. P. 6183–6188.
- [55] Ryan R. Large deviation analysis of Burgers turbulence with white-noise initial data // *Comm. Pure Appl. Math.* 1998. V. 51. №1. P. 47–75.
- [56] She Z.-S., Aurell E., Frisch U. The inviscid Burgers equation with initial data of Brownian type // *Comm. Math. Phys.* 1992. V. 148. P. 623–641.

- [57] Shraiman B., Siggia E. // Phys. Rev. E. 1994. V. 49. P. 2912–2927.
- [58] Sinai Ya. Statistics of shocks in solutions of inviscid Burgers equation // Comm. Math. Phys. 1992. V. 148. P. 601–621.
- [59] Sinai Ya. Distribution of some functionals of the integral of the Brownian motion // Theoret. and Math. Phys. 1992. V. 90. №3. P. 323–353.
- [60] Sinai Ya. Two results concerning asymptotic behaviour of solutions of the Burgers equation with force // J. Statist. Phys. 1992. V. 64. P. 1–12.
- [61] Sinai Ya. Navier–Stokes systems with periodic boundary conditions // Regular and Chaotic Dynamics. 1999. V. 4. №2. P. 3–15.
- [62] Sinai Ya. Topics in Ergodic Theory. Princeton: Princeton Univ. Press, 1994.
- [63] Smoller J. Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations. Berlin: Springer-Verlag, 1994.
- [64] Temam R. Some developments on equations in the second half of the 20th century // Développement des Mathématiques au cours de la seconde moitié du XX-ième siècle (to appear).
- [65] Vergassola M., Dubrulle B., Frisch U., Noullez A. Burgers equation, devil's staircase and the mass distribution function for large-scale structures // Astronom. and Astrophys. 1994. V. 289. P. 325–356.
- [66] Vol'pert A. The space BV and quasilinear equations // Math. USSR Sb. 1967. V. 2. P. 225–267.
- [67] Wehr J., Xin J. White noise perturbation of the viscous shock fronts of the Burgers equation // Comm. Math. Phys. 1996. V. 181. P. 183–203.
- [68] Woyczynski W. Burgers-KPZ Turbulence // Lecture Notes in Math. 1998. V. 1700.
- [69] Yudovich V. Mathematical questions of the theory of stability of flows of a fluid // Thesis. Moscow: Institute of Problems of Mechanics, 1972.
- [70] Zeldovitch Ya. B. Gravitational instability: An approximate theory for large density perturbations // Astronom. and Astrophys. 1970. V. 5. P. 84–89.

Принстонский университет,

Институт математических наук им. Куранта Нью-Йоркского университета;

Принстонский университет,

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау

Поступила в редакцию

03.04.2000