Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Дегтярев, В. М. Харламов, Топологические свойства вещественных алгебраических многообразий: du côté de chez Rokhlin, *УМН*, 2000, том 55, выпуск 4, 129–212

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm315>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 18:03:10

УДК 515.165.4

Посвящается Владимиру Абрамовичу Рохлину

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ВЕЩЕСТВЕННЫХ
АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ:
DU CÔTÉ DE CHEZ ROKHLIN

А. И. Дегтярев, В. М. Харламов

Contes de la Vieille Grand' Mère

Иные воспоминания наполовину стерлись
в ее памяти, другие не сотрутся никогда.

С. С. ПРОКОФЬЕВ. Соч. 31 (1918)

Предлагаемый обзор охватывает результаты, достигнутые в топологии вещественных алгебраических многообразий в направлении исследований, развернутых в начале 70-х годов В. И. Арнольдом и В. А. Рохлиным. Мы сделали попытку систематизировать основные достижения в этой области. Представив общие технические средства и результаты, мы уделяем особое внимание поверхностям и кривым на поверхностях.

Библиография: 131 название.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	130
2. Технические средства и общие результаты	136
3. Поверхности	150
4. Кривые на поверхностях	169
Приложение А. Топология инволюций	195
Приложение В. Целочисленные решетки и квадратичные формы	203
Приложение С. Форма Рохлина–Гийю–Марена	206
Список литературы	207

1. Введение

Поворотный этап. Интерес, проявленный Владимиром Абрамовичем Рохлиным к топологии вещественных алгебраических многообразий, был в значительной степени обусловлен результатами, полученными в конце 60-х гг. Д. А. Гудковым [45], и последовавшей за ними работой В. И. Арнольда [4], которые внесли значительный вклад в решение 16-й проблемы Гильберта. Гудков опроверг одну из гипотез Гильберта о расположении овалов — двусторонних компонент — плоских M -секстик (т.е. секстик с максимальным числом овалов). Он исправил гипотезу, доказал ее для степени 6 и предложил в [40] распространение своего результата на M -кривые любой четной степени в качестве новой гипотезы. (Напомним, что M -кривая рода g — это кривая с максимальным числом связных компонент своей вещественной части; согласно неравенству Харнака это максимальное число есть $M = g + 1$.)

Чтобы сформулировать гипотезу Гудкова, напомним, что овал плоской кривой называется *четным* (*нечетным*), если он лежит внутри четного (соответственно нечетного) числа других овалов. Число четных (нечетных) овалов обозначается через p (соответственно через n). В этих обозначениях гипотеза Гудкова утверждает, что $p - n = k^2 \bmod 8$ для любой M -кривой степени $2k$.

В замечательной работе В. И. Арнольда [4] была найдена связь вещественных плоских кривых с топологией четырехмерных многообразий и арифметикой целочисленных квадратичных форм и, среди других результатов, доказана ослабленная гипотеза Гудкова ($p - n = k^2 \bmod 4$). События после этого стали быстро развиваться. Во-первых, Рохлин предложил доказательство гипотезы Гудкова, основанное на своей формуле, связывающей сигнатуру четырехмерного многообразия с Arf -инвариантом характеристической поверхности (см. приложение С). Затем после того, как В. М. Харламов [55] обобщил результат Арнольда на случай поверхностей, Рохлин [100] нашел другое доказательство, не использующее никакой специфики четырехмерной топологии, и распространил этот результат на многообразия любой размерности. На этом этап революционных достижений, начатый Арнольдом, был завершен, и началось систематическое изучение предмета. (Другие детали и краткий обзор дальнейшей истории вопроса имеются в [41], [126] и [6].)

Наследие Рохлина. Рохлин опубликовал шесть работ по топологии вещественных алгебраических многообразий (см. [97]–[102]). Это число невелико, но каждая из этих работ дала начало целому новому направлению в этой области. (Единственным исключением, возможно, является короткая заметка [101], которая распространяет ряд приложений некоторых предыдущих результатов с полных пересечений на произвольные вещественные алгебраические многообразия.) В этом обзоре мы более или менее подробно обсуждаем все эти работы, кроме [102], в которой для изучения алгебраических кривых используются неалгебраические накрытия; другие примеры такого использования см. в [35].

Первая работа Рохлина [97] содержит ошибку в доказательстве гипотезы Гудкова. Однако предложенный подход, а именно, использование характеристических поверхностей в четырехмерном многообразии для вычисления его сигнатуры $\bmod 16$, стал

Заглавие имитирует трудно переводимое название романа Марселя Пруста, ср. “По направлению к Свану” и “Swan’s way”. (См. также аналогичную игру слов в кн. *В поисках утраченной топологии*. Под ред. Л. Гийу и А. Марена. М.: Мир, 1989.)

мощным методом изучения вещественных алгебраических кривых. Он был использован Мареном, который вместе с Гийю (см. [46]) распространил сигнатурную формулу Рохлина на неориентируемые характеристические поверхности и тем самым исправил указанную ошибку. (Формула Рохлина–Гийю–Марена и связанная с ней квадратичная форма рассматриваются в приложении С.)

Другим фундаментальным результатом, который трудно переоценить, является формула Рохлина для комплексных ориентаций. Понятие комплексной ориентации разбивающей вещественной кривой (см. ниже), как, впрочем, и сама формула Рохлина и ее доказательство, представляются невероятно прозрачными. Однако эта формула устанавливает, например, справедливость двух гипотез Гильберта об 11 овалах плоских секстиков, которые сам Гильберт пытался доказать чрезвычайно сложным путем и включил их в свой знаменитый список проблем (в качестве 16-й проблемы). В настоящее время формула Рохлина является главным средством в изучении топологии вещественных кривых на поверхностях. Она относится к тем немногим свойствам кривых, которые до сих пор не имеют удовлетворительного обобщения на многообразия старших размерностей. (Фактически, даже для кривых на поверхностях некоторые фундаментальные вопросы до сих пор не вполне выяснены, ср. 4.2.)

Стоит упомянуть, что первым начал изучать разбивающие кривые Ф. Клейн. Он открыл некоторые их замечательные свойства и указал, как в случае таких кривых можно улучшить и обобщить неравенство Харнака для числа компонент связности кривой. Однако он не заметил комплексных ориентаций.

Формула Рохлина для комплексных ориентаций и 16-я проблема Гильберта. Неприводимая над $\mathbb{R}$ неособая вещественная кривая A (т.е. либо неприводимая неособая комплексная кривая с антиголоморфной инволюцией $\text{conj}: A \rightarrow A$, либо неособая комплексная кривая, состоящая из двух неприводимых компонент, переставляемых антиголоморфной инволюцией) называется *разбивающей* или *кривой типа I*, если ее вещественная часть $\mathbb{R}A = \text{Fix conj}$ разбивает A на две половины – две связные поверхности A_+ и A_- с общим краем $\mathbb{R}A$. (Заметим, что если кривая неприводима над $\mathbb{R}$, но приводима над $\mathbb{C}$, то она разбивающая.) Комплексное сопряжение $\text{conj}: A \rightarrow A$ переставляет поверхности $A_{\pm}$, стандартные ориентации которых индуцируют две противоположные ориентации на $\mathbb{R}A$, называемые *комплексными ориентациями*. Приводимая или особая кривая называется разбивающей, если нормализация каждой неприводимой над $\mathbb{R}$ компоненты этой кривой принадлежит типу I. Ясно, что кривая A является разбивающей тогда и только тогда, когда фактор-пространство A/conj есть ориентируемая поверхность, и если это условие выполнено, комплексные ориентации индуцируются ориентацией края поверхности A/conj . Основным примером служат M -кривые, которые все являются разбивающими.

Пусть A – неособая разбивающая плоская кривая. Говорят, что два ее овала образуют *инъективную пару*, если они ограничивают кольцо в $\mathbb{RP}^2$. Инъективная пара называется *положительной*, если комплексные ориентации овалов индуцируются некоторой ориентацией кольца, и *отрицательной* в противном случае. Обозначим через Π^+ и Π^- числа положительных и соответственно отрицательных инъективных пар и положим $\Pi = \Pi^+ + \Pi^-$.

1.1. ФОРМУЛА РОХЛИНА. *Для неособой разбивающей плоской кривой четной степени $2k$ с l вещественными компонентами справедливо равенство $2(\Pi^+ - \Pi^-) = l - k^2$.*

Формула Рохлина имеет многочисленные применения. Например, ее непосредственными следствиями являются сравнения Арнольда и Слепяна: для разбивающей кривой степени $2k$ согласно Арнольду $p - n = k^2 \bmod 4$, а если непосредственно внутри каждого нечетного овала лежит нечетное число четных овалов (т.е. компонента дополнения кривой, ограниченная снаружи этим нечетным овалом, имеет четную Эйлерову характеристику), то согласно Слепяну $p - n = k^2 \bmod 8$. Другим следствием формулы Рохлина является то, что $\Pi \geq |l - k^2|$ и $l \geq k$ для любой разбивающей кривой степени $2k$. Последнее неравенство вместе со сравнением Клейна $l = k \bmod 2$, которое также следует из формулы Рохлина, дает полный набор ограничений на число компонент неособой разбивающей плоской кривой степени $2k$; для кривых степени $2k - 1$ из соответствующего варианта формулы Рохлина (формулы Рохлина–Мишачева, см., например, [99]) следует неравенство $l \geq k$ и аналог предыдущего утверждения.¹

Для заданной разбивающей кривой A ее *вещественная схема* (т.е. топологический тип пары $(\mathbb{RP}^2, \mathbb{R}A)$) и комплексная ориентация определяют $A \cup \mathbb{RP}^2$ с точностью до гомеоморфизма. (Если кривая не разбивающая, $A \cup \mathbb{RP}^2$ определяется вещественной схемой кривой A .) Одна из связанных с этим проблем, предложенная Рохлиным, состоит в изучении комплексных ориентаций, возникающих на кривых данной степени; она занимает промежуточное положение между более тонким вопросом об эквивариантной топологии пары $(\mathbb{P}^2, A)$ и более грубым – о топологии пары $(\mathbb{RP}^2, \mathbb{R}A)$ (исходной формулировкой 16-й проблемы Гильберта). Стоит отметить и две другие связанные с этим проблемы: изучение фундаментальной группы $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus (\mathbb{RP}^2 \cup \mathbb{R}A))$ и изучение топологии пространства $(\mathbb{RP}^2 \cup A) \subset \mathbb{P}^2 / \text{con}j = S^2$.

Школа Рохлина. Влияние Рохлина на топологию вещественных алгебраических многообразий было гораздо шире его собственных результатов. В этой области он руководил работой нескольких своих учеников (Виро, Звонилова, Мишачева, Слепяна, Фидлера, Финашина, Харламова, Чепонкуса) и щедро делился своими идеями и обширными знаниями. К сожалению, Владимир Абрамович не смог осуществить все свои планы: безвременная кончина прервала его работу над целым рядом проектов.

Еще в середине 70-х гг. у Рохлина была идея написать два подробных обзора результатов, полученных к тому времени: один – по вещественным плоским кривым, другой – по многообразиям старших размерностей. В самом начале к этой работе был привлечен В. М. Харламов, а позже – О. Я. Виро. Были разработаны детальные планы, Рохлин написал краткий конспект первых глав книги о плоских кривых, а Харламов – первых глав второй книги. Рохлин планировал прочитать соответствующие лекционные курсы в Ленинградском государственном университете; к сожалению, он был вынужден уйти на пенсию, и курс о плоских кривых был впервые прочитан Виро (в сокращенном варианте), а затем Виро и Харламовым. Виро и Харламов продолжили работу над первым проектом после кончины Рохлина. Несколько раз работа прерывалась по различным политическим и географическим причинам. Однако черновик книги был написан и значительная его часть была отредактирована. Несколько

¹Как мы узнали от А. Габара (A. Gabard), вопрос о числе компонент разбивающей кривой данной степени был впервые поставлен Ф. Клейном.

студентов использовали предварительный вариант книги в качестве введения в предмет. К сожалению, эта книга, скорее всего, никогда не появится (отчасти потому, что развитие этой области происходит быстрее написания текста). Введение в обзор Виро [117] может дать представление о первых главах книги. (Обзор Виро, посвященный, в основном, другим вопросам в этой области – вопросам построения, шире охватывает основные понятия и результаты, в то время как книга содержит тонкости, уместные лишь в учебном тексте.) Настоящий обзор отражает идеи второго проекта; изначально он возник как приложение к книге о кривых (что, естественно, также оказало влияние на его содержание: значительная часть утверждений в 4.6 и 4.7 является непосредственным обобщением соответствующих результатов для кривых, имеющих в книге).

Что есть и чего нет в обзоре. Мы не пытаемся полностью охватить все известные результаты в топологии вещественных алгебраических многообразий: предмет настолько развит и разнообразен, что, по-видимому, невозможно изложить его в пределах разумного объема. Вместо этого мы стараемся отобрать результаты, теснее связанные с тем, что открыл и изучил в этой области Рохлин и его последователи (конечно, даже этот выбор не является исчерпывающим и, в основном, определяется нашим личным вкусом), и показать, что могут дать предложенные подходы и как работает развитая техника. Большинство доказательств либо опущены, либо лишь намечены. Ссылки также неполны; во многих случаях мы ссылаемся на те работы и учебники, в которых лучше изложены соответствующие идеи и доказательства, а не на оригинальные работы.

Исторически, в топологии вещественных алгебраических многообразий особое внимание уделялось случаю плоских кривых; мы адресуем читателя к прекрасным обзорам [41], [126], [117] и сосредотачиваемся на результатах для старших размерностей. Однако в конце мы возвращаемся к поверхностям и кривым на поверхностях и обсуждаем некоторые последние достижения, особенно те, которые связаны с комплексными ориентациями. (Заметим, что топологические свойства абстрактных, не вложенных вещественных кривых просты и были известны еще во времена Ф. Клейна, см., например, [99], [87].) Отдельная тема – трехмерные вещественные многообразия. Долгое время они оставались за рамками предмета; недавно благодаря Я. Коллару положение начало меняться, и в настоящее время трехмерные многообразия заслуживают отдельного разговора.

Большинство известных результатов для плоских кривых следует из соответствующих результатов для некоторых вспомогательных поверхностей; более того, во многих случаях общие формулировки для старших размерностей более удобны, так как дают лучшее понимание связи между топологией вещественной части многообразия и его комплексификацией. Однако имеется несколько исключений, которые до сих пор не распространены на старшие размерности; наиболее замечательными из них являются вышеупомянутая формула Рохлина для комплексных ориентаций и, среди недавних достижений, результаты С. Ю. Оревкова, основанные на систематическом изучении пучков прямых. (Результаты Оревкова, за исключением его формулы комплексных ориентаций 4.5.1, относятся к кривым малых степеней; их общее понимание и связь с другими подходами до сих пор не вполне выяснены даже для плоских кривых.)

Топология вещественных алгебраических многообразий имеет два направления развития: запреты и построения. В настоящей работе мы полностью игнорируем

последнее направление (обзор его методов и результатов см., например, в [117], [52], [96]) и сосредоточиваемся на результатах, относящихся к запретам, т.е. ограничениям на топологию множества вещественных точек вещественного алгебраического многообразия, накладываемым топологией множества его комплексных точек. Последняя обычно считается известной; типичный пример — изучение алгебраических многообразий в заданном комплексном деформационном семействе.

Перечислим несколько других связанных с этой областью важных тем, развивающихся в настоящее время, но не затрагиваемых в обзоре: специальные многочлены, малочлены, сложность вычислений, особенности и особые многообразия, аппроксимации, метрические свойства, принцип Акса, торические многообразия, алгебраические циклы, пространства модулей, минимальные модели, связи с симплектической геометрией.

Хотя наш основной предмет исследования — вещественные алгебраические многообразия, многие результаты справедливы для более широких категорий объектов. В частности, вместо алгебраического многообразия, определенного над $\mathbb{R}$, мы часто рассматриваем замкнутое комплексно-аналитическое многообразие с действующей на нем антиголоморфной инволюцией. Во многих случаях комплексная структура может быть заменена не обязательно интегрируемой почти комплексной. (Наиболее интригующее исключение — обобщенное неравенство Комессатти–Петровского–Олейник 2.4.1, которое имеет топологическое доказательство для поверхностей, в то время как известное доказательство для многообразий старших размерностей использует интегрируемость комплексной структуры и, более того, кэлеровость.) Более того, многие запреты являются по своей природе топологическими и, следовательно, справедливы для произвольных гладких многообразий с инволюцией; иногда приходится дополнительно предполагать, что множество неподвижных точек инволюции локально устроено как множество вещественных точек вещественного алгебраического многообразия, т.е. его кокасательное и нормальное расслоения антиизоморфны. Указанные явления не очень удивляют, если учесть современные взаимосвязи между дифференциальной и алгебраической геометриями. Кроме того, можно обратить внимание на единство комплексной и вещественной алгебраических геометрий, основанное, например, на соответствии $X \mapsto X \times \overline{X}$ (где $\overline{X}$ — многообразие с комплексно сопряженной структурой) или $X \mapsto X \sqcup \overline{X}$; в последнем случае существует биекция между вещественными структурами $f: X \rightarrow \overline{X}$ и инволютивными автоморфизмами многообразия $X \sqcup \overline{X}$, имеющими вид $f \sqcup \bar{f}$.

Обозначения. *Вещественная структура* на комплексно-аналитическом многообразии X есть антиголоморфная инволюция. (В случае алгебраических многообразий, определенных над $\mathbb{R}$, это инволюция Галуа.) Обычно мы обозначаем ее через $\text{conj}: X \rightarrow X$. Множество неподвижных точек вещественной структуры называется *вещественной частью* многообразия и обозначается через $\mathbb{R}X$. Фактор-пространство X/conj обычно обозначается через X' .

Как было упомянуто выше, многие результаты имеют топологическую природу и потому справедливы для более широких классов многообразий. Несмотря на то, что довольно трудно соединить все необходимые условия в одну формулировку, в большинстве случаев следующее определение очень удобно: *гибким вещественным многообразием* называется замкнутое гладкое многообразие X вместе с гладкой инволюцией $\text{conj}: X \rightarrow X$ и (не обязательно интегрируемой) почти комплексной струк-

турой J в окрестности *вещественной части* $\text{Fix } \text{conj}$ такими, что инволюция conj антиголоморфна относительно J . (В случае, если речь идет о применениях теоремы Безу, полезно добавить симплектическую структуру, согласованную с conj и J .)

Замкнутое комплексное (не обязательно неприводимое или приведенное) подмногообразие $A \subset X$ называется *вещественным*, если оно conj -инвариантно. Чтобы не путать conj -инвариантные комплексные подмногообразия с вещественными подмногообразиями в обычном смысле, мы иногда называем первые *вещественными гладкими циклами* (или *вещественными гладкими дивизорами*, если их комплексная коразмерность равна 1). *Кривой* в комплексном многообразии X называется приведенный эффективный цикл (дивизор, если X есть поверхность).

В алгебраической геометрии многие понятия имеют различный смысл над $\mathbb{C}$ и над $\mathbb{R}$; для обозначения вещественного варианта мы используем префикс $\mathbb{R}$. Так, подмногообразие A называется $\mathbb{R}$ -*неприводимым*, если оно либо неприводимо над $\mathbb{C}$, либо имеет две компоненты, переставляемые инволюцией conj ; $\mathbb{R}$ -*компонентой* подмногообразия A называется либо conj -инвариантная компонента, либо пара компонент, переставляемых инволюцией conj . (Осознавая неуклюжесть этой терминологии, мы используем ее, не найдя лучшей. Термин “вещественный” может вызвать путаницу этих понятий с их топологическими омонимами, а выражение “над $\mathbb{R}$ ” не всегда приемлемо грамматически или, того хуже, семантически, поскольку, вообще говоря, наши многообразия не являются алгебраическими многообразиями, определенными над $\mathbb{R}$.)

На комплексном многообразии X с вещественной структурой для линейной системы $|D|$ (см. 2.1) мы обозначаем через $\mathbb{R}|D|$ ее вещественную часть, которая состоит из вещественных дивизоров, линейно эквивалентных дивизору D , а через $\Delta_{|D|}$ и $\mathbb{R}\Delta_{|D|}$ — дискриминант системы $|D|$ и соответственно его вещественную часть. Если же $X = \mathbb{P}^n$, мы используем более употребительные обозначения $\mathcal{C}_q, \Delta_q$ для пространства гиперповерхностей степени q и соответственно его дискриминанта, а также $\mathbb{R}\mathcal{C}_q, \mathbb{R}\Delta_q$ для их вещественных частей.

Мы пользуемся стандартными скобочными обозначениями для кодировки частично упорядоченных множеств. Типичная ситуация — кодировка множества овалов вещественной кривой на вещественной поверхности. Для каждого класса кривых используемый частичный порядок явно указывается; например, для двух овалов C_1, C_2 плоской кривой по определению $C_1 \succ C_2$, если C_2 лежит в круге, ограниченном овалом C_1 .

Все группы гомологий и когомологий имеют $\mathbb{Z}_2$ -коэффициенты, если последние не указаны явно. Через $b_i(\cdot)$ и $\beta_i(\cdot)$ мы обозначаем числа Бетти над $\mathbb{Q}$ и над $\mathbb{Z}_2$, а через $b_*(\cdot)$ и $\beta_*(\cdot)$ — соответствующие тотальные числа Бетти. Для топологического пространства X с инволюцией c через $({}^rE_*(X), {}^rd_*)$ (или просто $({}^rE_*, {}^rd_*)$) мы обозначаем спектральную последовательность Калинина, через bv_* — гомоморфизмы Виро и через $\mathcal{F}^*(X) = \mathcal{F}^*$ — фильтрацию Калинина на $H_*(\text{Fix } c)$ (см. А.2).

Для многообразия X через $w_i = w_i(X)$ обозначаются его классы Штифеля–Уитни, через $u_i = u_i(X)$ — его классы Ву, а если X — комплексное многообразие, через $c_i = c_i(X)$ — его классы Черна. Если X замкнуто, через $D = D_X: H^*(X) \rightarrow H_*(X)$ обозначается изоморфизм двойственности Пуанкаре; при этом для гомологических классов, двойственных по Пуанкаре характеристическим классам, часто используются те же обозначения w_i, u_i, c_i .

Благодарности. Мы признательны нашим многочисленным коллегам, с которыми мы совместно работали в этой области и которые делились с нами своими знаниями. Среди тех, кто во время нашей работы над обзором помогал нам выяснить некоторые детали или сообщал о своих неопубликованных результатах, — Б. Шевалье, С. М. Финашин, И. В. Итенберг, А. Марен, С. Ю. Оревков, О. Я. Виро, Ж.-И. Вельшингер. Наша особая признательность — А. М. Вершику, который вдохновил нас написать этот обзор.

2. Технические средства и общие результаты

2.1. Дивизоры и линейная эквивалентность. Напомним, что *дивизором* на неособом компактном комплексном многообразии X называется формальная конечная линейная комбинация $A = \sum m_i D_i$ с $m_i \in \mathbb{Z}$, в которой D_i — неприводимые (возможно, особые) компактные подмногообразия многообразия X , имеющие коразмерность 1. Если все $m_i \geq 0$, дивизор A называется *эффективным*. Дивизоры образуют группу относительно формального сложения линейных комбинаций. Два дивизора D_1, D_2 называются *линейно эквивалентными*, $D_1 \sim D_2$, если их разность есть *главный дивизор*, т.е. если существует мероморфная функция на X , нули и полюсы которой являются компонентами дивизора $D_1 - D_2$ с учетом их кратностей. Все эффективные дивизоры, линейно эквивалентные данному дивизору D , образуют проективное пространство; оно называется *линейной системой* и обозначается через $|D|$. Ясно, что необходимым условием линейной эквивалентности дивизоров является реализуемость ими одного и того же класса в $H^2(X; \mathbb{Z})$; если X односвязно (или, более общо, $H^1(X; \mathbb{Z}) = 0$), это условие также и достаточно (см., например, [49] или [47]).

Дивизор называется *очень обильным*, если его можно представить в виде гиперплоского сечения при некотором вложении многообразия X в проективное пространство. Дивизор D называется *обильным*, если некоторое его положительное кратное mD является очень обильным. (Некоторые полезные критерии обильности можно найти в [47].)

Если A — вещественный дивизор на вещественном многообразии (X, conj) , класс дивизора A в $H^2(X; \mathbb{Z})$ является косоинвариантным относительно conj^* . Если $H^1(X) = 0$, каждый дивизор, класс которого косоинвариантен относительно conj^* , линейно эквивалентен вещественному. Вещественные дивизоры, эквивалентные над $\mathbb{C}$, эквивалентны над $\mathbb{R}$, если $\mathbb{R}X \neq \emptyset$.

2.1.1. ТЕОРЕМА ЛЕФШЕЦА О ГИПЕРПЛОСКОМ СЕЧЕНИИ (см., например, [86]).

Если A — обильный дивизор на неособом компактном комплексном n -мерном многообразии X , то $X \setminus A$ имеет гомотопический тип n -мерного клеточного пространства. В частности, $H_r(X, A; G) = H^r(X, A; G) = 0$ для любой абелевой группы G и любого $r < n$.

2.2. Двухлистные накрытия. Двухлистные накрытия играют особую роль в вещественной алгебраической геометрии: расположение подмногообразия $A \subset X$ в большой степени отражается на топологических свойствах двухлистного накрытия многообразия X , разветвленного над A (согласно принципу В. И. Арнольда понятие двухлистного накрытия является комплексификацией понятия многообразия с краем; по утверждению Арнольда именно благодаря этому наблюдению он нашел доказательство ослабленного сравнения Гудкова и других замечательных результатов ра-

боты [2]). Таким образом, как только получен некоторый результат для абсолютного случая, его можно применить к разветвленным двулистным накрытиям и тем самым получить некоторые запреты в относительном случае на расположение подмногообразия.

Дивизор $A \subset X$ называется *четным*, если фундаментальный класс $[A]$ равен нулю в $H_{2n-2}(X)$, где $n = \dim X$. В этом случае существует двулистное накрывающее Y многообразия X с ветвлением над A , причем Y также является комплексным многообразием, неособым, если A неособо. Ясно, что с точностью до изоморфизма накрытие определяется классом $\omega \in H^1(X \setminus A)$, образ которого при $H^1(X \setminus A) \rightarrow H_{2n-1}(X, A) \rightarrow H_{2n-2}(A)$ равен $[A]$. С другой стороны, равенство нулю гомологического класса равносильно тому, что $A \sim 2E$ для некоторого дивизора E на X , и классы изоморфных двулистных накрытий находятся в каноническом взаимно однозначном соответствии с такими классами $E \in \text{Pic } X$, что $2E \sim A$, см. [48]. Для конкретно выбранного накрытия мы используем обозначение $Y(E)$.

Следующее утверждение сразу следует из 2.1.1:

2.2.1. ТЕОРЕМА ЛЕФШЕЦА ДЛЯ ДВУЛИСТНЫХ НАКРЫТИЙ. Пусть A – четный обильный дивизор на неособом компактном комплексном многообразии X , и пусть Y – двулистное разветвленное накрывающее многообразия X с ветвлением над A . Тогда для любой абелевой группы G

$$H_r(Y, A; G) = H^r(Y, A; G) = 0, \quad \text{где } r < n = \dim X.$$

2.2.2. СЛЕДСТВИЕ ИЗ 2.1.1 И 2.2.1. Пусть $A \subset X$ и Y – такие же, как в 2.2.1, и $p: Y \rightarrow X$ – проекция накрытия. Тогда для любой абелевой группы G индуцированное отображение $p_*: H_r(Y; G) \rightarrow H_r(X; G)$ есть изоморфизм для $r < n$ и эпиморфизм для $r = n$; индуцированное отображение $p^*: H^r(X; G) \rightarrow H^r(Y; G)$ есть изоморфизм для $r < n$ и мономорфизм для $r = n$. Более того, если G – поле с $\text{char } G \neq 2$, то p_* индуцирует изоморфизм между $H_*(X; G)$ и подгруппой $H_*^+(Y; G)$ классов, инвариантных относительно автоморфизма накрытия (соответственно p^* индуцирует изоморфизм между $H^*(X; G)$ и $H_+^*(Y; G)$).

Заметим, что 2.2.1 и 2.2.2 остаются справедливыми, если A и, следовательно, Y имеют особенности. Если дивизор A гладкий, но не является четным, можно попытаться найти другой гладкий дивизор H на X , пересекающий A трансверсально и такой, что $[H] + [A] = 0$ в $H_{2n-2}(X)$. Тогда существует двулистное накрывающее Y_H многообразия X с ветвлением над $H \cup A$, и можно изучать его раздутие $\tilde{Y}_H$ с центром $S = H \cap A$. (Типичный пример – когда $X \subset \mathbb{P}^N$ и A высекается на X гиперплоскостью нечетной степени: взяв в качестве H общее гиперплоское сечение, получим информацию об аффинной части пары (X, A) .) Результат будет тем же, если раздуть S на X , получив неособое многообразие $\tilde{X}$, и взять в качестве $\tilde{Y}_H$ двулистное разветвленное накрывающее многообразия $\tilde{X}$ с ветвлением над собственным прообразом дивизора $A + H$. Если H обильен, то $aH + A$ обильен для $a \gg 0$, и поскольку $H_r(\tilde{X}) = H_r(X) \oplus H_{r-2}(S)$, следствие 2.2.2 принимает следующий вид:

2.2.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $A \subset X$ – гладкий дивизор, $H \subset X$ – обильный дивизор, трансверсальный к A , и $\tilde{Y}_H$ – указанное выше многообразие. Тогда

для любого поля F с $\text{char } F \neq 2$ и для любого $r \in \mathbb{Z}$ имеются канонические изоморфизмы $H_r^+(\tilde{Y}_H; F) = H_r(X; F) \oplus H_{r-2}(H \cap A; F)$ и $H_r^-(\tilde{Y}_H; F) = H_r(X; F) \oplus H^{r-2}(H \cap A; F)$. Более того, $H_r^-(\tilde{Y}_H; F) = H_r^-(\tilde{Y}_H; F) = 0$ для $r \neq n = \dim X$. (Здесь $H_\pm^\pm$ и $H_\pm^*$ – подгруппы классов, инвариантных и косоинвариантных относительно автоморфизма накрытия.)

2.2.4. Пусть теперь X наделено вещественной структурой и A – четный вещественный дивизор. Пусть, далее, дивизор E с $2E \sim A$ выбран так же вещественным. Положим $Y = Y(E)$. (Такой выбор дивизора E возможен, если, например, $H^1(X) = 0$; в общем случае возможность выбора зависит от того, является ли класс дивизора A в $H^2(X; \mathbb{Z})$ удвоенным косоинвариантным классом.) Если $\mathbb{R}X \neq \emptyset$, инволюция conj на X накрывается двумя антиголоморфными инволюциями $T_\pm: Y \rightarrow Y$, коммутирующими друг с другом, причем $\tau = T_+ \circ T_-$, где $\tau: Y \rightarrow Y$ – автоморфизм накрытия (см. А.2.5). Соответствующие вещественные части многообразия Y обозначаются через $\mathbb{R}Y_\pm$, а их проекции на $\mathbb{R}X$ – через $\mathbb{R}X_\pm$. Очевидно, $\mathbb{R}X_+ \cup \mathbb{R}X_- = \mathbb{R}X$ и $\mathbb{R}X_+ \cap \mathbb{R}X_- = \mathbb{R}A$. Характеристические классы $\omega_\pm \in H^1(\mathbb{R}X_\pm)$ двойственны по Пуанкаре соответствующим образам $\text{rel}[\mathbb{R}E] \in H_{n-1}(\mathbb{R}X_\pm, \mathbb{R}A)$ при релятивизации.

2.3. Неравенства Смита. Результаты этого пункта, полученные из неравенства Смита и его относительного варианта (см. А.1.3(2) и (А.1.9)), обобщают неравенство Харнака для кривых.

2.3.1. ТЕОРЕМА. Если X – неособое многообразие с вещественной структурой, то $\beta_*(\mathbb{R}X) \leq \beta_*(X)$ и $\beta_*(\mathbb{R}X) = \beta_*(X) \bmod 2$. Если, кроме того, $A \subset X$ – вещественное неособое подмногообразие, то $\beta_*(\mathbb{R}X, \mathbb{R}A) \leq \beta_*(X, A)$ и $\beta_*(\mathbb{R}X, \mathbb{R}A) = \beta_*(X, A) \bmod 2$.

В 2.3.1 легко угадываются привычные соотношения между числом вещественных корней вещественного многочлена и его степенью, если $\dim X = 0$, и классическое неравенство Харнака, которое утверждает, что число вещественных компонент кривой $\mathbb{R}X$ не превосходит $\text{род}(X) + 1$, если $\dim X = 1$. Оценка, которую дает 2.3.1, точна для гиперповерхностей любой степени в проективном пространстве любой размерности (см. [118] и [53]); для гиперповерхности $X \subset \mathbb{P}^q$ степени m эта оценка имеет вид $\beta_*(X) \leq \frac{1}{m}((m-1)^{q+1} + (-1)^q) + q - (-1)^q$, см. [113].

2.3.2. ДОПОЛНИТЕЛЬНОЕ НЕРАВЕНСТВО ДЛЯ ЧЕТНЫХ ПАР. Пусть A – четный обильный вещественный гладкий дивизор на неособом n -мерном многообразии X с вещественной структурой. Пусть, далее, E – вещественный дивизор на X с $2E \sim A$ и $\omega_\pm \in H^1(\mathbb{R}X_\pm)$ – класс, двойственный по Пуанкаре классу $\text{rel}[\mathbb{R}E] \in H_{n-1}(\mathbb{R}X_\pm, \mathbb{R}A)$, где $\mathbb{R}X_\pm$ – две половины пространства $\mathbb{R}X \setminus \mathbb{R}A$ (см. 2.2.4). Тогда

$$2\beta_*(\mathbb{R}X_\pm) - 2[\dim \text{Ker } \partial - \dim \text{Ker } (\omega_\pm \oplus \partial)] \leq \beta_*(X) + (-1)^n[\chi(X) - \chi(A)],$$

где $\omega_\pm \oplus \partial: H_*(\mathbb{R}X_\pm, \mathbb{R}A) \rightarrow H_{*-1}(\mathbb{R}X_\pm, \mathbb{R}A) \oplus H_{*-1}(\mathbb{R}A)$ – граничный гомоморфизм точной последовательности Смита А.1.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это утверждение есть неравенство Смита, примененное к одной из инволюций $T_\pm$ двулистного разветвленного накрывающего $Y \rightarrow X$ с ветвлением над A (см. 2.2.4). Его левая часть есть $\beta_*(\mathbb{R}Y_\pm)$, как это сразу следует из точной

последовательности Смита для автоморфизма накрытия, точной последовательности пары $(\mathbb{R}X, \mathbb{R}A)$ и двойственности Пуанкаре. Его правая часть равна $\beta_*(Y)$. Действительно, из 2.2.2 и из симметричности чисел Бетти следует, что $\beta_r(Y) = \beta_r(X)$ для всех $r \neq n$, и для нахождения оставшегося числа Бетти $\beta_n(Y)$ достаточно сравнить соответствующие эйлеровы характеристики (используя, например, формулу Римана–Гурвица А.1.3(6)).

ЗАМЕЧАНИЕ. Левая часть неравенства в 2.3.2 равна $\beta_*(\mathbb{R}A) + 2 \dim \text{Ker}(\omega_{\pm} \oplus \partial)$. В случае проективной гиперповерхности это неравенство можно упростить, см. 2.8.3; в этом случае $\omega_{\pm}$ есть k -кратная образующая группы $H^1(\mathbb{R}P^n)$, где $2k = \deg A$. (По странной ошибке в ранних работах на эту тему был указан другой класс.)

В отличие от случая кривых, в общем случае оценка отдельного числа $\beta_i(\mathbb{R}X)$ (и даже $\beta_0(\mathbb{R}X)$) – трудная проблема; точная граница неизвестна даже для поверхностей степени 5 в $\mathbb{P}^3$, см. 3.5. Заметим также, что 2.3.1 и 2.3.2 дают, вообще говоря, разные ограничения на топологию пары $(\mathbb{R}X, \mathbb{R}A)$. Конечно, условие обильности в 2.3.2 необходимо только для нахождения чисел Бетти многообразия Y ; без него правую часть неравенства следует заменить на $\beta_*(Y)$.

Согласно 2.3.1 разность $\beta_*(X) - \beta_*(\mathbb{R}X)$ есть неотрицательное четное число. Если эта разность равна $2d$, то X называется $(M - d)$ -многообразием (а conj называется $(M - d)$ -инволюцией). Подобно случаю кривых и классическому неравенству Харнака, именно M - (и близкие к M -) многообразия удовлетворяют соответствующим запретам типа сравнений (см. 2.7).

2.4. Неравенства Комессатти–Петровского–Олейник. Напомним, что если на неособом компактном комплексном многообразии X существует кэлерова метрика (что справедливо для проективных неособых многообразий, так как кэлерова метрика на них индуцируется из объемлющего проективного пространства), то определено каноническое разложение Ходжа (структура Ходжа)

$$H^r(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=r} H^{p,q}(X), \quad 0 \leq p, q \leq \dim_{\mathbb{C}} X,$$

где $H^{p,q}(X) = H^q(X; \Omega^p(X))$ есть одновременно пространство классов, реализуемых (p, q) -формами, и пространство q -когомологий пучка $\Omega^p(X) = \bigwedge^p T^*(X)$ голоморфных p -форм на X . Числа Ходжа $h^{p,q}(X) = \dim H^{p,q}(X)$ инвариантны относительно деформаций многообразия X . Фиксированная кэлерова метрика дает дальнейшее разложение $H^{p,q}(X) = \bigoplus \Omega^k \wedge P^{p-k, q-k}(X)$, где $\Omega \in H^{1,1}(X)$ – фундаментальный класс метрики и $P^{a,b} \subset H^{a,b}$ – подпространства так называемых *примитивных классов* (см., например, [16]). Если многообразие X вещественное, на нем существует инвариантная кэлерова метрика (например, полученная усреднением) и для такой метрики справедливо равенство $\text{conj}^* \Omega = -\Omega$.

Следующий результат содержит неравенства Петровского [94], Петровского–Олейник [95], [91] и Комессатти [17] (будучи примененным соответственно к двулиственным накрытиям плоскости, проективным гиперповерхностям двулиственным накрытиям поверхностей и поверхностям). Другие обобщения неравенств Петровского–Олейник можно найти в [3], [65], [66], [58], [116].

Приведенное ниже доказательство взято из [56].

2.4.1. ТЕОРЕМА. Если X — неособое компактное комплексное кэлерово многообразие четной размерности $n = 2k$, наделенное вещественной структурой, то

$$|\chi(\mathbb{R}X) - 1| \leq h^{k,k}(X) - 1.$$

Если, кроме того, $A \subset X$ — такой четный вещественный дивизор, что $A \sim 2E$ для вещественного дивизора E , то

$$\begin{aligned} |\chi(\mathbb{R}X_-) - \chi(\mathbb{R}X_+)| &\leq h_-^{k,k}(Y) \quad \text{и} \\ |2\chi(\mathbb{R}X_\pm) - 1| &\leq h^{k,k}(Y) - 1, \end{aligned}$$

где $Y = Y(E)$, τ — автоморфизм накрытия и $h_-^{p,q}(Y) = h^{p,q}(Y) - h^{p,q}(X)$ — размерность косоинвариантной относительно τ части $H_-^{p,q}(Y) \subset H^{p,q}(Y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем первое утверждение, два других доказываются аналогично. По теореме Лефшеца о неподвижных точках

$$\chi(\mathbb{R}X) = \sum_r (-1)^r \text{Trace}(\text{conj}^*, H^r(X)).$$

Так как $\text{conj}_* H^{p,q}(X) = H^{q,p}(X)$ и $\text{conj}^* \Omega = -\Omega$ (для инвариантной кэлеровой метрики), то при разложении пространства $H^*(X; \mathbb{C})$ на примитивные классы вклад в $\chi(\mathbb{R}X)$ могут дать только члены, содержащиеся в $H^{k,k}(X) = \bigoplus \Omega^j \wedge P^{k-j,k-j}(X)$:

$$(2.4.2) \quad \chi(\mathbb{R}X) = \sum_{j=0}^k \text{Trace}(\text{conj}^*, P^{k-j,k-j}(X)).$$

Остается заметить, что $\text{conj}^* = \text{id}$ на $P^{0,0}(X)$ и что $|\text{Trace}| \leq \dim$.

Неравенства, указанные в этой теореме, точны для кривых на $\mathbb{P}^2$ (см. [94]) и для поверхностей в $\mathbb{P}^3$ (см. [118]); в этих случаях они являются соответственно неравенствами Петровского и Петровского–Олейник. Насколько нам известно, в старших размерностях вопрос их точности до сих пор открыт.

Числа Ходжа. Если A обилец, последние два неравенства в 2.4.1 можно сделать эффективными. Следуя Ф. Хиребруху, рассмотрим *обобщенный род Тодда* (или просто *T_y -род*) $T_y(X) = \sum (-1)^q h^{p,q}(X) y^p$. По теореме Римана–Роха–Хирцебруха (см. [49]) $T_y(X)$ равен значению на $[X]$ некоторого многочлена $T_n(y; c_1, \dots, c_n)$ степени n от классов Черна $c_i = c_i(X)$. Более того, для любых $u_1, \dots, u_r \in H^2(X)$ можно определить *виртуальный род Тодда* $T_y^r(u_1, \dots, u_r)$, являющийся многочленом от c_i и u_j со следующим свойством: если классы, двойственные по Пуанкаре классам u_i , реализованы неособыми подмногообразиями U_i коразмерности 1, пересекающимися трансверсально, то $T_y^r(u_1, \dots, u_r) = T_y(U_1 \cap \dots \cap U_r)$.

Следующее утверждение следует из 2.2.2 (с $G = \mathbb{C}$):

2.5.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ (см. [56]). Пусть $A \subset X$ и $Y = Y(E)$ – такие же, как и в 2.4.1. Если A обилён, то $h^{p,q}(Y) = h^{p,q}(X)$ для всех p, q с $p+q \neq n$ и

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i (h^{n-i,i}(Y) - h^{n-i,i}(X)) y^i = \sum_{r \geq 0} a_r(y) T_y^r(e, \dots, e)_X - T_y(X),$$

где $a_r(y)$ – коэффициент при x^r в формальном степенном ряде

$$(2.5.2) \quad \frac{(1+yx)^2 - (1-x)^2}{(1+yx)^2 + y(1-x)^2} \cdot \frac{1}{x} = \sum_{r=0}^{\infty} a_r(y) x^r$$

и $e = c_1(E)$. (Этот результат не зависит от выбора дивизора E с $2E \sim A$, так как вычисления происходят в рациональных гомологиях.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из 2.2.2, естественности разложения Ходжа и двойственности Серра следует, что $h^{p,q}(Y) = h^{p,q}(X)$ для $p+q \neq n$, и для нахождения оставшихся чисел Ходжа в средней размерности достаточно знать род. Тогда многообразие Y , который, согласно [56], есть $T_y(Y) = \sum_{r \geq 0} a_r(y) T_y^r(e, \dots, e)_X$.

Непосредственные вычисления для малых размерностей дают следующие значения $T_y(X) = \sum_{i=0}^n T_{n,i} y^i$ (где $n = \dim X$):

2.5.3. СЛЕДСТВИЕ. Пусть $c_i = c_i(X)$. Если $\dim X = 2$, то

$$T_{2,0} = T_{2,2} = \frac{1}{12}(c_1^2 + c_2)[X], \quad T_{2,1} = \frac{1}{6}(c_1^2 - 5c_2)[X], \\ h^{1,1}(Y) = h^{1,1}(X) - T_{2,1} - (ec_1 - 3e^2)[X].$$

Если $\dim X = 4$, то

$$T_{4,0} = T_{4,4} = \frac{1}{720}(-c_1^4 + 4c_1^2c_2 + 3c_2^2 + c_1c_3 - c_4)[X], \\ T_{4,1} = T_{4,3} = \frac{1}{180}(-c_1^4 + 4c_1^2c_2 + 3c_2^2 - 14c_1c_3 - 31c_4)[X], \\ T_{4,2} = \frac{1}{120}(-c_1^4 + 4c_1^2c_2 + 3c_2^2 - 19c_1c_3 + 79c_4)[X], \\ h^{2,2}(Y) = h^{2,2}(X) + T_{4,2} + \frac{1}{12}(115e^4 - 46e^3c_1 - 5e^2c_1^2 + 31e^2c_2 + ec_1c_2 - 12ec_3)[X].$$

Если X – регулярное полное пересечение в $\mathbb{P}^N$, его числа Ходжа и, следовательно, правые части неравенств в 2.4.1 можно найти по рекуррентной формуле. Они зависят только от полистепени многообразия X . Определим многочлены $\chi_s^q(m_1, \dots, m_s; y)$ следующим образом:

$$(2.5.4) \quad \begin{aligned} \chi_0^0(y) &= 1, \quad \chi_s^0(m_1, \dots, m_s; y) = 0 \quad \text{для } s > 0 \text{ и} \\ \chi_s^q(\dots, m_s; y) &= m_s \chi_{s-1}^{q-1}(\dots; y) \\ &\quad + \sum_{\mu=1}^{m_s} [(y-1) \chi_s^{q-1}(\dots, \mu-1; y) - y \chi_{s+1}^{q-1}(\dots, \mu-1, \mu; y)]. \end{aligned}$$

(Заметим, что $\chi_0^q(y) = \sum_{r=0}^q (-1)^r y^r$, $\chi_q^q(m_1, \dots, m_q; y) = m_1 \cdots m_q$ и $\chi_s^q = 0$ для $s > q$.)

2.5.5. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если неособое многообразие X четной размерности $n = 2l$ есть регулярное полное пересечение в $\mathbb{P}^{n+s}$ полистепеней $(m_1, \dots, m_s)$, то

$$T_y(X) = \chi_s^{n+s}(m_1, \dots, m_s; y).$$

В частности, $(-1)^l h^{l,l}(X)$ равно коэффициенту при y^l в $\chi_s^{n+s}(m_1, \dots, m_s; y)$.

Далее, если $A \subset X$ — неособое подмногообразие, высекаемое на X гиперповерхностью степени $2k$, и Y — двулистное накрывающее многообразие X с ветвлением над A , то

$$T_y(Y) = \sum_{r=0}^n a_r(y) \chi_{r+s}^{n+s}(m_1, \dots, m_s, k, \dots, k; y).$$

(Числа $a_r(y)$ определены в (2.5.2).) В частности, $(-1)^l h^{l,l}(Y)$ равно коэффициенту при y^l в этом многочлене.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (см. [56]). Это утверждение следует непосредственно из функционального уравнения для T_y -рода [49; теорема 11.3.1] и хорошо известного свойства чисел Ходжа: $h^{p,q}(X) = 0$, если $p \neq q$ и $p + q \neq n$.

В малых размерностях (поверхности в $\mathbb{P}^q$ и гиперповерхности в $\mathbb{P}^5$) предложение 2.5.5 дает следующий результат (для упрощения формул i -й элементарный симметрический многочлен от $m_1, \dots, m_s$ мы обозначаем через μ_i ; ясно, что $\mu_0 = 1$ и $\mu_i = 0$ для $i > s$).

2.5.6. СЛЕДСТВИЕ. Если $X \subset \mathbb{P}^q$ и $\dim X = 2$, то

$$\begin{aligned} h^{1,1}(X) &= \frac{1}{12} \mu_{q-2} (8\mu_1^2 - 10\mu_2 - 6(q+1)\mu_1 + (q+1)(3q-2)), \\ h^{1,1}(Y) &= \mu_{q-2} k (3k + \mu_1 - (q+1)) + 2h^{1,1}(X). \end{aligned}$$

Если $X \subset \mathbb{P}^5$ и $\dim X = 4$, то

$$\begin{aligned} s = 0: \quad h^{2,2}(Y) &= \frac{115}{12} k^4 - \frac{115}{6} k^3 + \frac{185}{12} k^2 - \frac{35}{6} k + 2, \\ s = 1: \quad h^{2,2}(X) &= \frac{11}{20} m_1^5 - \frac{11}{4} m_1^4 + \frac{23}{4} m_1^3 - \frac{25}{4} m_1^2 + \frac{37}{10} m_1, \\ h^{2,2}(Y) &= \frac{115}{12} m_1 k^4 + \left(\frac{23}{6} m_1 - 23 \right) m_1 k^3 \\ &\quad + \left(\frac{13}{6} m_1^2 - \frac{21}{2} m_1 + \frac{95}{4} \right) m_1 k^2 \\ &\quad + \left(\frac{11}{12} m_1^3 - 5m_1^2 + \frac{43}{4} m_1 - \frac{25}{2} \right) m_1 k + 2h^{2,2}(X). \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В формулировках Петровского–Олейник вместо чисел Ходжа использовался подсчет числа некоторых мономов. Совпадение двух оценок было доказано В. И. Звониловым [128] с использованием 2.5.1. Этот результат связан со следующим красивым правилом: если $X \subset \mathbb{P}^{2k+1}$ — гиперповерхность с $\deg X = d$, то $h^{k,k}(X) - 1$ есть число целых точек в слое $kd < \sum (x_i + 1) < (k+1)d$ куба $[0, d-2]^{2k+1} \subset \mathbb{R}^{2k+1}$. Другие слои куба дают другие числа Ходжа. Эта формула распространяется на гиперповерхности в пространствах четной размерности. Соотношения такого типа были впервые замечены, по-видимому, Стинбринком [108],

который нашел в явном виде мономиальный базис для исчезающей структуры Ходжа полуквазиоднородной особенности. Дальнейшие обобщения см. в [22] и [115].

2.6. Типы инволюций. В теории вещественных кривых понятие разбивающей кривой (или кривой типа I, см. введение) является одним из основных. В старших размерностях, где вещественная часть $\mathbb{R}X$ имеет (вещественную) коразмерность больше 1, она не может разбивать многообразие X , но гомологическое условие $[\mathbb{R}X] = 0 \in H_n(X)$ по-прежнему имеет смысл. В различных приложениях свойства пространства $\mathbb{R}X$ могут зависеть от того, гомологичен ли его фундаментальный класс некоторому классу $u \in H_n(X)$, обычно обладающему некоторым свойством естественности (скажем, характеристическому классу многообразия X) и не обязательно нулевому. Таким образом, для $u \in H_n(X)$ будем говорить, что вещественная структура conj на X (или просто само X , или $\mathbb{R}X$) имеет *тип* I_u , если $[\mathbb{R}X]$ гомологичен классу u . Следующие специальные случаи используются наиболее часто.

- (1) I_0 или I_{abs} с $u = 0$. Тип I_0 иногда называют *абсолютным типом* I.
- (2) I_{w_u} , где $u = u_n(X)$ есть n -й класс Ву многообразия X . (Напомним, что $u_n(X)$ есть характеристический элемент формы пересечений на X . По формуле Ву $u_n(X)$ есть некоторый многочлен от классов Штифеля–Уитни многообразия X^2).
- (3) I_{hp} с u , равным $(n/2)$ -й степени гиперплоского сечения. (Конечно, это имеет смысл только для фиксированного вложения $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$.)

В случае проективных многообразий понятие типов I_0 и I_{hp} появилось в [59]. В [117] типы I_0 и I_{hp} называются соответственно I_{abs} и I_{rel} , а гиперповерхность, не относящаяся ни к одному из этих типов, относится к типу II. Однако эта терминология не представляется общепризнанной. Обычно в зависимости от конкретной проблемы является разумным выделить класс $u \in H_n(X)$ и относить многообразия к типам I_{abs} и $I_u = I_{\text{rel}}$, заменяя последним тип II. Например, ниже в большинстве результатов существенную роль играет тип I_{w_u} .

2.7. Сравнения. Следующие две теоремы являются прямыми обобщениями сравнений Гудкова, Арнольда, Рохлина, Харламова и Крахнова.

2.7.1. ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СРАВНЕНИЯ. Пусть X – четномерное $(M-d)$ -многообразие с вещественной структурой. Тогда:

- (1) если $d = 0$, то $\chi(\mathbb{R}X) = \sigma(X) \bmod 16$;
- (2) если $d = 1$, то $\chi(\mathbb{R}X) = \sigma(X) \pm 2 \bmod 16$;
- (3) если $d = 2$ и $\chi(\mathbb{R}X) = \sigma(X) + 8 \bmod 16$, то X имеет тип I_{w_u} .

2.7.2. ОБОБЩЕННОЕ СРАВНЕНИЕ АРНОЛЬДА. Пусть X – неособое многообразие с вещественной структурой типа I_{w_u} . Если размерность многообразия X четна, то $\chi(\mathbb{R}X) = \sigma(X) \bmod 8$.

2.7.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. M -многообразие с вещественной структурой имеет тип I_{w_u} .

Сигнатура комплексно-аналитического многообразия X равна $T_1(X)$ (см. 2.4). Поэтому если X – поверхность, то $\sigma(X) = \frac{1}{3}(c_1^2 - 2c_2)[X]$. Если X – регулярное полное

²Так как X – комплексное многообразие, то $w_{2i+1}(X) = 0$ и $w_{2i}(X) = c_i(X) \bmod 2$. Заметим, что $\text{conj}_* c_i = (-1)^i c_i$; в частности, все характеристические классы $\bmod 2$ многообразия X являются conj_* -инвариантными.

пересечение в $\mathbb{P}^q$, его сигнатуру можно найти, используя предложение 2.5.5 и формулу (2.5.4). В частности, получаются следующие результаты:

2.7.4. СИГНАТУРА ПОЛНОГО ПЕРЕСЕЧЕНИЯ. Пусть X – регулярное полное пересечение в $\mathbb{P}^q$ полистепени $(m_1, \dots, m_s)$ и четной размерности $n = q - s$.

- (1) Если $n = 2$, то $\sigma(X) = -\frac{1}{3}\mu_{q-2}(\mu_1^2 - 2\mu_2 - q - 1)$, где μ_i – i -й элементарный симметрический многочлен от $m_1, \dots, m_s$.
- (2) Если $s = q + 2 \bmod 4$ и $m_1 + \dots + m_s = q + 1 \bmod 2$, то $\sigma(X) = 0 \bmod 16$.
- (3) Если $s = q \bmod 4$ и все m_i , кроме, может быть, одного (скажем, m_s), нечетны, то $\sigma(X) = m_1 \cdots m_s \bmod 16$.
- (4) Если X – гиперповерхность (т.е. $s = 1$), то
 $\sigma(X) = m_1 \bmod 16$ при $n = 0 \bmod 4$;
 $\sigma(X) = 0 \bmod 16$ при $n = 2 \bmod 4$ и m_1 четном;
 $\sigma(X) = 1 - m_1(m_1 - 1) \bmod 16$ при $n = 2 \bmod 4$ и m_1 нечетном.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся равенством $\sigma(X) = \chi_s^q(m_1, \dots, m_s; 1)$. Утверждение (1) доказывается по индукции с использованием (2.5.4). Утверждение (2) следует из того, что сигнатура $(8k + 4)$ -мерного спинорного многообразия делится на 16 (см. [90]). Сравнение (3) доказывается индукцией по s и m_s с использованием функционального уравнения для T_y -рода [49; теорема 11.3.1], согласно которому

$$(2.7.5) \quad \chi_s^q(\dots, m_s; 1) = \chi_s^q(\dots, m_s - 1; 1) + \chi_{s-1}^{q-1}(\dots; 1) - \chi_{s+1}^{q-1}(\dots, m_s - 1, m_s; 1).$$

Из условий (3) в силу (2) последнее слагаемое в (2.7.5) сравнимо с нулем.

Утверждения (2) и (3) охватывают первые два случая в (4). В последнем случае мы опять используем (2.7.5), где $\chi_1^q(m - 1; 1) = 0 \bmod 16$ согласно (2), $\chi_0^{q-1}(1) = \sigma(\mathbb{P}^{q-1}) = 1$ и $\chi_2^{q-1}(m - 1, m; 1) = (m - 1)m \bmod 16$ согласно (3).

Доказательства утверждений 2.7.1–2.7.3 похожи друг на друга; ключевой вклад дает лемма 2.7.6 (см. ниже).

Пусть $n = \dim X$. Положим $H = H_n(X; \mathbb{Z}) / \text{Tors}$. Пусть $H^{\pm 1} \subset H$ – подгруппы инвариантных и коинвариантных относительно conj_* классов и $J = H / (H^{+1} \oplus H^{-1})$. Обозначим через $B: H \otimes H \rightarrow \mathbb{Z}$ форму пересечений $(x, y) \mapsto x \circ y$ многообразия X и через B^{conj} – скрученную форму пересечений $(x, y) \mapsto x \circ \text{conj}_* y$, см. А.3. Пусть $q^\pm$ – дискриминантная группа (квадратичное пространство) формы, ассоциированной с $B|_{H^\pm}$. Как известно (см. В.3), J и $q^\pm$ – $\mathbb{Z}_2$ -векторные пространства, изоморфные как группы.

2.7.6. ЛЕММА. Пусть, как и выше, X есть $(M - d)$ -многообразие с вещественной структурой и $\dim X = n$. Тогда:

- (1) $[\mathbb{R}X]$ как элемент в $H_n(X)$ является характеристическим для скрученной формы пересечений B^{conj} ;
- (2) $u_n(X)$ и $[\mathbb{R}X] \in H_n(X)$ – целочисленные классы, т.е. принадлежат образу группы $H_n(X; \mathbb{Z})$;
- (3) $d \geq \dim \text{Coker}[(1 + \text{conj}_*): H_*(X) \rightarrow H_*(X)] \geq \dim J$.

Пусть, кроме того, размерность $n = 2k$ четна. Положим $\epsilon = (-1)^{k+1}$. Тогда

- (4) $\chi(\mathbb{R}X) = (-1)^{k+1} \sigma(B^{\text{conj}}) = \sigma(X) - 2\sigma(H^\epsilon)$;
- (5) H^ϵ – четная решетка;
- (6) $\dim J = d \bmod 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (1) есть лемма Арнольда А.3.3; (4) сразу следует из А.3.2; (5) следует из того, что $u_n(X)$, как и любой характеристический класс многообразия X , реализуется формальной линейной комбинацией вещественных циклов размерности k (см., например, [101]) и, следовательно, принадлежит подгруппе $H^{-\epsilon}$.

Чтобы доказать (2), заметим, что как стандартная, так и скрученная $\mathbb{Z}_2$ -формы пересечений равны нулю на образе кручения $\text{Tors } H_n(X; \mathbb{Z})$ (что справедливо и для соответствующих $\mathbb{Z}$ -форм). Следовательно, их характеристические классы аннулируют $\text{Tors } H_n(X; \mathbb{Z})$ и потому целочисленны.

Утверждение (3) следует из А.1.3(1) и из геометрической конструкции точной последовательности Смита (см. А.1.5). Действительно, $\text{Ker } \text{pr}_*$ в А.1.1 состоит из геометрически инвариантных и, следовательно, conj_* -инвариантных циклов, которые, таким образом, принадлежат $\text{Ker}(1 + \text{conj}_*)$. Это доказывает первое неравенство в (3); второе неравенство очевидно, так как $\dim J$ равна $\dim \text{Ker}(1 + \text{conj}_*)$ для инволюции, рассматриваемой на $H \otimes \mathbb{Z}_2$.

Доказательство утверждения (6) основано на следующих двух леммах:

2.7.7. ЛЕММА. *Если замкнутое многообразие M имеет четную вещественную размерность $n = 2k$, то $\beta_*(M) = (-1)^k \chi(M) \bmod 4$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $k = 2l$ четно, то в силу двойственности Пуанкаре

$$\beta_*(M) - \chi(M) = 2 \sum_{r=0}^{k-1} \beta_{2r+1}(M) = 4 \sum_{r=0}^{l-1} \beta_{2r+1}(M).$$

Доказательство для нечетного k аналогично.

2.7.8. ЛЕММА. *Если X — неособое замкнутое комплексное многообразие четной комплексной размерности $n = 2k$, то $\sigma(X) = (-1)^k \chi(X) \bmod 4$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эта лемма доказывается аналогично предыдущей с использованием T_y -характеристики (см. 2.4), равенств $\sigma(X) = T_1(X)$ и $\chi(X) = T_{-1}(X)$ и симметрии $T_{n,i} = (-1)^n T_{n,n-i}$ коэффициентов $T_{n,i}$ в $T_y(X) = \sum T_{n,i} y^i$ (см. [49; п. 1.8]; заметим, что $T_{n,i}$ принимают целые значения на любом, не обязательно кэлеровом, комплексном многообразии).

Леммы 2.7.7 и 2.7.8, примененные к многообразию X , дают сравнение $\beta_*(X) = (-1)^k \sigma(X) \bmod 4$. Поэтому (4) превращается в $(-1)^k \beta_*(\mathbb{R}X) = (-1)^k \beta_*(X) - 2\sigma(H^\epsilon) \bmod 4$ и (6) следует из сравнения $\sigma(H^\epsilon) = \dim q^\epsilon \bmod 2$ (эта решетка четна согласно (5)) и равенства $\dim J = \dim q^\pm$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Лемму 2.7.8 можно распространить на почти комплексные многообразия, воспользовавшись формулой Атийи–Дюпона [8] (см. [126]) или кобордизмами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.7.1. Из (3) и (6) в 2.7.6 следует, что $\dim q^\epsilon = \dim J = 0$ или 1 (где по-прежнему $\epsilon = (-1)^{k+1}$), если выполнены условия соответственно (1) или (2) в 2.7.1. Поэтому 2.7.1(1) и (2) следуют из В.2.2, примененного к H^ϵ в 2.7.6(4).

Аналогичные соображения показывают, что в условиях 2.7.1(3) дискриминантные формы $q^\pm$, размерности которых не превосходят 2, четны и согласно В.3.1 разность $[\mathbb{R}X] - u_n(X)$ аннулирует все целочисленные классы в $H_n(X)$, т.е. принадлежит

образу кручения $\text{Tors } H_n(X; \mathbb{Z})$. Поэтому, опять используя 2.7.6(3), где оба неравенства обращаются в равенства, заключаем, что каждый элемент группы $H_n(X)/H_n(X; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_2$ имеет conj_* -инвариантного представителя. Следовательно, B и B^{conj} совпадают на таких классах и разность $u_n(X) - [\mathbb{R}X]$ равна нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.7.2. Так как $[\mathbb{R}X]$ и $u_n(X)$ совпадают, то из В.3.1 следует, что $q^\pm$ – четные дискриминантные решетки. Следовательно, $\text{Br } q^\pm = 0 \pmod{4}$ и применимо утверждение 2.7.6(4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2.7.3. Утверждение следует из 2.7.6(1) и 2.7.6(3); согласно 2.7.6(3) инволюция conj_* действует тождественно на $H_*(X)$.

2.8. Дополнительные запреты.

2.8.1. ОБОБЩЕННОЕ НЕРАВЕНСТВО АРНОЛЬДА. Пусть X – неособое замкнутое комплексное кэлерово многообразие четной размерности $n = 2k$, наделенное вещественной структурой. Тогда число p_- ориентируемых компонент многообразия $\mathbb{R}X$ с неотрицательной эйлеровой характеристикой удовлетворяет неравенству

$$p_- \leq \frac{1}{4}(b_n(X) - (-1)^k \sigma(X)) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k (-1)^j h^{k-j, k-j}(X) + \frac{1}{2}((-1)^k - 1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это неравенство получается точно так же, как в [2], из неравенства $p_- \leq \sigma_\epsilon^{+1}$, где $\epsilon = (-1)^{k+1}$, а $\sigma_\pm^{+1}$ – индексы инерции формы пересечений многообразия X , суженной на $H_n^{+1}(X; \mathbb{Z})$. Для нахождения σ_ϵ^{+1} воспользуемся равенствами

$$\begin{aligned} \sigma_+^{+1} + \sigma_-^{+1} + \sigma_+^{-1} + \sigma_-^{-1} &= b^n(X), \\ \sigma_+^{+1} - \sigma_-^{+1} + \sigma_+^{-1} - \sigma_-^{-1} &= \sigma(X), \\ \sigma_+^{+1} - \sigma_-^{+1} - \sigma_+^{-1} + \sigma_-^{-1} &= (-1)^k \chi(\mathbb{R}X), \\ \sigma_+^{+1} + \sigma_-^{+1} - \sigma_+^{-1} - \sigma_-^{-1} &= \text{Trace}(\text{conj}^*, H^n(X; \mathbb{Z})). \end{aligned}$$

В правой части последнего равенства группу $H^n(X; \mathbb{Z})$ можно заменить на $H^{k,k}(X)$, и мы получим оценку для σ_ϵ^{+1} , сравнив

$$\text{Trace}(\text{conj}^*, H^{k,k}(X)) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \text{Trace}(\text{conj}^*, P^{k-j, k-j}(X))$$

с (2.4.2) и использовав очевидное неравенство

$$-\text{Trace}(\text{conj}^*, P^{i,i}(X)) \leq \dim P^{i,i}(X) = h^{i,i}(X) - h^{i-1, i-1}(X).$$

(При нечетном k можно также воспользоваться тем, что $-\text{Trace}(\text{conj}^*, P^{0,0}(X))$ дает вклад в σ_ϵ^{+1} , и тем, что $\text{conj}^* = \text{id}$ на $P^{0,0}(X)$.)

2.8.2. Для подмножества $S \subset \mathbb{RP}^N$ положим

$$\ell(S) = \max\{-1, i \mid \text{in}^*: H^i(\mathbb{RP}^N) \rightarrow H^i(S) \text{ ненулевой}\},$$

где $\text{in}: S \hookrightarrow \mathbb{RP}^N$ – включение. Если $A \subset \mathbb{P}^N$ – вещественное проективное алгебраическое многообразие, положим $\ell(A) = \ell(\mathbb{R}A)$. Ясно, что $\text{in}^*: H^i(\mathbb{RP}^N) \rightarrow H^i(\mathbb{R}A)$ – ненулевой гомоморфизм для всех $i \leq \ell(A)$ и что $\ell(A) = n = \dim A$, если степень $\deg A$ четна. (Напомним, что степень многообразия A называется число его точек пересечения с общей $(N - n)$ -мерной плоскостью в $\mathbb{P}^N$.) Следующее простое утверждение сразу следует из двойственности Пуанкаре и точности стандартных кохомологических последовательностей.

2.8.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если $\deg A$ четна, то $\ell(\mathbb{RP}_+) = \ell(A) \leq \ell(\mathbb{RP}_-) = n - l(A)$ и, в частности, $\ell(A) \leq \frac{n}{2}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $\deg A$ четна, из 2.8.3 и замечания после 2.3.2 следует, что двулистное накрывающее пространства $\mathbb{P}^{n+1}$ есть M -многообразие (при соответствующем выборе вещественной структуры накрывающего) тогда и только тогда, когда A есть $(M - d)$ -многообразие, где для n четного

$$d = \begin{cases} n - 2\ell(\mathbb{R}A), & \text{если } m = 0 \bmod 4, \\ 1, & \text{если } m = 2 \bmod 4 \text{ и } n > 2\ell(\mathbb{R}A), \\ 0, & \text{если } m = 2 \bmod 4 \text{ и } n = 2\ell(\mathbb{R}A), \end{cases}$$

и для n нечетного

$$d = \begin{cases} n - 2\ell(\mathbb{R}A) - 1, & \text{если } m = 0 \bmod 4, \\ 0, & \text{если } m = 2 \bmod 4. \end{cases}$$

Другое следствие тех же вычислений – улучшенная оценка Смита–Тома: *многообразие A не может быть $(M - l)$ -многообразием при $l < d$ для указанных выше d .*

Инвариант $\ell(\mathbb{R}A)$ был введен в [59]; результаты работы [59] были позже улучшены И. О. Калининым [54].

2.8.4. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СРАВНЕНИЯ ДЛЯ $(M - d)$ -ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ. Пусть $A \subset \mathbb{P}^{n+1}$ – вещественная $(M - d)$ -гиперповерхность степени m и четной размерности n . В случае, когда $m = \pm 2 \bmod 8$ и $n/2 - \ell(A)$ нечетно,

- (1) если $d = n/2 - \ell(A)$, то $\chi(\mathbb{R}A) = \sigma(A) \mp 2 \bmod 16$;
- (2) если $d = n/2 - \ell(A) + 1$, то $\chi(\mathbb{R}A) = \sigma(A)$, $\sigma(A) \mp 4 \bmod 16$.

В случае, когда $m = 0 \bmod 8$ и $\ell(A) < n/2$,

- (3) если $d = n - 2\ell(A)$, то $\chi(\mathbb{R}A) = \sigma(A) \bmod 16$;
- (4) если $d = n - 2\ell(A) + 1$, то $\chi(\mathbb{R}A) = \sigma(A) \pm 2 \bmod 16$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.8.4 (см. [54]). Не вдаваясь глубоко в детали, мы лишь наметим основные идеи. Как и другие экстремальные сравнения, 2.8.4 выводится из 2.7.6(4) и (5) с использованием В.2.2. В решающий момент вместо 2.7.6(3) и (6) используется следующая лемма, дающая оценку для $\dim J = \dim q^\pm$.

2.8.5. ЛЕММА (см. [54]). Пусть $A \subset \mathbb{P}^{n+1}$ — вещественная $(M-d)$ -гиперповерхность размерности n и степени m .

- (1) Если $\ell(A) \geq [(n-1)/2]$, то $\dim J = d$.
 (2) Если $\ell(A) < [(n-1)/2]$, то

$$\dim J = d - \begin{cases} 2([(n-1)/2] - \ell(A)) & \text{при } m \equiv 0 \pmod{4}, \\ 2[(n/2 - \ell(A))/2] & \text{при } m \equiv 2 \pmod{4} \text{ и } n \text{ четным}, \\ (n-1)/2 - \ell(A) & \text{при } m \equiv 2 \pmod{4} \text{ и } n \text{ нечетным}. \end{cases}$$

(Здесь $[x]$ обозначает целую часть числа x .)

Лемма 2.8.5 доказывается с использованием спектральной последовательности Калинина (${}^rE^*$, ${}^rd^*$), см. А.2. Если A — регулярное полное пересечение в $\mathbb{P}^N$, разность $d - \dim J$ равна числу нетривиальных дифференциалов ${}^rd^i$ с $r > 1$. Лемма 2.8.5 получена в [54] явным вычислением членов ${}^rE^*(\mathbb{P}^N)$ и ${}^rE^*(\mathbb{P}^{n+1} \setminus A)$. Это вычисление дает также еще один ключевой вклад в доказательство теоремы 2.8.4 (см. следующую лемму). Обозначим через h образующую группы $H^2(\mathbb{P}^N)$ и положим $\delta_h(A) = 0$, если $n = \dim A$ нечетно или n четно и $\text{in}^* h^{n/2} \in \text{Im}(1 + \text{conj}^*)$ в $H^n(A; \mathbb{Z}_2)$, и $\delta_h(A) = 1$ в противном случае.

2.8.6. ЛЕММА (см. [54]). Пусть $A \subset \mathbb{P}^{n+1}$ — вещественная гиперповерхность четной размерности n и степени m . При $m \equiv 2 \pmod{4}$

$$\delta_h(A) = \begin{cases} 0, & \text{если } \ell(A) < n/2 \text{ и } \ell(A) = n/2 - 1 \pmod{2}, \\ 1 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

при $m \equiv 0 \pmod{4}$

$$\delta_h(A) = \begin{cases} 0, & \text{если } \ell(A) < n/2, \\ 1, & \text{если } \ell(A) \geq n/2. \end{cases}$$

В условиях теоремы 2.8.4 из этой леммы следует, что $\text{in}^* h^{n/2} \in \text{Im}(1 + \text{conj}^*)$. Это дает дополнительную информацию о $\text{Wg } q^\pm$, когда $\dim q^\pm = \dim J$ мала (см. В.1.1).

2.9. Структуры, наследуемые вещественной частью. В оставшейся части этого раздела мы кратко обсудим несколько конструкций, в какой-то степени обобщающих понятие комплексной ориентации разбивающей вещественной кривой.

2.9.1. СПИНОРНЫЕ ОРИЕНТАЦИИ. Пусть X — неособое многообразие с вещественной структурой conj . Тогда любая conj -инвариантная спинорная структура на X естественным образом определяет полуориентацию (т.е. пару противоположных ориентаций) на $\mathbb{R}X$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если X спинорное и $H_1(X) = 0$, то единственная спинорная структура на X , очевидно, conj -инвариантна и потому $\mathbb{R}X$ имеет каноническую полуориентацию. В частности, $\mathbb{R}X$ ориентируемо (ср. 3.4.2), что справедливо и в более широком случае инволюций на произвольных многообразиях и известно как теорема Эдмондса [31].

КОНСТРУКЦИЯ. Сравним ориентации в двух точках $x_1, x_2 \in \mathbb{R}X$. Соединим x_1, x_2 путем γ в X , представим ориентации в них касательными n -реперами Ξ_1, Ξ_2 (где $n = \dim_{\mathbb{C}} X = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}X$), продолжим $(\Xi_1, \sqrt{-1}\Xi_1)$ и $(\Xi_2, \sqrt{-1}\Xi_2)$ до поля $2n$ -реперов $(\xi_1, \dots, \xi_{2n})$ на γ и найдем значение выбранной спинорной структуры на петле $\gamma \circ \text{conj}_* \gamma$, где $\text{conj}_* \gamma$ оснащена полем реперов

$$(\text{conj}^* \xi_1, \dots, \text{conj}^* \xi_n, -\text{conj}^* \xi_{n+1}, \dots, -\text{conj}^* \xi_{2n}).$$

Будем считать эти ориентации согласованными, если в результате получится 0. Прямая проверка показывает, что если спинорная структура conj -инвариантна, результат не зависит от сделанного выбора.

2.9.2. Штифелевы ориентации. Напомним, что ориентацию гладкого многообразия Y можно определить как гомотопический класс поднятий в BSO классифицирующего отображения $f_Y: Y \rightarrow BO$ касательного расслоения многообразия Y . Расслоение $BSO \rightarrow BO$ можно, в свою очередь, рассматривать как $K(\mathbb{Z}_2, 0)$ -расслоение, убивающее $w_1 \in H^1(BO)$. Обобщая этот подход, можно зафиксировать характеристический класс $\omega \in H^{i+1}(BO)$ и определить ω -структуру на Y как гомотопический класс поднятий отображения f_Y в пространство $K(\mathbb{Z}_2, i)$ -расслоения $BO_\omega \rightarrow BO$, убивающего ω . Легко проверить, что Y допускает ω -структуру тогда и только тогда, когда $\omega(Y) = 0$, и что для непустого Y множество ω -структур на Y является аффинным пространством над $H^i(Y)$ (см., например, [24]). Таким образом, ориентации и спинорные (точнее, Pin^+ -) структуры являются соответственно w_1 - и w_2 -структурами.

Если $\omega = w_{i+1}$ -класс Штифеля–Уитни, можно заменить $BO_\omega \rightarrow BO$ соответствующим ассоциированным расслоением Штифеля и показать, что w_i -структуру можно рассматривать как $\mathbb{Z}_2$ -значную функцию на гомотопических классах i -циклов, оснащенных полями $(n-i)$ -реперов (где $n = \dim Y$). Это приводит к следующему обобщению понятия комплексной ориентации разбивающей кривой (см. [120] или более формальный подход – в [23]). Пусть X – неособое комплексное многообразие с вещественной структурой, $\dim X = n$ и $[\mathbb{R}X]$ равно нулю в $H_n(X)$. Тогда $\mathbb{R}X$ обладает канонической w_n -структурой, значение которой на $(n-1)$ -цикле γ , оснащенном полем 1-реперов, определяется как коэффициент зацепления с $\mathbb{R}X$ цикла γ , сдвинутого вдоль умноженного на $\sqrt{-1}$ оснащения. (Точнее, это частичная структура, определенная на ядре гомоморфизма включения $H_{n-1}(\mathbb{R}X) \rightarrow H_{n-1}(X)$.) Условие $[\mathbb{R}X] = 0$ обеспечивает корректность определения коэффициента зацепления. Эта конструкция допускает дальнейшее обобщение. Пусть γ есть $(n-i)$ -цикл и $(\xi_1, \dots, \xi_i)$ – его оснащение. Действуя так же, как при геометрическом построении гомоморфизмов Виро (см. А.2), включим γ в $(n-1)$ -цикл γ' , лежащий в X и касающийся оснащения $\sqrt{-1}\xi_1, \dots, \sqrt{-1}\xi_{i-1}$; затем сдвинем γ' вдоль некоторого продолжения поля $\sqrt{-1}\xi_i$ и вычислим коэффициент зацепления сдвинутого цикла с $\mathbb{R}X$. Детальный анализ показывает, что эта конструкция дает частичную w_{n-i+1} -структуру на $\mathbb{R}X$, определенную на ядре гомоморфизма $\text{bv}_{n-1}: H_{n-i}(\mathbb{R}X) \rightarrow {}^iE_{n-1}(X)$ при условии, что $\text{bv}_{n+i-1}[\mathbb{R}X]$ равен нулю в ${}^iE_{n+i-1}(X)$. В частности, из последнего условия следует, что

$$w_n(X) = \dots = w_{n-i+1}(X) = 0.$$

3. Поверхности

3.1. Основные результаты. В этом разделе под *комплексной поверхностью* мы подразумеваем неособое замкнутое комплексно-аналитическое двумерное многообразие. Сначала мы переформулируем некоторые результаты раздела 2 в более топологических терминах.

3.1.1. ТЕОРЕМА. Пусть X – комплексная поверхность с вещественной структурой. Тогда

$$\beta_*(\mathbb{R}X) \leq \beta_*(X) \quad \text{и} \quad \beta_*(\mathbb{R}X) = \beta_*(X) \bmod 2.$$

Пусть, далее, A – неособый четный обильный вещественный дивизор на X и $Y \rightarrow X$ – двулистное накрытие с ветвлением над A . Тогда

$$\begin{aligned} \beta_*(\mathbb{R}X_-) + \beta_*(\mathbb{R}X_+) &\leq \beta_2(X) + \beta_*(A) \quad \text{и} \\ 2\beta_*(\mathbb{R}X_{\pm}) - 4c_0(\mathbb{R}X_{\pm}) &\leq 2\beta_2(X) + \beta_*(A), \end{aligned}$$

где $\mathbb{R}X_{\pm}$ – две половины множества $\mathbb{R}X \setminus \mathbb{R}A$ (см. 2.2) и $c_0(\mathbb{R}X_{\pm})$ – число замкнутых компонент поверхности $\mathbb{R}X_{\pm}$, нетривиально накрываемых компонентами поверхности $\mathbb{R}Y_{\pm}$.

Согласно критерию Накая–Мойшезона (см., например, [10]) эффективный дивизор A на неособой кэлеровой поверхности X обилеи тогда и только тогда, когда $A \circ D > 0$ для любой неприводимой кривой $D \subset X$. В общем случае условие обильности в 3.1.1 можно ослабить, потребовав, чтобы множество комплексных точек дивизора A было связным и гомоморфизм включения $H_1(A) \rightarrow H_1(X)$ был эпиморфизмом. При этих предположениях из точной последовательности Смита следует, что $\beta_1(Y) = \beta_1(X)$.

3.1.2. ТЕОРЕМА. Пусть X – комплексная кэлерова поверхность с вещественной структурой. Тогда

$$|\chi(\mathbb{R}X) - 1| \leq \sigma^-(X),$$

где $\sigma^-(X) = \frac{1}{2}[b_2(X) - \sigma(X)]$ – отрицательный индекс инерции формы пересечений поверхности X . Пусть, далее, $A \subset X$ – неособый обильный четный вещественный дивизор на X , для которого существует вещественный дивизор E на X с $2E \sim A$. Тогда

$$\begin{aligned} |\chi(\mathbb{R}X_-) - \chi(\mathbb{R}X_+)| &\leq \sigma^-(X) - b_1(X) + 1 + \frac{1}{4}[A]^2 - \frac{1}{2}\chi(A), \\ |2\chi(\mathbb{R}X_{\pm}) - 1| &\leq 2\sigma^-(X) - b_1(X) + 1 + \frac{1}{4}[A]^2 - \frac{1}{2}\chi(A). \end{aligned}$$

Заметим, что здесь, как и во многих других утверждениях о поверхностях (по крайней мере в этом обзоре), свойство кэлеровости необходимо лишь для того, чтобы инволюция conj_* имела нулевой след на $H_1(X; \mathbb{R})$. Поэтому его можно заменить, например, условием $b_1(X) = 0$. Из более сильного условия $\beta_1(X) = 0$ следовало бы, кроме того, существование дивизора E , о котором говорится в формулировке. Заметим также, что в формулировке теоремы 3.1.2 не участвует никакое накрытие; однако мы не

знаем, остается ли утверждение справедливым, если не будет существовать **вещественного** двулистного накрытия с ветвлением над A .

Условие обильности в последних двух неравенствах можно заменить условием $b_1(Y) = b_1(X)$; в противном случае к правой части каждого неравенства надо прибавить $b_1(Y) - b_1(X)$. Заметим, что, в отличие от 2.4.1, все эти утверждения можно доказать топологически по схеме, указанной в [2]. (Для доказательства второго неравенства надо рассмотреть обе инволюции $T_{\pm}$ на Y и вычислить индексы инерции $\sigma_{\pm}^{\pm 1, \pm 1}$ сужений формы пересечений на собственные подпространства $H_2^{\pm 1, \pm 1}$ пары инволюций. Неравенство тогда будет следовать из того, что $\sigma_{-}^{\pm 1, \mp 1} \geq 0$.) Более того, рассматривая различные классы, реализуемые ориентируемыми компонентами поверхностей $\mathbb{R}X$ и $\mathbb{R}Y$, можно получить усиленные неравенства и их экстремальные свойства. Вот один из примеров:

3.1.3. ТЕОРЕМА. Пусть X — комплексная кэлерова поверхность с вещественной структурой. Тогда

$$-\sigma^{-}(X) \leq 1 - \chi(\mathbb{R}X) \leq \sigma^{-}(X) - 2p_{+},$$

где p_{+} — число ориентируемых компонент поверхности $\mathbb{R}X$ с положительной эйлеровой характеристикой. Если $A \subset X$ — неособый обильный четный вещественный дивизор на X , для которого существует вещественный дивизор E на X с $2E \sim A$, то

$$\chi(\mathbb{R}X_{-}) - \chi(\mathbb{R}X_{+}) \leq \sigma^{-}(X) - b_1(X) + 1 + \frac{1}{4}[A]^2 - \frac{1}{2}\chi(A) - 2q_{+},$$

где q_{+} — число ориентируемых компонент поверхности $\mathbb{R}Y_{+}$ с положительной эйлеровой характеристикой (соответствующих, очевидно, компонентам поверхности $\mathbb{R}X_{+}$ с положительной эйлеровой характеристикой, для которых сужение проекции накрытия $\mathbb{R}Y_{+} \rightarrow \mathbb{R}X_{+}$ есть ориентирующее двулистное накрытие).

Экстремальные свойства сравнений 2.7.1, сравнение Арнольда 2.7.2 и предложение 2.7.3 (так же как и лемма 2.7.6) переносятся на случай поверхностей без изменений. Обобщенное неравенство Арнольда 2.8.1 принимает более простую форму:

3.1.4. НЕРАВЕНСТВО АРНОЛЬДА ДЛЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ. Пусть X — кэлерова поверхность с вещественной структурой. Тогда число p_{-} ориентируемых компонент поверхности $\mathbb{R}X$ с отрицательной эйлеровой характеристикой удовлетворяет неравенству

$$p_{-} \leq \frac{1}{2}(\sigma^{+}(X) - 1),$$

где $\sigma^{+}(X) = \frac{1}{2}[b_2(X) + \sigma(X)]$.

Ниже приводится другой пример усиленного утверждения, справедливого для поверхностей (см. [89], где, фактически, доказывается, что класс $[\mathbb{R}X] \in H_2(X; \mathbb{Z})$ делится на 2^{r+1}). Другие примеры усиленных экстремальных сравнений, учитывающие дополнительные специфические свойства поверхностей, приведены в 3.4.

3.1.5. СРАВНЕНИЕ НИКУЛИНА. Пусть X есть M -поверхность с вещественной структурой и с $H_1(X) = 0$. Если поверхность $\mathbb{R}X$ ориентируема и эйлерова характеристика каждой ее компоненты кратна 2^r для некоторого $r \geq 1$, то $\chi(\mathbb{R}X) = 0 \pmod{2^{r+3}}$.

Если X — регулярное полное пересечение в $\mathbb{P}^q$, то комплексные характеристики, участвующие в 3.1.1–3.1.4 (т.е. топологические инварианты многообразий X и A), можно легко найти по индукции, используя 2.5.5.

3.1.6. Если поверхность X является регулярным полным пересечением в $\mathbb{P}^q$ полистепени $(m_1, \dots, m_{q-2})$, то

$$\begin{aligned} b_1(X) &= 0, & b_2(X) &= \chi(X) - 2, \\ \chi(X) &= \mu_{q-2} (\mu_1^2 - \mu_2 - (q+1)\mu_1 + \tfrac{1}{2}q(q+1)), \\ \sigma(X) &= -\tfrac{1}{3}\mu_{q-2} (\mu_1^2 - 2\mu_2 - q - 1), \end{aligned}$$

где μ_i — i -й элементарный симметрический многочлен от $m_1, \dots, m_{q-2}$. Если, кроме того, A — неособая кривая, высекаемая на X гиперповерхностью степени m , то

$$\chi(A) = -m\mu_{q-2}(m + \mu_1 - q - 1).$$

3.2. Фактор-пространство по комплексному сопряжению. Специфическим свойством поверхностей является то, что множество неподвижных точек инволюции комплексного сопряжения имеет коразмерность 2. Следовательно, фактор-пространство X/conj есть многообразие; более того, легко проверить, что с точностью до изотопии существует единственная гладкая структура на X/conj такая, что проекция $X \rightarrow X/\text{conj}$ является двулистным накрытием с ветвлением над $\mathbb{R}X$.

Полученные четырехмерные многообразия X/conj образуют очень интересный класс. С одной стороны, они тесно связаны с алгебраическими поверхностями; с другой стороны, во многом их свойства совершенно противоположны свойствам алгебраических поверхностей. По гипотезе С. Акбулата инварианты Зайберга–Виттена такого фактор-многообразия равны нулю, если положительный индекс инерции его формы пересечений не меньше 2. Сильным основанием для нее является то, что если $\mathbb{R}X$ имеет компоненту рода ≥ 2 , равенство нулю инвариантов сразу следует из “гладкого варианта” неравенства присоединения, примененного к образу этой компоненты в факторе (указанный вариант этого неравенства, восходящий к Кронхаймеру и Мровке, см. в [110]); для случая $\mathbb{R}X = \emptyset$ гипотеза была доказана Ш. Вонгом [123]. (Если $\mathbb{R}X = \emptyset$, проекция $X \rightarrow X/\text{conj}$ является настоящим (неразветвленным) накрытием и потому можно легко проконтролировать поведение решений уравнения Зайберга–Виттена.) Более того, во многих случаях (см. ниже) фактор-многообразие X/conj вполне разложимо, т.е. представляется в виде связной суммы копий многообразий $\mathbb{P}^2$, $\overline{\mathbb{P}^2}$ и $S^2 \times S^2$. (Напомним, что минимальные алгебраические поверхности неприводимы.) Таким образом, во многих случаях можно утверждать, что X/conj не допускает ни комплексной, ни симплектической структуры. Имеется замечательное исключение: если X есть КЗ-поверхность, многообразие X/conj диффеоморфно рациональной поверхности или поверхности Энрикеса, см. ниже.

Согласно Арнольду следующий результат принадлежит Максвеллу:

3.2.1. ТЕОРЕМА. *Фактор-пространство $\mathbb{P}^2/\text{con}j$ диффеоморфно S^4 .*

Приведенное ниже доказательство имеется, например, в [76]. Оно немного короче других, более прямых доказательств, опубликованных в [72], [78], [4]. (Возможно, за исключением доказательства в [78]; как объясняется в [5], это красивое явное доказательство было, по-существу, известно Максвеллу; обобщение этого утверждения на высшие размерности также дано в [5].) В основе доказательства лежит следующая теорема Серфа (см. [14]): *группа диффеоморфизмов трехмерной сферы совпадает с группой диффеоморфизмов четырехмерного шара (или, короче, $\Gamma_4 = 0$).* Главным достоинством этого доказательства является то, что его можно обобщить на другие вещественные поверхности, часто с использованием теоремы Лауденбаха–Поэнару [74], распространяющей теорему Серфа на тела с ручками.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим вещественный флаг $\mathbb{P}^0 \subset \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^2$. Факторизуя его по инволюции $\text{con}j$, получим клеточное разбиение фактор-пространства: четырехмерный шар приклеен к кругу. Фактор-пространство замкнутого четырехмерного шара с центром в начале координат пространства $\mathbb{P}^2 \setminus \mathbb{P}^1$ есть четырехмерный шар, а замыкание его дополнения есть замкнутая регулярная окрестность круга $\mathbb{P}^1/\text{con}j$. Как известно, замкнутая регулярная окрестность гладкого круга в гладком четырехмерном многообразии есть четырехмерный шар. Таким образом, два четырехмерных шара приклеиваются друг к другу и согласно теореме Серфа получающееся пространство диффеоморфно S^4 .

Большинство обобщений теоремы 3.2.1 утверждает, что при некоторых условиях, наложенных на поверхность (обычно поверхность должна быть явно построена таким образом, чтобы можно было проконтролировать топологию фактора), фактор-пространство вполне разложимо. Однако имеется также несколько примеров поверхностей, фактор-пространства которых односвязны, но не вполне разложимы. Ниже мы даем краткий перечень известных результатов.

Для непустых квадратик и кубик в $\mathbb{P}^3$ разложимость доказал М. Летиция [75]. (Ввиду 3.2.1 раздутие вещественной точки не меняет фактор-пространство; поэтому для квадратик и связных кубик этот результат следует из 3.2.1.) Для непустых квартик и, более общо, для непустых $K3$ -поверхностей разложимость была доказана С. Дональдсоном [30]. (Любопытно, что некоторые $K3$ -поверхности, так называемые поверхности Френеля–Куммера, связаны с электромагнитной теорией Максвелла.) Подход Дональдсона основан на изменении комплексной структуры в семействе твисторов и преобразовании вещественной структуры в голоморфную инволюцию, умножающую голоморфные формы на -1 ; при этом фактор-пространство становится рациональной поверхностью, диффеоморфной, очевидно, $\mathbb{P}^2 \# k\overline{\mathbb{P}^2}$ или $S^2 \times S^2$.

То, что фактор является вполне разложимым, доказано для двулистных накрытий плоскости, разветвленных над кривыми степени $2k$, вещественная часть которых состоит из единственного гнезда глубины k (С. Акбулат [1]), или над кривыми, полученными малым возмущением объединения вещественных прямых (С. Финашин [36]). Финашин распространил эти результаты на двулистные накрытия квадратик с ветвлением над малыми возмущениями объединений образующих и на некоторые регулярные полные пересечения в $\mathbb{P}^N$, рекурсивно получаемые возмущением объединений. Для более широкого класса плоских кривых он доказал, что факторы соответствующих

двулистных накрытий плоскости становятся вполне разложимыми после добавления нескольких копий многообразия $\overline{\mathbb{P}^2}$.

Свойство фактора быть вполне разложимым справедливо для всех вещественных структур на рациональных поверхностях (доказательство основано на классификации вещественных рациональных поверхностей, см. 3.6.1) и для всех вещественных поверхностей Энрикеса (использование модифицированного трюка Дональдсона, см. конец п. 3.7, позволяет свести случай поверхностей Энрикеса к случаю рациональных поверхностей). Подробности см. в [37].

Пример комплексной поверхности с вещественной структурой, фактор которой не является вполне разложимым, построен С. Финашиным и Е. Шустинным [39]. Этот фактор является односвязным спинорным многообразием с ненулевой сигнатурой (и, следовательно, не диффеоморфным многообразию $k(S^2 \times S^2)$). В настоящее время неизвестно, существуют ли поверхности, факторы которых по комплексному сопряжению не раскладываются в связную сумму копий многообразий $\mathbb{P}^2$, $\overline{\mathbb{P}^2}$, $S^2 \times S^2$ и $K3$ -поверхностей (добавление $K3$ -поверхностей позволяет получать спинорные многообразия с ненулевой сигнатурой).

3.3. Комплексное разбиение и квадратичная форма Понтрягина–Виро.

Пусть X – комплексная поверхность с вещественной структурой, $H_1(X) = 0$, и пусть A – вещественная кривая на X . (Мы не исключаем случай $A = \emptyset$.) Говорят, что пара (X, A) относится к *характеристическому типу*, если $[\mathbb{R}X] + [A] = w_2(X)$ в $H_2(X)$. Обозначим через $\text{pr}: X \rightarrow X'$ проекцию на фактор-пространство $X' = X/\text{conj}$. Из точности последовательности Смита для автоморфизма этого накрытия и формулы проекции $w_2(X) = \text{pr}^* w_2(X') + D^{-1}[\mathbb{R}X]$ следует, что $\text{rel } w_2(X') = [A']$ в $H_2(X', \mathbb{R}X)$ (напомним, что $A' = A/\text{conj}$). Таким образом, класс $[\mathbb{R}A] = \partial w_2(X')$ равен нулю в $H_1(\mathbb{R}X)$, и потому существует такая поверхность $\mathbb{R}X_+^w \subset \mathbb{R}X$, что $\partial \mathbb{R}X_+^w = \mathbb{R}A$, причем $\mathfrak{A}_+^w = \mathbb{R}X_+^w \cup A'$ реализует класс $w_2(X')$. Пусть $\mathbb{R}X_-^w$ – замыкание множества $\mathbb{R}X \setminus \mathbb{R}X_+^w$. Так как $\mathbb{R}X$ гомологично нулю в X' , поверхность $\mathfrak{X}_-^w = \mathbb{R}X_-^w \cup A'$ также реализует класс $w_2(X')$. Разложение $\mathbb{R}X = \mathbb{R}X_+^w \cup \mathbb{R}X_-^w$, удовлетворяющее этим условиям, единственно, поскольку опять же в силу точности последовательности Смита $\dim \text{Ker}[H_2(\mathbb{R}X) \rightarrow H_2(X')] = 1$. Оно называется *комплексным разбиением* пары (X, A) .

Так как $H_1(X) = 0$, *поверхности Арнольда* $\mathfrak{A}_\pm^w$, являясь характеристическими, обладают каноническими Pin^- -структурами и соответствующими формами Рохлина–Гийю–Марена, см. приложение С. Обозначим эти формы через $q_\pm^w$, а их сужения на $\mathbb{R}X_\pm^w$ – через $q_\pm^w$. Легко проверить, что $q_\pm^w$ равны нулю на ядре гомоморфизма включения $H_1(\mathbb{R}X_\pm^w) \rightarrow H_1(\mathbb{R}X)$.

Следующий результат принадлежит Г. Б. Михалкину [81].

3.3.1. ЛЕММА. При сделанных предположениях

$$\chi(\mathbb{R}X_-^w) = \frac{1}{4}[\chi(\mathbb{R}X) - \sigma(X)] + \frac{1}{2}[A]^2 + \text{Br } q_-^w \pmod{8}.$$

3.3.2. ТЕОРЕМА. Для указанных выше X , A пусть форма q_-^w равна нулю на образе группы $H_1(\mathbb{R}A)$. Положим $R = \frac{1}{4}(\chi(\mathbb{R}X) - \sigma(X) + [A]^2) + \text{Br } q_-^w$.

- (1) Если A есть M -кривая, то $\chi(\mathbb{R}X_-^w) = R \pmod{8}$.
- (2) Если A есть $(M - 1)$ -кривая, то $\chi(\mathbb{R}X_-^w) = R \pm 1 \pmod{8}$.

- (3) Если A есть $(M-2)$ -кривая и $\chi(\mathbb{R}X_-^w) = R+4 \bmod 8$, то A принадлежит типу I.
- (4) Если A принадлежит типу I, то $\chi(\mathbb{R}X_-^w) = R \bmod 4$.

Заметим, что лемма 3.3.1 и теорема 3.3.2 имеют топологическую природу и потому справедливы для гибких кривых на гибких поверхностях; в последнем случае A может быть даже неориентируемой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЙ 3.3.1 и 3.3.2. Лемма 3.3.1 следует из сравнения Рохлина–Гийю–Марена [46] и непосредственного вычисления индекса пересечения: $[\mathfrak{A}_-^w] \circ [\mathfrak{A}_-^w] = \frac{1}{2}[A]^2 - 2\chi(\mathbb{R}X_-^w)$. Доказательство теоремы 3.3.2 повторяет одно из доказательств классического экстремального сравнения для плоских кривых (см. [77]); оно основано на лемме 3.3.1, аддитивности инварианта Брауна и следующих очевидных фактах: если A есть $(M-d)$ -кривая, то $\dim H_1(A') = d$; поверхность A' ориентируема тогда и только тогда, когда A принадлежит типу I.

Следующее предложение сразу следует из определения формы Рохлина–Гийю–Марена и теоремы 3.3.2:

3.3.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Сужения форм $q_\pm^w$ на $H_1(A')$ отличаются друг от друга на 2ω , где ω – характеристический класс накрытия $A \setminus \mathbb{R}A \rightarrow A' \setminus \mathbb{R}A$. Следовательно, формы $q_\pm^w$ могут обращаться в нуль на образе группы $H_1(\mathbb{R}A)$ только одновременно, и в этом случае*

$$\mathrm{Br} q_+^w + \mathrm{Br} q_-^w = \frac{1}{2}(\chi(\mathbb{R}X) + \sigma(X) - [A]^2) \bmod 8,$$

а если A принадлежит типу I, то

$$\chi(\mathbb{R}X_+^w) - \chi(\mathbb{R}X_-^w) = \mathrm{Br} q_+^w - \mathrm{Br} q_-^w \bmod 8.$$

(Для гибких кривых в первом сравнении A должна быть ориентируемой; второе сравнение справедливо и для неориентируемой кривой A .)

Указанные сужения $q_\pm^w$ можно вычислить, используя спектральную последовательность Калинина, см. А.2. Покажем, что из двух форм $q_\pm^w$ можно получить одну квадратичную форму на $H_1(\mathbb{R}X)$, которая зависит только от топологии поверхности (X, conj) и от класса $[A] \in H_2(X; \mathbb{Z})$.

Зафиксируем такой класс $c \in H_2(X; \mathbb{Z})$, что $\mathrm{conj}_* c = -c$ и $c = [\mathbb{R}X] + w_2(X) \bmod 2$. Выберем $x \in H_1(\mathbb{R}X; \mathbb{Z})$ и найдем такую целочисленную цепь x' в X , что $\partial x' = x$. (При этом может оказаться необходимым умножить цикл x на нечетное число, что не влияет на дальнейшее, поскольку предполагается лишь, что $H_1(X) = 0$.) Легко проверить, что $(1 - \mathrm{conj}_*)x'$ – целочисленный цикл и что вычет

$$\mathcal{P}_c(x) = [(1 - \mathrm{conj}_*)x']^2 + c \circ (1 - \mathrm{conj}_*)x' \bmod 4$$

не зависит от выбора цепи x' . Более того, отображение $x \mapsto \mathcal{P}_c(x)$ есть квадратичное расширение формы пересечений $(x, y) \mapsto x \circ y$; к тому же так как c превращается в 0 в ${}^\infty E_2$, то $\mathcal{P}_c(-x) = \mathcal{P}_c(x) + 2(c \circ \mathrm{bv}_2 x) = \mathcal{P}_c(x)$ и, значит, $\mathcal{P}_c$ пропускается через $H_1(\mathbb{R}X)$. Функция $\mathcal{P}_c: H_1(\mathbb{R}X) \rightarrow \mathbb{Z}_4$ называется *квадратичной формой Понтрягина–Виро*.

3.3.4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Справедливы следующие утверждения:*

- (1) $\mathcal{P}_{c+2e}(x) = \mathcal{P}_c(x) + 2(e \circ \text{bv}_2 x)$ для любого $e \in H_2(X; \mathbb{Z})$ с $\text{conj}_* e = -e$;
- (2) $\text{Br } \mathcal{P}_c = \frac{1}{2}[\chi(\mathbb{R}X) + \sigma(X) - c^2] \bmod 8$;
- (3) *если A – такая (гибкая) вещественная кривая на X , что пара (X, A) принадлежит характеристическому типу, то $q_{\pm}^w$ являются сужениями формы $\mathcal{P}_{[A]}$ на $\mathbb{R}X_{\pm}^w$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) сразу следует из определения; (3) доказывается непосредственным вычислением индексов перепонок. Чтобы доказать (2), достаточно построить такую ориентируемую гибкую кривую A на X , что пара (X, A) принадлежит характеристическому типу и $\mathcal{P}_{[A]}$ равно нулю на $\mathbb{R}A$ (или $\mathbb{R}A = \emptyset$); утверждение для $\mathcal{P}_{[A]}$ тогда будет следовать из (3) и предложения 3.3.3, и его можно распространить на другие значения c , используя (1) и В.1.5(3). Такую кривую можно легко построить: поскольку $[\mathbb{R}X] + w_2(X) = 0$ в ${}^{\infty}E_2$, существует такой класс $f \in H_2(X; \mathbb{Z})$, что $(1 - \text{conj}_*)f = [\mathbb{R}X] + w_2(X) \bmod 2H_2(X; \mathbb{Z})$. Реализуем f гладкой ориентируемой поверхностью F , трансверсальной к $\mathbb{R}A$, и возмутим особенности поверхности $F \cup (-\text{conj } F)$ в согласии с ориентацией.

Упомянем о двух специальных случаях формы Понтрягина–Виро. Целочисленное поднятие скласса $w_2(X)$ соответствует Spin^C -структуре на X . Поэтому если $[\mathbb{R}X] = 0$ в $H_2(X)$, соответствие $c \mapsto \mathcal{P}_c$ позволяет для любой Spin^C -структуры на X получить Pin^- -структуру на $\mathbb{R}X$ (ср. 2.9.2; это соответствие можно продолжить на все, не обязательно косоинвариантные относительно conj_* , классы c , используя 3.3.4(1)). Подобное соответствие имеется также в случае, когда поверхность $\mathbb{R}X$ ориентируема, но не обязательно гомологична нулю; оно имеет вид $c \mapsto \mathcal{P}_{c-[\mathbb{R}X]}$, где $[\mathbb{R}X]$ – целочисленный фундаментальный класс поверхности $\mathbb{R}X$, наделенной некоторой ориентацией. (Ввиду 3.3.4(1) это отображение не зависит от выбранной ориентации, поскольку ориентируемые компоненты поверхности $\mathbb{R}X$ аннулируют $\text{bv}_2 H_1(\mathbb{R}X)$.)

Другой специальный случай, о котором стоит упомянуть, – когда поверхность $\mathbb{R}X$ сама является характеристической в X (и, следовательно, $[A] = 0 \bmod 2H_2(X; \mathbb{Z})$). В этом случае можно взять $c = 0$, тогда полученная квадратичная форма $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0$ есть не что иное, как форма Рохлина–Гийю–Марена на $\mathbb{R}X$. Имеется другой способ построения формы $\mathcal{P}$, объясняющий ее название: легко проверить, что в силу равенства $[\mathbb{R}X] = w_2(X)$ квадрат Понтрягина $P_2: H_2(X) \rightarrow \mathbb{Z}_4$ можно спустить в ${}^2E_2 = {}^{\infty}E_2$ и положить $\mathcal{P} = P_2 \circ \text{bv}_2: H_1(\mathbb{R}X) \rightarrow \mathbb{Z}_4$. В таком виде эта конструкция допускает обобщения на неоднородные классы в $H_*(\mathbb{R}X)$ и на многообразия большей размерности, не обязательно односвязные. А именно, пусть X – замкнутое комплексное многообразие с вещественной структурой, и пусть $\dim X = 2n$. (На самом деле, большинство утверждений можно модифицировать так, чтобы они стали справедливыми для любого замкнутого многообразия с сохраняющей ориентацию инволюцией, размерность которого делится на 4; подробности можно найти в [25] или [29].) Предположим, что квадрат Понтрягина $P_{2n}: H_{2n}(X) \rightarrow \mathbb{Z}_4$ спускается в ${}^{\infty}E_{2n}(X)$, и определим форму Понтрягина–Виро, положив $\mathcal{P} = P_{2n} \circ \text{bv}_{2n}: \mathcal{F}^{2n} \rightarrow \mathbb{Z}_4$. При таком определении форма $\mathcal{P}$ является квадратичным расширением гомологического спаривания Калинина $*$: $\mathcal{F}^{2n} \otimes \mathcal{F}^{2n} \rightarrow \mathbb{Z}_2$.

Следующие утверждения доказаны в [25] (см. также [29]).

3.3.5. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Форма Понтрягина–Виро определена тогда и только тогда, когда класс Ву $u_{2n}(X' \setminus \mathbb{R}X)$ равен нулю. В этом случае $\text{Br } \mathcal{P} = \sigma(X) \bmod 8$.*

3.3.6. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Квадрат Понтрягина P_{2n} спускается в ${}^2E_{2n}$ тогда и только тогда, когда $[\mathbb{R}X]$ реализует класс Ву $u_{2n}(X)$. Таким образом, равенство $[\mathbb{R}X] = u_{2n}(X)$ является необходимым условием возможности определить форму $\mathcal{P}$. Следующие условия являются достаточными:*

- (1) X есть M -многообразие;
- (2) $[\mathbb{R}X] = u_{2n}(X)$ и X является $\mathbb{Z}_2$ -Галуа максимальным (см. А.1.4);
- (3) $[\mathbb{R}X] = u_{2n}(X)$ и $H_i(X) = 0$ для $0 < i < 2n$.

Пусть теперь $n = 1$, т.е. X – поверхность. Условие $u_2(X' \setminus \mathbb{R}X) = 0$ в 3.3.5 равносильно требованию: класс $u_2(X') = w_2(X')$ лежит в образе гомоморфизма включения $H_2(\mathbb{R}X) \rightarrow H_2(X')$, т.е. $\mathbb{R}X$ содержит поверхность, которая в X' является характеристической. Такая поверхность $F \subset \mathbb{R}X$ характеризуется свойством: $\mathcal{P}(x) = 2([F] \circ x) \bmod 4$ для всех $x \in \mathcal{F}^2 \cap H_0(\mathbb{R}X)$. Возьмем такую F , обозначим через H_F образ группы $\mathcal{F}^2$ при естественном отображении $\mathcal{F}^2 \hookrightarrow H_*(\mathbb{R}X) \rightarrow H_1(\mathbb{R}X) \rightarrow H_1(F)$ и определим квадратичную функцию $\mathcal{P}_F: H_F \rightarrow \mathbb{Z}_4$ следующим образом:

$$x_1 \mapsto \mathcal{P}(x_1 + x_0) + 2([F] \circ x_0),$$

где $x_0 \in H_0(\mathbb{R}X)$ – любой элемент, для которого $x_1 + x_0 \in \mathcal{F}^2$.

3.3.7. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Функция $\mathcal{P}_F: H_F \rightarrow \mathbb{Z}_4$ совпадает с формой Розлина–Гийю–Марена характеристической поверхности $F \subset X'$. В частности, H_F совпадает с ядром гомоморфизма включения $H_1(F) \rightarrow H_1(X')$, подпространство $H_F \subset H_1(F)$ информативно (относительно $\mathcal{P}_F$, определение информативности см. в В.1) и*

$$\chi(F) = \frac{1}{4}[\chi(\mathbb{R}X) - \sigma(X)] + \text{Br } \mathcal{P}_F \bmod 8.$$

Если, кроме того, $H_1(X) = 0$, из последнего утверждения следует 3.3.4(3) (для $A = \emptyset$); более того, в этом случае можно проверить, что комплексное разбиение поверхности $\mathbb{R}X$, определенное в 3.3, можно выразить в терминах формы $\mathcal{P}$: компоненты C_1, C_2 поверхности $\mathbb{R}X$ лежат обе в $\mathbb{R}X_+^w$ или обе в $\mathbb{R}X_-^w$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{P}(\langle C_1 - C_2 \rangle) = 0$.

3.4. Спинорные сравнения. Ниже мы приводим два экстремальных сравнения, которые связаны с $w_2(X)$ и ориентируемостью поверхности $\mathbb{R}X$. Другие подобные результаты, использующие более тонкую информацию о гомотопическом типе многообразия X , можно найти в 3.7 (см. также монографию [29], посвященную детальному изучению вещественных поверхностей Энриквеса; фактически, приведенные ниже неравенства являются побочным продуктом результатов и техники, развитой в [29]).

3.4.1. ЭКСТРЕМАЛЬНОЕ СРАВНЕНИЕ ДЛЯ НЕСПИНОРНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ.

Пусть X – комплексная замкнутая поверхность с вещественной структурой, причем $w_2(X) \neq 0$.

- (1) *Если X есть M -поверхность, то $\mathbb{R}X$ неориентируема.*
- (2) *Если $w_2(X)$ принадлежит образу группы $\text{Tors } H_2(X; \mathbb{Z})$ в $H_2(X)$ и $\mathbb{R}X$ ориентируема, то X есть $(M - d)$ -поверхность, $d \geq 2$ и*

- $\chi(\mathbb{R}X) = \sigma(X) \bmod 16$ при $d = 2$;
- $\chi(\mathbb{R}X) = \sigma(X) \pm 2 \bmod 16$ при $d = 3$;
- $\mathbb{R}X$ принадлежит типу I_{tors} , когда $d = 4$ и $\chi(\mathbb{R}X) = \sigma(X) + 8 \bmod 16$.

3.4.2. ЭКСТРЕМАЛЬНОЕ СРАВНЕНИЕ ДЛЯ СПИНОРНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ. Пусть X – комплексная замкнутая поверхность с вещественной структурой, причем $w_2(X) = 0$.

- (1) Если $H_1(X) = 0$, то $\mathbb{R}X$ ориентируема.
- (2) Если $b_1(X) = 0$ и $\mathbb{R}X$ неориентируема, то X есть $(M - d)$ -поверхность, $d \geq 2$ и
 - $\chi(\mathbb{R}X) = \sigma(X) \bmod 16$ при $d = 2$;
 - $\chi(\mathbb{R}X) = \sigma(X) \pm 2 \bmod 16$ при $d = 3$;
 - $\mathbb{R}X$ принадлежит типу I_{tors} , когда $d = 4$ и $\chi(\mathbb{R}X) = \sigma(X) + 8 \bmod 16$.

Для доказательства сравнений (утверждения (2) в 3.4.2 и в 3.4.1) покажем, что часть группы $T_2(X) = \text{Tors } H_2(X; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_2 \subset H_2(X)$ превращается в 0 в ${}^\infty E_2$; тогда получим, что $\dim J < d$, откуда и будут следовать сравнения (ср. 2.7).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 3.4.1. Класс $w_2(X) \neq 0$ превращается в 0 в ${}^\infty E_2$ тогда и только тогда, когда $\mathbb{R}X$ ориентируема (см. табл. 4 в А.2.6), поэтому утверждение доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 3.4.2. (1) Если существует $x_1 \in H_1(\mathbb{R}X)$ с $x_1^2 = 1$, то $(bv_2 x_1)^2 = 1$. (Класс $bv_2 x_1$ определен, так как $H_1(X) = 0$.) Это противоречит предположению о том, что форма пересечений в $H_2(X)$ и, следовательно, в ${}^\infty E_2$ четна.

(2) По предположению существует $x_1 \in H_1(\mathbb{R}X; \mathbb{Z})$ с $x_1^2 = 1$. Как и в случае (1), заключаем, что $bv_1 x_1 \notin bv_1 H_0(\mathbb{R}X)$. Более того, любая неориентируемая компонента C_i поверхности $\mathbb{R}X$ имеет четный род (иначе $[C_i]^2 = 1 \bmod 2$). Поэтому $bv_1 x_1 \notin \text{Sq}_1 {}^\infty E_2$ и, следовательно, $H_2(X)/H_2(X; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_2$ не содержится в $\text{Im } bv_2$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Утверждение 3.4.2(1) можно также получить из 2.9.1: если $H_1(X) = 0$, то единственная спинорная структура на X , очевидно, conj -инвариантна, и конструкция, указанная в 2.9.1, дает каноническую полуориентацию поверхности $\mathbb{R}X$.

3.5. Поверхности в $\mathbb{P}^3$. В нескольких следующих пунктах мы приводим известные результаты по классификации поверхностей. Для описания топологического типа вещественной части поверхности обозначим через S_p , $p \geq 0$, ориентируемую замкнутую поверхность рода p : $S_p = \#_p(S^1 \times S^1)$, а через V_q , $q \geq 1$, – неориентируемую замкнутую поверхность рода $q/2$: $V_q = \#_q \mathbb{R}P^2$ (в последнем случае см. наше определение рода в 4.1). Положим $S = S_0$.

Поверхности в $\mathbb{P}^3$ с топологической точки зрения традиционно изучаются с точностью до следующих отношений эквивалентности: гомеоморфность вещественных частей поверхностей, объемлющая изотопность вещественных частей в $\mathbb{R}P^3$, жесткая изотопность (т.е. изотопность в классе неособых или, более общо, эквисингулярных в некотором подходящем смысле поверхностей фиксированной степени) и, наконец, грубая проективная эквивалентность (т.е. эквивалентность с точностью до проективных преобразований и жестких изотопий). Два последних отношения отличаются друг

от друга из-за того, что группа $PGL(4; \mathbb{R})$ проективных преобразований пространства $\mathbb{RP}^3$ имеет две компоненты связности. Ясно, что преобразования, содержащиеся в одной компоненте с тождественным, переводят поверхность в жестко изотопную.

Для любой степени число классов эквивалентности конечно (для каждого из четырех отношений); это следует из того, что для каждого отношения универсальное семейство гиперповерхностей данной степени допускает такую конечную (полуалгебраическую) стратификацию, что относительно выбранного отношения это семейство локально тривиально над каждым стратом. (Для топологического отношения эквивалентности существование стратификации было доказано А. Уоллесом [122] и А. Н. Варченко [114].)

Ясно, что вещественная поверхность в $\mathbb{P}^3$ степени 1 есть вещественная проективная плоскость. Классификация поверхностей степени 2 – предмет классической аналитической геометрии. С точностью до жесткой изотопии имеется восемь типов таких поверхностей (включая особые), различающихся топологией своих вещественных частей. Неособая вещественная поверхность $X \subset \mathbb{P}^3$ степени 2 – это гиперboloид ($\mathbb{R}X = S_1$), эллипсоид ($\mathbb{R}X = S$) или пустая поверхность ($\mathbb{R}X = \emptyset$). Заметим, что неособая квадрика X изоморфна $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ и как абстрактная поверхность имеет четыре неэквивалентные вещественные структуры: имеются две вещественные структуры с пустой вещественной частью.

В рамках этого обзора мы рассматриваем только неособые поверхности. Для таких поверхностей полная классификация (для каждого из четырех отношений эквивалентности) известна для степеней ≤ 4 . Для степеней ≥ 5 неизвестно даже максимальное число компонент связности вещественной части поверхности. (Заметим, что максимум всегда может быть реализован неособой поверхностью.) Наилучшая из известных верхних границ получается объединением неравенств Смита и Комессатти (Петровского–Олейник). Стоит упомянуть, что каждое из этих неравенств в отдельности является точным (см. [118], где доказано также, что усиленное неравенство Комессатти $1 - \chi(\mathbb{R}X) \leq \sigma^-(X) - 2p_+$ является точным). Однако имеются основания считать, что полученные из них границы для β_0 и β_1 не точны. Асимптотически $\max \beta_i \sim k_i d^3$, $i = 0, 1$, где d – степень, $\frac{13}{36} \leq k_0 \leq \frac{5}{12}$ и $\frac{13}{18} \leq k_1 \leq \frac{5}{6}$ (примеры, устанавливающие нижние границы, построены Ф. Бианом [11]).

3.5.1. Вещественные кубические поверхности. Классификация вещественных поверхностей степени 3 в $\mathbb{P}^3$ получена Л. Шлефли [105], Ф. Клейном [67] и И. Г. Цейтеном [127].

3.5.2. Имеется пять жестких изотопических типов неособых вещественных кубических поверхностей в $\mathbb{P}^3$. Они отличаются вещественными частями: V_7 , V_5 , V_3 , $V_1 \sqcup S$ и V_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Топологические инварианты комплексной части неособой кубической поверхности $X \subset \mathbb{P}^3$ указаны в 3.1.6: $\beta_*(X) = 9$, $\sigma(X) = -4$ и $\sigma^-(X) = 5$. Следовательно, топологические типы вещественной части, перечисленные в 3.5.2, – это все типы, не запрещаемые неравенством Смита 3.1.1, экстремальным сравнением 2.7.1 и неравенством Комессатти–Петровского 3.1.2. Поэтому остается показать, что все пять топологических типов реализуются и что пространство неособых кубик имеет не более пяти компонент связности. Рассмотрим пространство $\mathbb{RC}_3 = \mathbb{RP}^{19}$ всех вещественных кубических поверхностей в $\mathbb{P}^3$. Пусть $\mathbb{R}\Delta \subset \mathbb{RC}_3$ – множество особых

кубик, $\Delta_0 \subset \mathbb{R}\Delta$ – множество кубик с единственной невырожденной двойной точкой, и пусть $\mathcal{S} = \mathbb{R}\Delta \setminus \Delta_0$. Тогда $\dim \mathbb{R}\Delta = 18$ и $\dim \mathcal{S} \leq 17$ и из двойственности Пуанкаре и точности гомологической последовательности тройки $(\mathbb{R}\mathcal{C}_3, \mathbb{R}\Delta, \mathcal{S})$ следует, что $\dim H^0(\mathbb{R}\mathcal{C}_3 \setminus \mathbb{R}\Delta) = 1 + \dim \text{Ker } \text{in}_*$, где $\text{in}_*: H_{18}(\mathbb{R}\Delta, \mathcal{S}) \rightarrow H_{18}(\mathbb{R}\mathcal{C}_3, \mathcal{S})$ – гомоморфизм, индуцированный включением. Группа $H_{18}(\mathbb{R}\Delta, \mathcal{S})$ порождается фундаментальными классами компонент связности множества Δ_0 , т.е. жесткими изотопическими классами кубик с единственной невырожденной двойной точкой. Такая кубика (в предположении, что особой точкой является $(1 : 0 : 0 : 0)$) задается уравнением

$$x_0 p_2(x_1, x_2, x_3) + p_3(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

где p_2 и p_3 – вещественные однородные многочлены степеней 2 и 3 соответственно. Точка $(1 : 0 : 0 : 0)$ – единственная особенность поверхности, причем она является невырожденной двойной точкой тогда и только тогда, когда квадрика $C_2 = \{p_2 = 0\}$ неособа и кубика $C_3 = \{p_3 = 0\}$ пересекает C_2 трансверсально. (Заметим, что C_3 может быть особой.) Через любые шесть различных точек кривой C_2 можно провести кубическую кривую, не содержащую C_2 , причем такие кривые образуют трехмерное аффинное пространство. Поэтому Δ_0 имеет не более пяти компонент связности: либо $\mathbb{R}C_2 = \emptyset$, либо $\mathbb{R}C_2 \cong S^1$ и кривые C_2, C_3 имеют $2i$, $i = 0, 1, 2, 3$, вещественных точек пересечения. Возмущая особые поверхности, полученные таким образом, можно построить все пять топологических типов неособых кубических поверхностей.

Остается доказать, что

$$\dim \text{Ker } \text{in}_* \leq 4 = \dim H_{18}(\mathbb{R}\Delta, \mathcal{S}) - 1.$$

Для этого опять в силу двойственности Пуанкаре достаточно построить топологическую окружность в $\mathbb{R}\mathcal{C}_3 \setminus \mathcal{S}$, трансверсально пересекающую Δ_0 в двух точках различных стратов. Такая окружность содержится в версальном двухпараметрическом возмущении каспидальной поверхности, задаваемой уравнением

$$x_0(x_1^2 + x_2^2) + x_3^3 + x_2^3 = 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Компонента V_q вещественной части неособой кубической поверхности расположена топологически в $\mathbb{R}\mathbb{P}^3$ как стандартная $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ с ручками, приклеенными незаузленно и незацепленно. Это следует, например, из указанного выше построения таких поверхностей.

3.5.3. Вещественные поверхности степени 4. Систематическое изучение топологии поверхностей степени 4 было предпринято в начале XX века К. Рооном и Д. Гильбертом. (Гильберт включил этот вопрос в свою 16-ю проблему.) Однако первые полные доказательства некоторых из их утверждений появились позже и принадлежали И. Г. Петровскому и О. А. Олейник (оценка числа сферических компонент) и Р. Тому (оценка тотального числа Бетти). Изучение было продолжено в 60-х и 70-х годах Г. А. Уткиным, а классификация была завершена В. М. Харламовым [57], [60] (топологическая и изотопическая классификации; один изотопический класс был запрещен совместно с В. В. Никулиным) и В. В. Никулиным [88] (грубая проективная классификация). Киральность поверхностей степени 4 изучалась В. М. Харламовым [61], [62].

Как и у любой неособой вещественной поверхности четной степени, вещественная часть неособой кватрики ориентируема. Ее расположение в $\mathbb{RP}^3$ является довольно простым: она изотопна объединению эллипсоидов и гиперboloидов с незаузленными и незацепленными ручками. За одним исключением компоненты лежат вне друг друга; в исключительном случае вещественная часть является гнездом из двух сфер. (В большинстве случаев эти результаты можно вывести из теоремы Безу.)

За исключением гнезда из двух сфер положение поверхности $\mathbb{R}X$ в $\mathbb{RP}^3$ с точностью до изотопии определяется образами гомоморфизмов включения $H_1(C_j) \rightarrow H_1(\mathbb{RP}^3) = \mathbb{Z}_2$, где $C_j \subset \mathbb{R}X$ — компоненты поверхности $\mathbb{R}X$. (Это следует из общих теорем трехмерной топологии и того, что ручки вещественной части незаузлены и незацеплены.) Для несферических компонент мы используем обозначение S_p^0 (соответственно S_p^1), если образ указанного гомоморфизма тривиален (соответственно нетривиален). Далее, nS обозначает n сфер, лежащих вне друг друга, а $S(S)$ — гнездо из двух сфер.

Для поверхностей степени 4 все четыре классификации (топологическая, изотопическая, грубая проективная и жесткая) различны.

3.5.4. КЛАССИФИКАЦИИ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ СТЕПЕНИ 4. *Вещественная неособая поверхность степени 4 с точностью до жесткой изотопии определяется изотопическим типом своей вещественной части $\mathbb{R}X$, комплексным типом (I_0 , I_{hp} или II , см. 2.6) и тем, является ли поверхность киральной, т.е. жестко изотопной своему зеркальному образу, или нет. Изотопическими типами вещественных частей являются все типы, получающиеся последовательностью морсовских упрощений (см. 3.7.1) из следующих экстремальных типов:*

- (1) *M-поверхности:* $S_{10}^1 \sqcup S$, $S_6^1 \sqcup 5S$, $S_2^1 \sqcup 9S$;
- (2) *(M — 2)-поверхности:* $S_7^1 \sqcup 2S$, $S_3^1 \sqcup 6S$, $S_a^0 \sqcup (9 - a)S$, $0 \leq a \leq 9$;
- (3) *пары торов:* $S_1^1 \sqcup S_1^1$, $S_1^1 \sqcup S_1^0$;
- (4) *гнездо из двух сфер:* $S(S)$.

Все некиральные поверхности образуют следующие изотопические типы: $pS \sqcup S_q^0$, $p \geq 3$, $q \geq 3$, и $pS \sqcup S_q^1$, $p \geq 4$. Все комплексные типы указаны в табл. 1 и 2.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из 3.5.4 следует, что за исключением случая, когда $\mathbb{R}X = S(S)$, изотопический тип вещественной части $\mathbb{R}X$ вещественной кватрики в $\mathbb{P}^3$ определяется ее топологическим типом и тем, стягиваема ли $\mathbb{R}X$ в $\mathbb{RP}^3$ или нет.

3.5.5. Поверхности степени 5. Для степеней ≥ 5 имеет место следующее явление: с одной стороны, любая поверхность, полученная малой деформацией поверхности данной степени в $\mathbb{P}^3$, вкладывается в $\mathbb{P}^3$ (как поверхность той же степени); с другой стороны, большая деформация может дать поверхность, которую нельзя вложить в $\mathbb{P}^3$. (Стоит отметить, что для степени 4 ситуация прямо противоположная: малой деформацией неособую кватрику можно сделать непроективной и, с другой стороны, любую поверхность из того же деформационного класса, т.е. $K3$ -поверхность, см. 3.7.2 ниже, малой деформацией можно превратить в неособую кватрику. Это объясняет то, почему топологическая классификация вещественных неособых поверхностей степени 4 совпадает с топологической классификацией вещественных $K3$ -поверхностей.)

ТАБЛИЦА 1. Нестягиваемые кватрики в $\mathbb{RP}^3$ ТАБЛИЦА 2. Стягиваемые кватрики в $\mathbb{RP}^3$

* и $\odot$ обозначают поверхность типа I_0 , $\circ$ обозначает поверхность типа I_{np} , а $\bullet$ обозначает поверхность типа II . Знаком $\odot$ отмечены поверхности типа I_0 с $\mathbb{R}X = 2S_1$ ($(a, r) = (8, 10)$ в табл. 1) и $\mathbb{R}X = \emptyset$ ($(a, r) = (10, 10)$ в табл. 2); для поверхностей с $a + r = 22$ (правый край табл. 2) $\mathbb{R}X = (r - 10)S$; для остальных поверхностей $\mathbb{R}X = S_g \sqcup kS$, где $g = \frac{1}{2}(22 - a - r)$ и $k = \frac{1}{2}(r - a)$. Поверхности ниже (соответственно выше) пунктирных линий являются (соответственно не являются) жестко изотопными своим зеркальным образам.

Для степени 5 указанное явление было изучено Е. Хорикавой [50]. Он доказал, что база версальной деформации неособой квинтики состоит из двух гладких неприводимых компонент M_0, M_1 с нормальным пересечением, причем $\dim_{\mathbb{C}} M_0 = \dim_{\mathbb{C}} M_1 = 40$ и $\dim_{\mathbb{C}} M_0 \cap M_1 = 39$. Точки множества $M_0 \setminus (M_0 \cap M_1)$ соответствуют неособым квинтикам, точки множества $M_1 \setminus (M_0 \cap M_1)$ — двулистым накрытиям поверхности $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, а точки множества $M_0 \cap M_1$ — двулистым накрытиям квадратичного конуса Σ_2 . Ясно, что деформацию вещественной квинтики можно сделать эквивариантной, а ее члены превратить в квинтики того же вещественного деформационного класса. Это наблюдение используется в той части доказательства предложений 3.5.6 и 3.5.7, где обосновывается существование поверхностей.

3.5.6. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Экстремальные значения чисел Бетти неособых квинтик в $\mathbb{P}^3$ находятся в пределах $22 \leq \max \beta_0 \leq 25$, $\max \beta_1 = 45$ или 47. Для поверхностей из того же деформационного класса $23 \leq \max \beta_0 \leq 25$ и $\max \beta_1 = 47$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если X – неособая квинтика, то $h^{1,1}(X) = 45$, $\beta_*(X) = 55$ и $\sigma(X) = -35$. Поэтому верхние границы, указанные в формулировке, получаются из неравенств Смита и Комессатти 3.1.1., 3.1.2 и экстремального сравнения 2.7.1. Квинтики с $\beta_1 = 45$ построены В. М. Харламовым [63], квинтики с $\beta_0 = 22$ – И. В. Итенбергом и В. М. Харламовым [51], а $\mathbb{C}$ -деформационно эквивалентные квинтике поверхность с $\beta_0 = 23$ и поверхность с $\beta_1 = 47$ – Ф. Бианом [11].

3.5.7. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Вещественная часть M -поверхности, $\mathbb{C}$ -деформационно эквивалентной неособой квинтике, может иметь только 5, 9, 13, 17, 21 или 25 компонент связности. M -квинтики с 5, 9, 13, 17 и 21 компонентами существуют.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Другие значения запрещены экстремальным сравнением 2.7.1 и неравенством Смита 3.1.1. M -поверхности с 5, 9, 13, 17 и 21 компонентами построены В. М. Харламовым [63] (построение в случае 17 и 21 компонент использует некоторые вспомогательные кривые, построенные О. Я. Виро).

M -поверхности, построенные в [63], имеют следующие топологические типы:

$$20S \sqcup V_{13}, \quad 16S \sqcup V_{21}, \quad 12S \sqcup V_{29}, \quad 8S \sqcup V_{37}, \quad 4S \sqcup V_{45}.$$

Их близнецами, полученными сменой знака двулистного накрытия, являются

$$4S \sqcup V_{43}, \quad 8S \sqcup V_{35}, \quad 12S \sqcup V_{27}, \quad 11S \sqcup S_1 \sqcup V_{25}, \quad 16S \sqcup V_{19}.$$

Среди других пар поверхностей, построенных к настоящему времени, имеются пары $19S \sqcup S_2 \sqcup V_7$, $4S \sqcup V_{43}$ и $19S \sqcup S_1 \sqcup V_7$, $4S \sqcup V_{45}$. Из построения вспомогательных кривых следует, что поверхности, полученные морсовскими упрощениями всех вышеуказанных топологических типов, реализуются вещественными квинтиками. Совокупность поверхностей, полученных таким способом, никогда систематически не изучалась.

Поверхность с 22 компонентами, построенная Харламовым и Итенбергом в [51], имеет тип $21S \sqcup V_7$. Ее близнецом является $S \sqcup S_2 \sqcup V_{41}$ с $\beta_1 = 45$.

Недавно Б. Шевалье (неопубликовано) нашел несколько дополнительных примеров. Его подход выглядит иначе (он опирается на метод склеивания Виро), но есть основание считать, что оба подхода близки или даже эквивалентны: подход, основанный на теореме Хорикавы, тоже опирается на метод Виро построения вспомогательных кривых, а подход Шевалье тоже использует двулистные накрытия квадрик. Шевалье получил следующие поверхности, у которых тотальное число Бетти или Эйлерова характеристика близки к экстремальным:

$$18S \sqcup S_1 \sqcup V_9, \quad 17S \sqcup 2S_1 \sqcup V_3, \quad 17S \sqcup S_2 \sqcup V_5, \quad \dots, \quad 4S \sqcup S_8 \sqcup V_{23}, \\ 3S \sqcup S_1 \sqcup V_{39}, \quad 3S \sqcup S_7 \sqcup V_{27}, \quad 2S \sqcup S_1 \sqcup V_{41}, \quad S \sqcup S_{18} \sqcup V_3, \quad S \sqcup S_{10} \sqcup V_{21}.$$

Стоит отметить, что если M -квинтика с 25 компонентами действительно существует, то согласно известным неравенствам и сравнениям она должна относиться к одному из следующих топологических типов:

$$24S \sqcup V_5, \quad 23S \sqcup S_1 \sqcup V_3, \quad 23S \sqcup S_2 \sqcup V_1, \quad 22S \sqcup S_1 \sqcup S_1 \sqcup V_1.$$

Два последних типа запрещены (четвертый – О. Виро, а третий – Харламовым и Итенбергом, ср. [64]). Проблема существования M -поверхностей степени 5 двух оставшихся топологических типов остается открытой.

3.6. Рациональные поверхности. В этом обзоре под *вещественной рациональной поверхностью* мы подразумеваем рациональную (над $\mathbb{C}$) поверхность, наделенную вещественной структурой. Стоит подчеркнуть, что такая поверхность **не** обязана быть рациональной над $\mathbb{R}$; приведенная ниже теорема 3.6.1 содержит соответствующие примеры. Классификация вещественных рациональных поверхностей была получена Комессатти [18]–[20]. Следуя Комессатти, ограничимся *минимальными* (над $\mathbb{R}$) вещественными рациональными поверхностями. (Напомним, что неособая поверхность X называется (относительно) минимальной, если любое голоморфное отображение $X \rightarrow X'$ степени 1 является биголоморфным. Вещественная поверхность (X, conj) минимальна над $\mathbb{R}$, если указанное выше условие выполняется для conj -эквивариантных отображений. Поверхность минимальна над $\mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда она не содержит (-1) -кривых, и минимальна над $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда она не содержит вещественных (-1) -кривых и пар дизъюнктивных комплексно сопряженных (-1) -кривых.)

3.6.1. Минимальные вещественные рациональные поверхности. *Ниже приведен полный перечень жестких изотопических типов минимальных над $\mathbb{R}$ вещественных рациональных поверхностей:*

- (1) *вещественная проективная плоскость $\mathbb{P}^2$: $\mathbb{R}X = V_1$;*
- (2) *вещественная квадрака $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ одного из четырех типов: поверхность с $\mathbb{R}X = S_0$, $\mathbb{R}X = S_1$ и две неэквивалентные поверхности с $\mathbb{R}X = \emptyset$;*
- (3) *линейчатые рациональные поверхности Σ_m , $m \geq 2$:*
 m *четно: $\mathbb{R}X = \emptyset$ или S_1 , m нечетно: $\mathbb{R}X = V_2$;*
- (4) *пространства вещественных расслоений на коники над $\mathbb{P}^1$, все приводимые слои которых вещественны и состоят из пар комплексно сопряженных исключительных кривых: $\mathbb{R}X = mS$, где $2m \geq 4$ есть число приводимых слоев;*
- (5) *поверхности Дель Пеццо степени $d = K^2 = 1$ или 2:*
 $d = 1$: $\mathbb{R}X = V_1 \sqcup 4S$, $d = 2$: $\mathbb{R}X = 3S$ или $4S$.

(С комплексной точки зрения поверхность Дель Пеццо степени $d \leq 9$ получается из $\mathbb{P}^2$ раздутием $(9 - d)$ точек, лежащих в общем положении, т.е. так, что никакие три из них не лежат на одной прямой и никакие шесть не лежат на одной конике.) Заметим, что поверхность Дель Пеццо степени 2 с $\mathbb{R}X = 3S$ можно также представить в виде пространства расслоения на коники над $\mathbb{P}^1$ с шестью приводимыми слоями. Отметим также, что в указанном перечне только поверхности (1)–(3) минимальны над $\mathbb{C}$.

Теорема 3.6.1 связана с классификацией антибирациональных преобразований плоскости $\mathbb{P}^2$, опирающейся, в свою очередь, на изучение фундаментальных точек

таких преобразований. Изложение доказательства Комессатти на современном языке можно найти в [15].

3.7. Абелевы, $K3$ -поверхности и поверхности Энриквеса. Следующей группой в классификации комплексных алгебраических поверхностей являются поверхности с нулевой размерностью Кодайры. Их минимальные модели над $\mathbb{C}$ исчерпываются абелевыми поверхностями, гиперэллиптическими поверхностями, $K3$ -поверхностями и поверхностями Энриквеса, причем каждый тип, за исключением гиперэллиптических поверхностей, образует одно деформационное семейство. Так как минимальная модель комплексной поверхности, имеющей размерность Кодайры ≥ 0 , единственна (см., например, [47]), она должна быть вещественной, если исходная поверхность вещественна. Поэтому достаточно рассматривать поверхности, минимальные над $\mathbb{C}$; любую другую поверхность можно получить из минимальной (над $\mathbb{C}$) последовательностью раздутий вещественных точек или пар комплексно сопряженных точек.

Классификация гиперэллиптических поверхностей еще не закончена. Ниже мы ограничиваемся тремя остальными вышеуказанными типами.

Абелева поверхность X (гомеоморфная четырехмерному тору $S^1 \times S^1 \times S^1 \times S^1$) характеризуется условиями $b_1(X) = 4$ и $K_X = 0$. Классификация антиголоморфных инволюций на таких поверхностях была получена Комессатти [20] и может быть описана следующим образом.

3.7.1. ВЕЩЕСТВЕННЫЕ АБЕЛЕВЫ ПОВЕРХНОСТИ. *С точностью до эквивариантной деформации антиголоморфная инволюция conj на комплексном торе X определяется множеством вещественных точек $\mathbb{R}X$ и, если $\mathbb{R}X = \emptyset$, действием гомоморфизма conj_* на $H_1(X; \mathbb{Z})$. Всего имеется пять классов: три с $\mathbb{R}X = kS_1$, $k = 1, 2, 4$, и два с $\mathbb{R}X = \emptyset$.*

Описание пространства модулей алгебраических абелевых поверхностей с непустой вещественной частью можно найти у Силёля [107].

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Рассмотрим униформизацию $X = \mathbb{C}^2/L$, где $L \subset \mathbb{C}^2$ – решетка ранга 4, и поднимем conj до антиавтоморфизма s пространства $\mathbb{C}^2$. Если $\mathbb{R}X \neq \emptyset$, это поднятие можно выбрать в виде инволюции, сохраняющей L . Поскольку s имеет собственные числа ± 1 , кратности которых равны 2, сужение $s|_L$ принадлежит одному из трех классов изоморфизма, и для каждого класса существует единственное с точностью до гомотопии эквивариантное вложение в пространство $\mathbb{C}^2$ (рассматриваемое со стандартным комплексным сопряжением).

Если $\mathbb{R}X = \emptyset$, те же аргументы применяются к присоединенному действию $\text{Ad } \text{conj}$ на поверхности X как на группе, а сама инволюция conj есть композиция отображения $\text{Ad } \text{conj}$ и аффинного сдвига на элемент $a \in \text{Ker}(1 + \text{Ad } \text{conj})$, который следует рассматривать по модулю $\text{Im}(1 - \text{Ad } \text{conj})$. С точностью до изоморфизма имеются два случая: один с $\text{Ad } \text{conj} = \text{id}$, другой с $\text{Ad } \text{conj} = \text{id} \oplus \sigma$, где σ – вещественная структура на такой эллиптической кривой $C' = \mathbb{C}/L'$, что $\mathbb{R}C' = S^1$.

Комплексная $K3$ -поверхность X характеризуется условиями $b_1(X) = 0$, $K_X = 0$. (Топологически поверхность X – односвязное четырехмерное многообразие с $H_2(X; \mathbb{Z}) = 2(-E_8) \oplus 3U$.) Для описания классификации вещественных $K3$ -поверхностей введем следующее понятие: *топологический тип* (т.е. класс поверхностей

с гомеоморфными вещественными частями) называется *экстремальным* (в пределах фиксированного деформационного семейства комплексных поверхностей), если его нельзя получить из другого топологического типа *морсовским упрощением*, т.е. морсовской перестройкой, уменьшающей тотальное число Бетти. (Морсовское упрощение есть удаление либо сферической компоненты, либо ручки.) Следующий результат принадлежит В. М. Харламову [57] и В. В. Никулину [88]:

3.7.2. Вещественные $K3$ -поверхности. $K3$ -поверхность X с антиголоморфной инволюцией определяется, с точностью до эквивариантной деформации, топологическим типом своей вещественной части $\mathbb{R}X$ и типом вещественной структуры (т.е. тем, гомологично или не гомологично нулю $[\mathbb{R}X]$ в $H_2(X)$, см. 2.6). Топологическими типами вещественных частей являются те и только те типы, которые можно получить последовательностью морсовских упрощений из следующих экстремальных типов:

- (1) M -поверхности: $S_{10} \sqcup S$, $S_6 \sqcup 5S$, $S_2 \sqcup 9S$;
- (2) $(M - 2)$ -поверхности: $S_7 \sqcup 2S$, $S_3 \sqcup 6S$;
- (3) пара торов: $2S_1$.

Топологические типы вещественных частей вещественных $K3$ -поверхностей перечислены в табл. 3.

ТАБЛИЦА 3. Топологические типы вещественных $K3$ -поверхностей

* и $\odot$ обозначают поверхность типа I, а $\bullet$ обозначает поверхность типа II. Знаком $\odot$ отмечены поверхности типа I с $\mathbb{R}X = 2S_1$ ($(a, r) = (8, 10)$) и $\mathbb{R}X = \emptyset$ ($(a, r) = (10, 10)$); для поверхностей с $a + r = 22$ (правый край таблицы) $\mathbb{R}X = (r - 10)S$; для остальных поверхностей $\mathbb{R}X = S_g \sqcup kS$, где $g = \frac{1}{2}(22 - a - r)$ и $k = \frac{1}{2}(r - a)$.

Доказательство теоремы 3.7.2 основано на глобальной теореме Торелли для $K3$ -поверхностей, см. [10], которая описывает пространство модулей этих поверхностей, что сводит проблему классификации антиголоморфных инволюций на $K3$ -поверхностях с точностью до жестких изотопий к арифметической проблеме классификации инволютивных изометрий на $2(-E_8) \oplus 3U$ с точностью до автоморфизма решетки. Мы опускаем детали (см. [88] или [29]).

Поверхности оставшегося деформационного типа – поверхности Энриквеса – характеризуются условиями $2K_X = 0$, $K_X \neq 0$. (Другое определение состоит в следующем: X – поверхность Энриквеса, если $\pi_1(X) = \mathbb{Z}_2$ и универсальное накрывающее поверхности X есть $K3$ -поверхность.) Как и в предыдущем случае, вещественная поверхность Энриквеса X с точностью до деформации определяется топологией инволюции комплексного сопряжения $\text{conj}: X \rightarrow X$. Однако топология вещественной части $\mathbb{R}X$ и тип инволюции уже не являются достаточными для определения топологии инволюции; нужны более тонкие инварианты. Ниже мы приводим основные результаты деформационной классификации вещественных поверхностей Энриквеса; подробности и полный список деформационных классов можно найти в [29].

3.7.3. Топология вещественной части. *Имеются 87 топологических типов поверхностей Энриквеса с антиголоморфной инволюцией. Каждый из них можно получить последовательностью морсовских упрощений из одного из 22 экстремальных типов, перечисленных ниже. Обратно, за исключением двух типов $6S_0$ и $S_1 \sqcup 5S_0$ любой топологический тип, полученный таким способом, реализуется вещественной поверхностью Энриквеса.*

Экстремальные типы исчерпываются следующим списком:

(1) *M -поверхности:*

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad \chi(\mathbb{R}X) = 8: & \text{(b)} \quad \chi(\mathbb{R}X) = -8: \\ 4V_1 \sqcup 2S_0, & 2V_2 \sqcup 4S_0, & V_{11} \sqcup V_1, & V_8 \sqcup V_4, \\ V_2 \sqcup 2V_1 \sqcup 3S_0, & V_4 \sqcup 5S_0, & V_{10} \sqcup V_2, & V_7 \sqcup V_5, \\ V_3 \sqcup V_1 \sqcup 4S_0, & V_2 \sqcup S_1 \sqcup 4S_0, & V_9 \sqcup V_3, & 2V_6, \\ & & & V_{10} \sqcup S_1; \end{array}$$

(2) *$(M - 2)$ -поверхности с $\chi(\mathbb{R}X) = 0$:*

$$\begin{array}{llll} V_4 \sqcup 2V_1, & V_5 \sqcup V_1 \sqcup S_0, & 2V_3 \sqcup S_0, & V_6 \sqcup 2S_0, \\ V_3 \sqcup V_2 \sqcup V_1, & V_4 \sqcup V_2 \sqcup S_0, & V_4 \sqcup S_1 \sqcup S_0, & 2V_2 \sqcup S_1; \end{array}$$

(3) *пара торов: $2S_1$.*

Пусть X – вещественная поверхность Энриквеса и $\tilde{X} \rightarrow X$ – накрытие $K3$ -поверхностью. Вещественная структура conj на X поднимается до двух коммутирующих вещественных структур $t^{(1)}, t^{(2)}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$, вещественные части $\mathbb{R}\tilde{X}^{(1)}, \mathbb{R}\tilde{X}^{(2)}$ которых не пересекаются. Образы $\mathbb{R}X^{(i)}$ поверхностей $\mathbb{R}\tilde{X}^{(i)}$, $i = 1, 2$, также не пересекаются. Поэтому вещественная часть $\mathbb{R}X$ поверхности X разбивается на два подмножества $\mathbb{R}X^{(1)}, \mathbb{R}X^{(2)}$ (являющиеся объединениями целых компонент), которые называются *половинами*. Разбиение на половины $\mathbb{R}X = \mathbb{R}X^{(1)} \cup \mathbb{R}X^{(2)}$, называемое также *фундаментальным разбиением*, является важным топологическим (и деформационным) инвариантом поверхности; оно записывается в следующем виде

$$\mathbb{R}X = \{\text{компоненты поверхности } \mathbb{R}X^{(1)}\} \sqcup \{\text{компоненты поверхности } \mathbb{R}X^{(2)}\}.$$

Ясно, что можно говорить о типе (I_0 , I_u или II) каждой половины $\mathbb{R}X^{(i)}$ отдельно, так же как и о типах (I или II) поверхностей $\mathbb{R}\tilde{X}^{(i)}$. Более того, $\mathbb{R}X^{(1)}$ естественно отождествляется с множеством неподвижных точек инволюции, полученной из $t^{(1)}$ спуском

в $\tilde{X}/t^{(2)}$; поэтому можно также рассматривать тип поверхности $\mathbb{R}X^{(1)}$ в $\tilde{X}/t^{(2)}$. Последний фактор диффеоморфен рациональной поверхности, если $\mathbb{R}X^{(2)} \neq \emptyset$, и поверхности Энриквеса в противном случае. В первом случае возможными типами являются I и II, в последнем — I_0 , I_u и II.

3.7.4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Накрытие $\mathbb{R}\tilde{X}^{(1)} \cup \mathbb{R}\tilde{X}^{(2)} \rightarrow \mathbb{R}X$ является ориентирующим двулистным накрытием.*

3.7.5. ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РАЗБИЕНИЕ. *Каждая половина вещественной поверхности Энриквеса есть либо*

- (1) $\alpha V_g \sqcup \alpha V_1 \sqcup bS$ с $g > 1$, $\alpha \geq 0$, $b \geq 0$, $\alpha = 0, 1$, либо
- (2) $2V_2$, либо
- (3) S_1 .

За исключением случаев $\mathbb{R}X = kS$ и $\mathbb{R}X = V_{2r} \sqcup kS$ фундаментальное разбиение вещественной части $\mathbb{R}X$ из перечня в 3.7.3 реализуемо тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет указанным условиям (1)–(3). Для исключительных случаев реализуемые разложения перечислены на рис. 1.

Рис. 1. Фундаментальные разложения исключительных вещественных поверхностей Энриквеса

Предложение 3.7.4, по существу, следует из того, что многообразие $\tilde{X}$ спинорное, а X — нет; поэтому инволюция Энриквеса обращает спинорную ориентацию поверхности $\mathbb{R}\tilde{X}$ (см. 2.9.1). Вместе с ограничениями на топологию поверхности $\mathbb{R}\tilde{X}$ (см. 3.7.2) это дает возможные формы (1)–(3) половин поверхности $\mathbb{R}X$. При изучении исключительных случаев используются некоторые сравнения, аналогичные экстремальным сравнениям 2.7.1.

Для запрета почти всех несуществующих топологических типов достаточно соединить 3.7.4 (и 3.7.2) с неравенством Смита 3.1.1, обобщенным неравенством Комессати–Петровского 3.1.2 и экстремальными сравнениями 2.7.1. После этого останется запретить только два типа: $S_1 \sqcup 5S_0$, $3V_2$ и одну серию: $S_1 \sqcup V_1 \sqcup \dots$. Это делается с помощью спектральной последовательности Калинина (см. детали в [26]).

По техническим причинам вещественные поверхности Энриквеса разделяются на три класса: поверхности гиперболического, параболического и эллиптического типов — в зависимости от того, отрицательным, нулевым или положительным является минимум эйлеровой характеристики компонент поверхности $\mathbb{R}X$.

3.7.6. ДЕФОРМАЦИОННЫЕ КЛАССЫ. *За исключением нескольких случаев, указанных ниже, деформационный класс вещественной поверхности Энриквеса X*

с отмеченной половиной $\mathbb{R}X^{(1)}$ определяется топологией своего фундаментального разложения. Исключениями являются:

- (1) M -поверхности параболического и эллиптического типов, т.е. поверхности с $\mathbb{R}X = 2V_2 \sqcup 4S$, $V_2 \sqcup 2V_1 \sqcup 3S$ или $4V_1 \sqcup 2S$; инвариантом является форма Понтрягина–Виро;
- (2) поверхности с $\mathbb{R}X = 2V_1 \sqcup 4S$;
- (3) другие поверхности с половиной $\mathbb{R}X^{(1)} = 4S$; дополнительными инвариантами являются типы I_u , I_0 или Π половины $\mathbb{R}X^{(1)}$ в X и в $\tilde{X}/t^{(2)}$;
- (4) поверхности с $\mathbb{R}X = \{V_{10}\} \sqcup \{\emptyset\}$, $\{V_4 \sqcup S\} \sqcup \{\emptyset\}$, $\{V_2 \sqcup 4S\} \sqcup \{\emptyset\}$ и $\{2S\} \sqcup \{2S\}$; дополнительным инвариантом является тип, I_u или I_0 , поверхности $\mathbb{R}X$ в X ;
- (5) поверхности с $\mathbb{R}X = 2V_1 \sqcup 3S$; дополнительный инвариант – тип, I_u или Π , поверхности $\mathbb{R}X$ в X ;
- (6) поверхности с $\mathbb{R}X = \{S_1\} \sqcup \{S_1\}$.

Дополнительный инвариант, необходимый для различения деформационных классов в случаях 3.7.6(2) и (6), является более тонким и зависит от специальных арифметических свойств индуцированного $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ -действия на $H_2(\tilde{X}; \mathbb{Z})$ (в случае (2)) или от топологии взаимного расположения двух половин $\mathbb{R}\tilde{X}^{(i)} = S_1 \sqcup S_1$ в $\tilde{X}$ (в случае (6)).

Деформационная классификация вещественных поверхностей Энриквеса основана на двух различных подходах: трюке Дональдсона и арифметических вычислениях, использующих глобальную теорему Торелли для $K3$ -поверхностей. (Хотя каждый подход в отдельности мог бы решить проблему, сложность возникающих промежуточных задач существенно зависит от рассматриваемой поверхности. Первый, более геометричный подход, хорошо работает для поверхностей гиперболического и параболического типов; второй – для поверхностей эллиптического типа.) Трюк Дональдсона использует гиперкэлерову структуру на $\tilde{X}$: можно изменить имеющуюся комплексную структуру так, чтобы инволюция Энриквеса стала антиголоморфной, а $t^{(2)}$ – голоморфной; тогда фактор $\tilde{X}/t^{(2)}$ станет вещественной рациональной поверхностью (если $\mathbb{R}X^{(2)} \neq \emptyset$) и проблема сводится к изучению вещественных рациональных поверхностей с неособой анти-биканонической кривой (образом множества $\mathbb{R}X^{(2)}$). Второй подход использует глобальную теорему Торелли для установления взаимно однозначного соответствия между деформационными классами вещественных поверхностей Энриквеса и классами изоморфизма $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ -действия (индуцированного инволюциями $t^{(1)}$ и $t^{(2)}$) на решетке с формой пересечений $H_2(\tilde{X}; \mathbb{Z}) = 2(-E_8) \oplus 3U$; такое действие должно удовлетворять некоторым арифметическим условиям, чтобы обеспечить реализуемость антиголоморфными инволюциями и свободу действия композиции $t^{(1)} \circ t^{(2)}$. Возникающая арифметическая проблема решается с использованием теории дискриминантных форм, а связь между свойствами этого действия и топологией поверхности (X, conj) устанавливается, в основном, с помощью спектральной последовательности Калинина (см. детали в [29]).

4. Кривые на поверхностях

4.1. Сравнения. Топологическая кривая (т.е. дизъюнктное объединение вложенных окружностей) L на топологической поверхности S называется *тотально го-*

гомологичной нулю, если гомоморфизм включения $H_1(L) \rightarrow H_1(S)$ тривиален. Определим род топологической поверхности S равенством

$$g(S) = b_0(S) - \frac{1}{2}(\chi(S) + b_0(\partial S)).$$

(Как нам представляется, общепринятое определение рода неориентируемой или несвязной поверхности отсутствует, поэтому мы выбрали наиболее удобное для наших целей. Безусловно, для связной ориентируемой поверхности наше определение дает обычный род. В общем случае род есть число всех ручек, причем пленка считается как половина ручки.) Заметим, что поверхность рода 0 состоит из сфер с дырами, а поверхность рода $1/2$ состоит из сфер с дырами и одной вещественной плоскости с дырами. Легко также проверить, что если замкнутая поверхность S представлена в виде объединения $S_1 \cup S_2$ двух поверхностей, общий край которых $\partial S_1 = \partial S_2$ тотально гомологичен нулю в S , то $\dim \operatorname{Im}[\operatorname{in}_*: H_1(S_i) \rightarrow H_1(S)] = 2g(S_i)$, $i = 1, 2$.

4.1.1. ТЕОРЕМА. Пусть X – комплексная поверхность с вещественной структурой, A – обильный четный вещественный дивизор на X с $\mathbb{R}A \neq \emptyset$ и Y – двулистное накрывающее поверхности X с ветвлением над A . Предположим, что $H_1(X) = 0$. Следующие условия необходимы для того, чтобы многообразие $\mathbb{R}Y_-$ было M - или $(M - 1)$ -поверхностью: X есть M -поверхность, кривая $\mathbb{R}A$ тотально гомологична нулю в $\mathbb{R}X$ и целиком лежит в одной компоненте поверхности $\mathbb{R}X$, а все другие компоненты этой поверхности принадлежат $\mathbb{R}X_-$ и тривиально накрываются поверхностью $\mathbb{R}Y_-$. Если эти условия выполнены, то

- (1) $\mathbb{R}Y_-$ есть M -поверхность тогда и только тогда, когда A есть M -кривая и $\mathbb{R}X_+$ – поверхность рода 0; в этом случае $\chi(\mathbb{R}X_+) = \frac{1}{4}[A]^2 \bmod 8$;
- (2) $\mathbb{R}Y_-$ есть $(M - 1)$ -поверхность тогда и только тогда, когда либо A есть $(M - 1)$ -кривая и $\mathbb{R}X_+$ – поверхность рода 0, либо A есть M -кривая и $\mathbb{R}X_+$ – поверхность рода $1/2$; в этом случае $\chi(\mathbb{R}X_+) = \frac{1}{4}[A]^2 \pm 1 \bmod 8$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X , Y и A являются соответственно $(M - d_X)$ -поверхностью, $(M - d_Y)$ -поверхностью и $(M - d_A)$ -кривой. Используя точные последовательности пар $(\mathbb{R}X, \mathbb{R}A)$ и $(\mathbb{R}X, \mathbb{R}X_+)$, очевидное равенство $\beta_*(\mathbb{R}X, \mathbb{R}X_+) = \beta_*(\mathbb{R}X, \mathbb{R}X_-)$ и выражения для $\beta_*(\mathbb{R}Y_-)$ и $\beta_*(Y)$, находящиеся соответственно в левой и правой частях последнего неравенства в 3.1.1 (ср. 2.3.2 и его доказательство), получаем, что

$$(4.1.2) \quad d_Y = 2d_X + d_A + 2(\beta_0(\mathbb{R}X) - c_- - 1) + (\delta + \varepsilon_+) - 2\beta_1(X),$$

где c_- – число замкнутых компонент поверхности $\mathbb{R}X_-$, накрытых тривиально, и

$$\begin{aligned} \delta &= \dim \operatorname{Im}[\operatorname{in}_*: H_1(\mathbb{R}A) \rightarrow H_1(\mathbb{R}X)], \\ \varepsilon_+ &= \dim \operatorname{Im}[\operatorname{in}_*: H_1(\mathbb{R}X_+) \rightarrow H_1(\mathbb{R}X)]. \end{aligned}$$

Отсюда следуют условия того, что $\mathbb{R}Y_-$ есть M - или $(M - 1)$ -поверхность.³ Сравнения получаются из основных экстремальных сравнений 2.7.1, примененных к $\mathbb{R}Y_-$ и $\mathbb{R}X$.

³В условиях теоремы формула (4.1.2), как нетрудно проверить, равносильна формуле $d_Y = 2d_X + d_A + 2(\beta_0(\mathbb{R}X) - c_- - 1) + 2\delta + 2g(\mathbb{R}X_+)$, из правой части которой надо вычесть $2\beta_1(X)$, если отбросить условие $H_1(X) = 0$. Последняя формула (и указанное ее обобщение) доказываются так же, как и (4.1.2), но при этом нет необходимости вводить ε_+ . – *Примеч. перев.*

Заметим, что, в отличие от случая плоских кривых, в общем случае $\mathbb{R}Y_-$ и $\mathbb{R}Y_+$ не могут быть одновременно близки к M -поверхностям. Точнее, рассуждая как в доказательстве теоремы 4.1.1, получаем, что (в очевидных обозначениях) $d_{Y_-} + d_{Y_+} - \beta_2(X) = \beta_2(X) + \beta_*(A) - (\beta_*(\mathbb{R}X_-) + \beta_*(\mathbb{R}X_+) - 2c_0(\mathbb{R}X_-) - 2c_0(\mathbb{R}X_+))$, и из 3.1.1 заключаем, что

$$d_{Y_-} + d_{Y_+} \geq \beta_2(X).$$

Выясним, когда для указанных выше X , A и Y накрытие $\mathbb{R}Y_- \rightarrow \mathbb{R}X_-$ тривиально и когда $\mathbb{R}Y_-$ ориентируемо. Поскольку A – четный и обильный дивизор, существует такая вещественная кривая $E \subset X$, что $2[E]$ есть нечетное кратное класса $[A]$. (Действительно, можно разделить $[A]$ на 2 и заменить полученный дивизор достаточно большим нечетным кратным так, чтобы он стал эффективным.) Обозначим через e элемент группы ${}^\infty E_2(X)$, см. А.2, определяемый классом $[E]$. Так как $H_2(X; \mathbb{Z})$ свободно от кручения и $\text{bv}_2[\mathbb{R}E] = e$, класс e и образ класса $[\mathbb{R}E]$ в $H_1(\mathbb{R}X)$ однозначно определены классом $[A]$. Следующее утверждение сразу следует из определения характеристического класса двулистного накрытия и мультипликативности гомоморфизма bv_2 , см. А.2.2.

4.1.3. Для указанных выше X , A и E характеристический класс накрытия $\mathbb{R}Y_- \rightarrow \mathbb{R}X_-$, рассматриваемый как гомоморфизм $H_1(\mathbb{R}X_-) \rightarrow \mathbb{Z}_2$, есть сужение на $H_1(\mathbb{R}X_-)$ отображения $x \mapsto \text{bv}_2 x \circ e = x \circ [\mathbb{R}E]$.

4.1.4. СЛЕДСТВИЕ. Для указанных выше X , A и E , если $\mathbb{R}X_+$ – поверхность рода 0 (или рода $1/2$), проекция $\mathbb{R}Y_- \rightarrow \mathbb{R}X_-$ есть ориентирующее двулистное накрытие тогда и только тогда, когда $[\mathbb{R}E] = w_1(\mathbb{R}X)$ (соответственно $[\mathbb{R}E] = w_1(\mathbb{R}X) + \varkappa$, где $\varkappa$ есть класс односторонней окружности в $\mathbb{R}X_+$ и $\varkappa \in \mathbb{Z}_2$).

Если X есть M -поверхность, $[\mathbb{R}E] = w_1(\mathbb{R}X)$ тогда и только тогда, когда $\frac{1}{2}[A]$ есть характеристический элемент в $H_2(X)$.

Заметим, что $\frac{1}{2}[A]$ – характеристический элемент в $H_2(X)$ тогда и только тогда, когда Y спинорное. Это следует из формулы проекции для w_2 и того, что проекция накрытия индуцирует эпиморфизм $H_2(Y) \rightarrow H_2(X)$, см. 2.2.2. Соединяя 4.1.1 и 4.1.4 со сравнением Никулина 3.1.5, получаем следующий результат.

4.1.5. СРАВНЕНИЕ НИКУЛИНА ДЛЯ КРИВЫХ. Пусть X – комплексная поверхность с вещественной структурой, $H_1(X) = 0$ и A – обильный четный дивизор на X . Предположим, что

- X есть M -поверхность и A есть M -кривая,
- кривая $\mathbb{R}A$ не пустая и целиком лежит в одной компоненте поверхности $\mathbb{R}X$,
- другие компоненты поверхности $\mathbb{R}X$ принадлежат $\mathbb{R}X_-$ и ориентируемы,
- $\mathbb{R}A$ тотально гомологична нулю в $\mathbb{R}X$,
- $\frac{1}{2}[A]$ – характеристический элемент в $H_2(X)$.

Предположим далее, что для некоторого целого $r \geq 0$ эйлеровы характеристики всех замкнутых компонент поверхности $\mathbb{R}X_-$ делятся на 2^{r+1} , а эйлеровы характеристики остальных компонент делятся на 2^r для некоторого целого $r \geq 0$. Тогда:

- если $\mathbb{R}X_+$ – поверхность рода 0, то $\chi(\mathbb{R}X_-) = 0 \bmod 2^{r+3}$;
- если $\mathbb{R}X_+$ – поверхность рода $1/2$, то $r = 0$ и $\chi(\mathbb{R}X_-) = \pm 1 \bmod 8$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Дополнительное сравнение Фидлера, см. [33], полученное с помощью формулы Рохлина–Гийю–Марена для плоских кривых, также можно распространить на случай кривых на поверхностях.

4.2. Обобщения формулы Рохлина для комплексных ориентаций. Рассмотрим неособую комплексную поверхность X с вещественной структурой и разбивающую вещественную кривую $A \subset X$ без вещественных особенностей. Через A^k обозначим $\mathbb{R}$ -компоненту кривой A и предположим, что каждая компонента A^k неособа над $\mathbb{C}$. Пусть $C_1, \dots, C_n$ – компоненты связности поверхности $\mathbb{R}X$, и для каждого $i = 1, \dots, n$ пусть C_{ij} , $j = 1, \dots, m_i$, – ориентируемые компоненты множества $C_i \setminus \mathbb{R}A$. Если C_i ориентируема, зафиксируем ее ориентацию и наделим C_{ij} индуцированной ориентацией; в противном случае наделим C_{ij} произвольной ориентацией. Обозначим через $[C_i]$ (для ориентируемой C_i) и $[C_{ij}]$ фундаментальные классы в $H_2(\mathbb{R}X, \mathbb{R}A; \mathbb{Z}) \subset H_2(\mathbb{R}X, \mathbb{R}A; \mathbb{Q})$, соответствующие выбранным ориентациям. Ясно, что $[C_{ij}]$ являются образующими группы $H_2(\mathbb{R}X, \mathbb{R}A; \mathbb{Z})$ и что $[C_i] = \sum_{j=1}^{m_i} [C_{ij}]$, если C_i ориентируема.

Вместе с кривой A разбивающей является и любая ее $\mathbb{R}$ -компонента, и потому $\mathbb{R}A^k$ разделяет A^k на две половины $A_{\pm}^k$. Пусть $[A_{\pm}^k] \in H_2(X, \mathbb{R}A; \mathbb{Z})$ – класс, реализуемый стандартно ориентированной половиной $A_{\pm}^k$. Ясно, что $[A_+^k] + [A_-^k] = [A^k]$. (Мы отождествляем $[A^k]$, $[A_{\pm}^k]$ и т. д. с их образами при различных гомоморфизмах включения и коэффициентных гомоморфизмах.) Половины $A_{\pm}^k$ индуцируют пару противоположных ориентаций на $\mathbb{R}A^k$, называемых *комплексными ориентациями*. Соответствующие фундаментальные классы обозначаются через $[\mathbb{R}A_{\pm}^k]$. Положим $[\mathbb{R}A_{\pm}] = \sum [\mathbb{R}A_{\pm}^k]$.

Пусть $\text{in}: A \rightarrow X$ – включение. Простейшее обобщение формулы Рохлина 1.1 (указанное В. И. Звониловым [129] при немного более сильных ограничениях) получается в предположении, что $[\mathbb{R}A_+] = 0$ в $H_1(\mathbb{R}X; \mathbb{Q})$. Это предположение равносильно существованию рациональных чисел x_{ij} , $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m_i$, для которых

$$(4.2.1) \quad [\mathbb{R}A_+] = \partial \sum x_{ij} [C_{ij}].$$

Если C_i неориентируема, x_{ij} однозначно определяются кривой $\mathbb{R}A \subset \mathbb{R}X$ и ее комплексной ориентацией. Если C_i ориентируема, класс $\sum_{j=1}^{m_i} x_{ij} [C_{ij}]$ определен с точностью до класса, кратного $[C_i]$. В этом случае, если C_i не тор, числа x_{ij} однозначно определяются условием $\sum x_{ij} \chi(C_{ij}) = 0$. (Если C_i – тор, число $\sum x_{ij} \chi(C_{ij})$ однозначно определено кривой $\mathbb{R}A$ и ее комплексной ориентацией.)

Обозначим через x образ класса $\sum x_{ij} [C_{ij}]$ в $H_2(X, \mathbb{R}A; \mathbb{Q})$. Существуют единственные классы $\xi_+, \xi_- \in H_2(X; \mathbb{Q})$, переходящие соответственно в $[A_+] - x$, $[A_-] + x$ при гомоморфизме релятивизации. Ясно, что $\xi_+ + \xi_- = [A]$. Заметим, что, в отличие от случая плоских кривых, эти классы могут не определяться комплексной ориентацией кривой $\mathbb{R}A$; поэтому они являются инвариантом жесткой изотопии разбивающей кривой в X . Согласно Звонилову существуют примеры, когда этот инвариант различает кривые с одинаковыми комплексными ориентациями.

Если A неособа, то $A_+ \cap A_- = \mathbb{R}A$. В общем случае $A_+ \cap A_-$ отличается от $\mathbb{R}A$ конечным числом точек. Обозначим через d^{+-} число этих точек с учетом их кратностей. Ясно, что $0 \leq d^{+-} \leq \frac{1}{2} \sum_{i < j} [A_i] \circ [A_j]$.

4.2.2. ТЕОРЕМА. При сделанных предположениях относительно A и X пусть, кроме того, $\text{in}_*[\mathbb{R}A_+] = 0$ в $H_1(\mathbb{R}X; \mathbb{Q})$. Тогда

$$\xi_+ \circ \xi_- = d^{+-} + \sum_{i,j=1}^{n,m_i} x_{ij}^2 \chi(C_{ij}).$$

Более того, для каждой ориентируемой компоненты C_i поверхности $\mathbb{R}X$

$$\xi_+ \circ [C_i] = -\xi_- \circ [C_i] = \sum_{j=1}^{m_i} x_{ij} \chi(C_{ij}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эти утверждения доказываются аналогично формуле Рохлина с использованием лагранжева свойства поверхности $\mathbb{R}X$ (т.е. того, что умножение на $\sqrt{-1}$ переводит касательное расслоение подмногообразия $\mathbb{R}X$ в его нормальное расслоение с противоположной ориентацией).

4.2.3. ДОПОЛНЕНИЕ. Справедливы равенства $\xi_+ \circ [A] = \xi_- \circ [A] = \frac{1}{2}[A]^2$.

В случае проективной плоскости $\xi_+ = \xi_- = \frac{1}{2}[A]$, и замена левой части первого равенства в 4.2.2 на $\frac{1}{4}[A]^2$ дает формулу Рохлина 1.1 (а также формулу Рохлина–Мишачева для кривых нечетной степени и формулу Рохлина–Звонилова–Виро для приводимых кривых). В общем случае нельзя считать, что $\xi_+ = \xi_-$, и придать желаемый вид вышеуказанной замене формулы Рохлина. Сравнивая точные последовательности пар $(A, \mathbb{R}A)$ и $(X, \mathbb{R}X)$, получаем, что равенства $\text{in}_*[\mathbb{R}A_+] = 0$ и $\xi_+ = \xi_-$ выполнены (при подходящем выборе чисел x_{ij}) тогда и только тогда, когда ядро гомоморфизма включения $H_2(A, \mathbb{R}A; \mathbb{Q}) \rightarrow H_2(X, \mathbb{R}X; \mathbb{Q})$ нетривиально. Имеется другое достаточное условие для $\xi_+ = \xi_-$, которое следует из второго равенства в 4.2.2 и того очевидного факта, что класс $\xi_+ - \xi_-$ инвариантен относительно conj_* :

4.2.4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Предположим, что $\text{in}_*[\mathbb{R}A_+] = 0$ в $H_1(\mathbb{R}X; \mathbb{Q})$ и что подпространство H^+ инвариантно относительно conj_* классов в $H_2(X; \mathbb{Q})$ порождается фундаментальными классами ориентируемых компонент поверхности $\mathbb{R}X$. Тогда $\xi_+ = \xi_-$, если коэффициенты x_{ij} выбраны так, что $\sum_{j=1}^{m_i} x_{ij} \chi(C_{ij}) = 0$ для каждой ориентируемой компоненты C_i поверхности $\mathbb{R}X$. (При этих условиях последнее равенство автоматически выполнено для всех компонент, гомеоморфных тору.)

Если X кэлерово, в силу равенства $\dim H^+ = \frac{1}{2}(b_2(X) + \chi(\mathbb{R}X)) - 1$ последнее условие в 4.2.4 выполнено, например, в следующих случаях:

- (1) $b_2(X) + \chi(\mathbb{R}X) = 2$;
- (2) $\mathbb{R}X$ — ориентируемая M -поверхность, $b_0(\mathbb{R}X) \leq 2$ и $\mathbb{R}X$ не пара торов;
- (3) $\mathbb{R}X$ — ориентируемая $(M - 1)$ -поверхность, $b_0(\mathbb{R}X) = 1$ и $\mathbb{R}X$ не тор.

ЗАМЕЧАНИЕ: ВАРИАНТЫ СРАВНЕНИЯ АРНОЛЬДА. Более сильное условие $\text{in}_*[\mathbb{R}A] = 0$ в $H_1(\mathbb{R}X; \mathbb{Z})$ позволяет выбрать в качестве коэффициентов x_{ij} в (4.2.1) целые числа, и из 4.2.2 следует, что $\chi(B) = \xi_+ \circ \xi_- \pmod{4}$, где B с $\partial B = \mathbb{R}A$ есть объединение компонент C_{ij} с нечетными x_{ij} . С другой стороны, если $\text{in}_*[\mathbb{R}A] = 0$ в $H_1(\mathbb{R}X)$ и B — произвольная часть поверхности $\mathbb{R}X$ с $\partial B = \mathbb{R}A$, то $\chi(B) = \mathcal{P}(\xi) - \chi(A) - \frac{1}{2}[A]^2 \pmod{4}$,

где $\mathcal{P}$ – квадрат Понтрягина, а $\xi \in H_2(X)$ – класс, определяемый циклом $A_+ + B$. Такая часть B с $\partial B = \mathbb{R}A$ существует, например, если $\text{in}_*[A] = 0 \in H_2(X)$, и в этом случае $\chi(B) = \mathcal{P}(\xi) \bmod 4$. Если, кроме того, $H_1(X) = 0$, то X является $\mathbb{Z}_2$ -Галуа максимальной и $\xi = \frac{1}{2}A + \text{bv}_2 w_1(B)$, где B – половина поверхности $\mathbb{R}X$, соответствующая двулистному накрытию; поэтому $\mathcal{P}(\xi)$ можно вычислить, используя формулу Понтрягина–Виро.

Другое обобщение формулы Рохлина, полученное Ж.-И. Вельшингером [124], использует предположение: $\text{in}_*[\mathbb{R}A] \in 2l \text{in}_*[H_1(\mathbb{R}A; \mathbb{Z})] \subset H_1(\mathbb{R}X; \mathbb{Z})$, $l \in \mathbb{Z}$. (В действительности, предположение в [124] является немного более общим.) Оно объединяет первоначальную формулу Рохлина, сравнение Арнольда и некоторые сравнения Михалкина [81]. Доказательство использует каноническое квадратичное отображение $\mathcal{P}_{\text{conj}}: H_2(X; \mathbb{Z}/2l\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/4l\mathbb{Z}$, являющееся расширением редукции скрученной квадратичной формы $H_2(X; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$, $x \mapsto x \circ \text{conj } x$.

При указанном предположении существуют такие целые x_{ij} , $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m_i$, что $[\mathbb{R}A_+] = \partial \sum x_{ij}[C_{ij}] \bmod 2l$. Обозначим через x образ класса $\sum x_{ij}[C_{ij}]$ в $H_2(X, \mathbb{R}A; \mathbb{Z})$. Существуют единственные классы $\xi_+, \xi_- \in H_2(X; \mathbb{Z}/2l\mathbb{Z})$, переходящие соответственно в $[A_+] - x$, $[A_-] + x$ при гомоморфизме релятивизации. Как и ранее, $\xi_+ + \xi_- = [A]$.

4.2.5. ТЕОРЕМА. Если A – разбивающая кривая с $\text{in}_*[\mathbb{R}A] \in 2l \text{in}_*[H_1(\mathbb{R}A; \mathbb{Z})]$, $l \in \mathbb{Z}$, то

$$\mathcal{P}_{\text{conj}}(\xi_+) = - \sum_{i,j=1}^{n,m_i} x_{ij}^2 \chi(C_{ij}) \bmod 4l.$$

В некоторых случаях, например, если $H_2(X; \mathbb{Z})$ порождается вещественными алгебраическими кривыми с известным расположением относительно $\mathbb{R}A$, элемент ξ_+ можно явно вычислить в терминах комплексной ориентации кривой $\mathbb{R}A$. Тогда 4.2.5 дает новые ограничения на комплексные ориентации. Точные формулировки можно найти в [124].

4.3. Формулы присоединения. Формула Рохлина для комплексных ориентаций тесно связана с обобщенной формулой присоединения Бишоп–Лая, указанной ниже: они обе подсчитывают алгебраическое число виртуальных двойных точек и, примененные в одной и той же ситуации, дают одинаковые результаты; более того, их геометрические доказательства аналогичны.

Традиционная *формула присоединения* для неособой кривой D на неособой поверхности X имеет вид:

$$(4.3.1) \quad 2g(D) - 2 = [D]^2 + [K_X] \circ [D],$$

или, в эквивалентной записи,

$$\chi(D) + D^2 = c_1(X) \cap D.$$

Если D – особая кривая, дефект $\frac{1}{2}(\chi(D) + D^2 - c_1(X) \cap D)$ можно интерпретировать как виртуальное число двойных точек кривой D .

Эту формулу можно легко обобщить с алгебраических кривых на погруженные вещественные двумерные многообразия (см. [73], [32]). Пусть F – вещественное ориентированное компактное двумерное многообразие (возможно, несвязное и с краем)

и $f: F \rightarrow X$ — погружение в комплексную поверхность X . Если $\partial F \neq \emptyset$, мы предполагаем, что либо f не имеет комплексных точек на ∂F (точка $x \in F$ называется комплексной, если $df(T_x F) \subset T_{f(x)} X = \mathbb{C}^2$ есть комплексная прямая), либо все точки края ∂F комплексные. Выберем следующим образом невырожденное векторное поле $n: \partial F \rightarrow f^*(TX)$, нормальное к ∂F : если f не имеет комплексных точек на ∂F , возьмем $n: \partial F \rightarrow TF \subset f^*(TX)$ нормальным к ∂F на F ; в противном случае $TF \subset f^*(TX)$ есть комплексное линейное подрасслоение расслоения $f^*(TX)$ над ∂F , и мы возьмем $n: \partial F \rightarrow f^*(TX)$ нормальным к TF .

Обозначим через $\nu(f) \in \mathbb{Z}$ препятствие к продолжению поля $\sqrt{-1}n$ до векторного поля, нормального к F , и через $c_1(f) \in \mathbb{Z}$ — препятствие к продолжению пары (τ, n) , где τ — невырожденное касательное поле на ∂F , до поля комплексных 2-реперов в $f^*(TX)$ над F . Последнее число есть индекс Маслова поля 2-реперов относительно перепонки F . Если $\partial F = \emptyset$, то $\nu(f)$ — нормальное число Эйлера поверхности F в $f^*(TX)$ и $c_1(f) = c_1(X) \cap f_*[F]$. В этих обозначениях формула Бишоп–Лая утверждает, что

$$(4.3.2) \quad \chi(F) + \nu(f) - c_1(f) = 2d_-(f), \quad \chi(F) + \nu(f) + c_1(f) = 2d_+(f),$$

где $d_{\pm}(f)$ определяются числом комплексных точек погружения f . Точнее, для общего отображения f положим $d_{\pm}(f) = e_{\pm}(f) - h_{\pm}(f)$, где $e_{\pm}$ (соответственно $h_{\pm}$) — числа положительных и отрицательных эллиптических (соответственно гиперболических) точек отображения f . В общем случае $d_+(f)$ и $d_-(f)$ можно определить как индексы пересечения образа поверхности F в гауссовом расслоении на ориентированные вещественные двумерные плоскости в $f^*(TX)$ с циклом комплексных прямых, наделенных их комплексной или соответственно антикомплексной ориентацией. Если компонента края ∂F состоит из комплексных точек, ее надо сначала отодвинуть от цикла в направлении касательного векторного поля $\tau^* \otimes n + \sqrt{-1} \tau^* \otimes \sqrt{-1} n$, определяемом вещественными двумерными плоскостями (τ, n) . Для общего отображения f числа e_+ и h_+ (соответственно e_- и h_-) есть числа положительных и отрицательных точек пересечения поверхности F с указанным комплексно (соответственно антикомплексно) ориентированным циклом. Определение эллиптических и гиперболических точек в локальных координатах можно найти, например, в [32].

4.3.3. Определение чисел $\nu(f)$ и $c_1(f)$ и формула Бишоп–Лая распространяются на более широкий класс поверхностей: можно считать, что F и $f: F \rightarrow X$ сшиты (вдоль компонент края) из поверхностей F_i и погружений $f_i: F_i \rightarrow X$, удовлетворяющих вышеуказанным условиям, так, что любые два соседних куса примыкают друг к другу нормально в X . (Мы не накладываем никаких ограничений на поля вдоль шпигных краев, поскольку не используем формулы сложения.) Заметим также, что если F замкнута, алгебраическое число $i(f)$ виртуальных двойных точек отображения f задается равенством

$$(4.3.4) \quad i(f) = \frac{1}{2}((f_*[F])^2 - \nu(f)) = \frac{1}{2}(\chi(F) + (f_*[F])^2 \pm c_1(f)) - d_{\pm}(f).$$

Следующее утверждение сразу следует из (4.3.2).

4.3.5. Пусть F – замкнутое ориентированное вещественное двумерное многообразие, X – комплексная поверхность и $f: F \rightarrow X$ – кусочно гладкое отображение такое же, как и в 4.3.3, причем его образ не имеет отрицательных комплексных точек. Тогда

$$\chi(F) + \nu(f) = c_1(f).$$

4.3.6. СЛЕДСТВИЕ. В обозначениях п. 4.2.2

$$\xi_{\pm}^2 = \frac{1}{2}[A]^2 - d^{+-} - \sum_{i,j=1}^{n,m_i} x_{ij}^2 \chi(C_{ij}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим 4.3.5 дважды: сначала к ξ (или к каждому его гладкому куску), а затем к A . (Ясно, что тот же результат следует из 4.2.2 и 4.2.3, ср. с началом этого раздела.)

В случае плоских кривых 4.3.6 превращается в формулу Рохлина.

4.4. Применение неравенства присоединения. Пусть кривая $A \subset X$ – такая же, как в п. 4.2. Предположим, что $\text{in}_*[\mathbb{R}A_+] = 0 \in H_1(\mathbb{R}X; \mathbb{Z})$ и обозначим через x_{ij} целые числа, определяемые равенством (4.2.1). Цикл ξ_+ , см. п. 4.2, можно представить в виде $f_*[F]$ для некоторого отображения $f: F \rightarrow X$ и некоторой поверхности F , спитой из A_+ и $|x_{ij}|$ копий поверхностей C_{ij} . Такой цикл не имеет отрицательных комплексных точек, и потому в силу (4.3.4) и 4.3.5 число $i_+(f')$ положительных двойных точек общей бифуркации f' отображения f удовлетворяет *неравенству присоединения*

$$i_+(f') \geq \frac{1}{2}(\chi(F) + (f_*[F])^2 - c_1(f)).$$

Результаты, полученные с использованием этого неравенства, слабее, чем формула Рохлина (которая в этом случае равносильна формуле Бишоп–Лая). Однако, как заметил Г. Б. Михалкин [82], можно получить новые запреты для *приводимых* вещественных кривых, применяя неравенство присоединения к подобным смешанным циклам с обращенной ориентацией некоторых голоморфных кусков. (Для простоты мы игнорируем более громоздкий случай, когда неприводимые компоненты имеют вещественные точки пересечения; с другой стороны, мы работаем с кривыми на произвольных кэлеровых поверхностях.)

Итак, зафиксируем целое $s \geq 1$ и положим $f': F \rightarrow X$ равным f на всех C_{ij} и всех A_+^k с $k > s$ и равным $\text{con} j \circ f$ на всех A_+^k с $1 \leq k \leq s$. Обозначим через $d_1, d_2 \in H_2(X; \mathbb{Z})$ элементы, реализуемые соответственно поверхностями $\bigcup_{k>s} A_k$ и $\bigcup_{k \leq s} A_k$, и положим x^{++} равным алгебраическому индексу пересечения цепей $\bigcup_{k>s} A_+^k$ и $\bigcup_{k \leq s} A_+^k$ (напомним, что согласно сделанным предположениям, см. п. 4.2, границы этих цепей не пересекаются).

4.4.1. ТЕОРЕМА. Пусть кривая $A \subset X$ такая же, как в п. 4.2, и $\text{in}_*[\mathbb{R}A_+] = 0$ в $H_1(\mathbb{R}X; \mathbb{Z})$. Если X кэлерова и $\omega \cap (d_1 - d_2) > 0$, где ω – кэлеров класс, то

$$j_- \geq x^{++} + \frac{1}{2}(c_1(X) \cap d_2 - d_1 \circ d_2),$$

где $j_- = \sum \frac{1}{2}|x_{ij}|(|x_{ij}| - 1)$, причем сумма берется по всем $|x_{ij}| \geq 2$, отвечающим компонентам C_{ij} , гомеоморфным кругу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это неравенство есть разность между равенством 4.3.5, примененным к f , и неравенством присоединения, примененным к обычному лагранжеву возмущению отображения f' , представляющему собой погружение с $j_- + \frac{1}{2}(d_1 \circ d_2) - x^{++}$ отрицательными двойными точками.

4.4.2. СЛЕДСТВИЕ. Пусть X, d_1, d_2 — такие же, как и выше, и $\omega \cap (d_1 - d_2) > 0$ (см. 4.4.1). Предположим, что инвариантное относительно conj_* подпространство в $H_2(X; \mathbb{Q})$ порождается фундаментальными классами ориентируемых компонент поверхности $\mathbb{R}X$ и что для любого k каждая компонента связности кривой $\mathbb{R}A^k$ ограничивает круг. Тогда

$$j_- \geq z^+ - z^- + \frac{1}{2}c_1(X) \cap d_2 - \frac{1}{4}(d_1 \circ d_2),$$

где $z^\pm$ — числа положительных и отрицательных инъективных пар овалов таких, что один из овалов лежит в A_k с $k \leq s$, а другой — в A_k с $k > s$. (Для того чтобы определить инъективную пару овалов, надо для каждой компоненты связности кривой $\mathbb{R}A$ выбрать и зафиксировать круг, ограниченный этой компонентой.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим циклы Рохлина, дополнив $\bigcup_{k>s} A_+^k$ и $\bigcup_{k \leq s} A_-^k$ кругами. Тогда x^{++} можно найти, вычисляя пересечение этих циклов двумя способами: гомологически (применяя 4.2.4) и геометрически.

Следующий пример применения п. 4.4.2 (вместе с формулой Рохлина) также принадлежит Михалкину. Пусть A — вещественная плоская кривая степени $2k$ с вещественной схемой $\langle \frac{3}{2}k(k-1) \rangle \sqcup 1 \langle \frac{1}{2}(k-1)(k-2) \rangle$ (схема Харнака) и C — вещественная коника с $\mathbb{R}C \cap \mathbb{R}A = \emptyset$. Тогда не более $(k-2)$ внутренних овалов кривой $\mathbb{R}A$ лежат внутри овала кривой $\mathbb{R}C$.

4.5. Формула Оревкова. С. Ю. Оревков [92] заметил, что если плоская M -кривая степени d имеет гнездо глубины $k-1$, $k = [d/2]$, формула Рохлина распадается на два отдельных равенства. Для такой кривой непустые овалы содержатся один в другом и потому разбиваются на *положительные* и *отрицательные* (например, относительно самого внешнего овала гнезда). Обозначим через π_+^+ и π_+^- (соответственно π_-^+ и π_-^-) числа положительных и отрицательных инъективных пар, внутренний овал которых пуст, а внешний положителен (соответственно отрицателен).

4.5.1. ФОРМУЛА ОРЕВКОВА. Для любой плоской M -кривой степени $2k$ с гнездом глубины $k-1$ справедливы равенства

$$\pi_+^- - \pi_+^+ = k_+^2, \quad \pi_-^+ - \pi_-^- = k_-^2,$$

где k_+ и k_- — числа положительных и отрицательных непустых овалов.

Указанная формула и аналогичная ей формула для кривых нечетной степени дают новую информацию о комплексных ориентациях для степеней ≥ 7 . Обе формулы распространяются на любые разбивающие кривые.

Первоначальное доказательство (см. [92]) основано на подсчете коэффициентов самозацеплений кос, отсекаемых кривой $\mathbb{C}A$ на границе двух четырехмерных шаров, образованных мнимыми точками мнимых прямых, проходящих через точку внутри самого внутреннего овала гнезда. Ж.-И. Вельшингер [125] заметил, что формулу Оревкова

можно также получить из формулы присоединения, примененной к соответствующим смешанным особым циклам, и обобщил эту формулу на кривые, лежащие на поверхностях, расслоенных на коники. Для простоты мы сформулируем его результат для геометрически линейчатых поверхностей, т.е. для расслоений на неособые коники.

Пусть $\pi: X \rightarrow B$ – голоморфное эквивариантное отображение вещественной поверхности на вещественную кривую. Предположим, что B – разбивающая кривая, а каждый слой F отображения π – гладкая неприводимая рациональная кривая. Предположим, кроме того, что π имеет вещественное сечение E . Фундаментальные классы кривых F и E являются образующими группы $H_2(X; \mathbb{Z})$.

Обозначим через $B_1, \dots, B_p$ компоненты связности кривой $\mathbb{R}B$ и через $X_1, \dots, X_p$ – их прообразы в $\mathbb{R}X$. (Каждая поверхность X_j есть тор или бутылка Клейна.) Выберем половину B_+ кривой B и наделим $\mathbb{R}B$ соответствующей комплексной ориентацией.

Пусть $A \subset X$ – неособая неприводимая разбивающая вещественная $(M - 2r)$ -кривая со стягиваемым овалом на каждой вещественной компоненте поверхности X (последнее условие не существенно для 4.5.2). Выберем половину A_+ кривой A и наделим $\mathbb{R}A$ соответствующей комплексной ориентацией. Для каждого i , $1 \leq i \leq p$, рассмотрим компоненты кривой $\mathbb{R}A$, которые проектируются на B_i с положительной (соответственно отрицательной) степенью, и обозначим через n_i^+ (соответственно n_i^-) их общую степень. Для каждого i существует такое положительное целое k_i , что $n_i^+ + n_i^- + 2k_i = [A] \circ [F]$. Если $k_i = 1$ для всех i , $1 \leq i \leq p$, будем говорить, что A – *кривая с глубоким гнездом*. Ясно, что *веса* $n^+ = n_i^+$ и $n^- = n_i^-$ для кривой с *глубоким гнездом* не зависят от i .

Всюду далее будем считать, что A – кривая с глубоким гнездом. Тогда каждый вещественный слой отображения π имеет не более двух общих с кривой A мнимых точек. Если вещественный слой F имеет две общие с кривой A мнимые точки, выберем точку $x \in \mathbb{R}F$, не лежащую на E . Такой выбор можно сделать непрерывным. Более того, если все *точки поворота* (т.е. точки касания кривой $\mathbb{R}A$ со слоем) не лежат на E , существует канонический выбор: проведем окружность γ в F через две указанные мнимые точки и через точку кривой E и возьмем в качестве x точку пересечения этой окружности с $\mathbb{R}F$, отличную от точки на E . Выбранные точки образуют конечный набор дуг S_j , каждая из которых соединяет две точки поворота. Объединение дуг S_j дополняется до замкнутой, не обязательно связной или простой, кривой Γ^+ (соответственно Γ^-) дугами кривой $\mathbb{R}A$, проектирующимися на $\mathbb{R}B$ с положительной (соответственно отрицательной) локальной степенью. Комплексная ориентация кривой $\mathbb{R}A$ определяет коориентацию дуги S_j в ее граничных точках; она продолжается до непрерывной коориентации дуги S_j . Обозначим продолженную коориентацию через ω . Не умаляя общности, можно считать, что пересечения внутренностей дуг S_j с $\mathbb{R}A$ трансверсальны; припишем каждой точке такого пересечения знак $+1$, если ω совпадает с ориентацией кривой $\mathbb{R}A$, и -1 в противном случае. Пусть $\Lambda^\pm$ – сумма этих знаков по всем двойным точкам кривой $\Gamma^\pm$.

Чтобы сделать $\Lambda^\pm$ более инвариантными, удалим зигзаги на $\mathbb{R}A$ (каждый зигзаг меняет одно из чисел $\Lambda^\pm$ на $n^\pm - 1$ или 1 в зависимости от того, пересекает он $\mathbb{R}E$ или нет). После этого $\Lambda^\pm$ будут сохраняться при изотопиях неориентируемых компонент поверхности $\mathbb{R}X$, тождественных на $\mathbb{R}E$ и на каждой компоненте кривой $\mathbb{R}A$, пересекающей $\mathbb{R}E$. Более общо, $\Lambda^\pm$ сохраняются при изотопии неориентируемой ком-

поненты поверхности $\mathbb{R}X$, тождественной на $\mathbb{R}E$, если во время изотопии точки поворота не пересекают $\mathbb{R}E$ (каждое пересечение меняет оба числа $\Lambda^\pm$ на $n^\pm$). Изотопия ориентируемой компоненты поверхности $\mathbb{R}X$ сохраняет $\Lambda^\pm$, если, например, во время изотопии (так же, как и в начальном положении) $\mathbb{R}A$ не пересекает $\mathbb{R}E$.

4.5.2. ТЕОРЕМА. *При сделанных выше предположениях существуют такие целые числа $\mu^\pm, g^\pm, a^\pm$, что*

$$\Lambda^\pm + n^\pm a^\pm + \mu^\pm - g^\pm = \frac{1}{2}(\chi(B) - n^\pm E^2)(n^\pm + 1)$$

и

$$\begin{aligned} g^\pm &\geq c^\pm, \quad g^+ + g^- + 2 - \mu^+ - \mu^- = c^+ + c^- + 2r, \\ \mu^\pm &\geq 1, \quad \mu^+ + \mu^- \leq p + 1, \\ a^+ + a^- &= a, \quad a^\pm + E^2(n^\pm + 1) = \mathbb{R}E \circ \Gamma^\pm \bmod 2, \\ |\mathbb{R}E \cap \Gamma^\pm| &\leq a + E^2(n^\pm + 1) \leq a^\pm + E^2b - |\mathbb{R}E \cap \Gamma^\mp|, \end{aligned}$$

причем $a[F] + b[E] = [A]$, а c^+, c^- — числа компонент кривой $\mathbb{R}A$, проектирующейся в компоненту кривой $\mathbb{R}B$ с положительной (соответственно отрицательной) степенью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим поверхность

$$W^\pm = (A^\pm \cap \pi^{-1}(B^+)) \cup (A^\mp \cap \pi^{-1}(B^-))$$

и заполним ее дыры вложенными кругами, лежащими в прообразах кривой $\mathbb{R}B$, диаметрами которых являются сегменты S_j (например, можно использовать дуги окружностей, указанных в построении дуг S_j). Утверждение теоремы следует из формулы присоединения 4.3.5, примененной к полученному особому циклу $\Sigma^\pm$, если использовать равенства $\nu = (\Sigma^\pm)^2 + 2\Lambda^\pm$, $\Sigma^\pm \circ F = n^\pm + 1$, ввести $a^\pm$, исходя из формулы $[\Sigma^\pm] = a^\pm[F] + (n^\pm + 1)[E]$, и взять в качестве $g^\pm$ и $\mu^\pm$ род и число компонент связности поверхности $W^\pm$.

4.5.3. СЛЕДСТВИЕ. *В условиях п. 4.5.2 если A не пересекает E , то*

$$\Lambda^\pm + \mu^\pm - g^\pm = \frac{1}{2}(\chi(B) + E^2 n^\pm)(n^\pm + 1).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Чтобы получить 4.5.1 из 4.5.3, раздуем точку внутри самого внутреннего овала некоторого гнезда глубины $k - 1$; тогда $\chi(B) = 2$, $E^2 = -1$, $\mu^\pm = 1$, $g^\pm = K_\pm$ и $\Lambda^\pm = \Pi_\pm^- - \Pi_\pm^+$, где K и Π отличаются от k и π в 4.5.1 тем, что самый внутренний овал выбранного гнезда дает вклад в K и не дает в Π и в то же время не дает вклад в k и дает в π .

4.6. Теорема Безу. Теорема Безу играет важную роль в теории вещественных плоских проективных алгебраических кривых. Для произвольной поверхности X комплексная форма этой известной теоремы утверждает, что *если кривые $A, B \subset X$ не имеют общих компонент, то число их точек пересечения с учетом кратностей равно $[A] \circ [B]$* . Важным моментом является то, что кратность точки пересечения

двух аналитических кривых, не имеющих общих компонент, — целое положительное число. Это дает вещественный вариант теоремы Безу (ср. замечание в А.2): *если X — вещественная поверхность и $A, B \subset X$ — вещественные кривые без общих компонент, то число точек пересечения кривых $\mathbb{R}A$ и $\mathbb{R}B$ с учетом их кратностей не превосходит $[A] \circ [B]$ и сравнимо с $[A] \circ [B] \bmod 2$.*

Одно из типичных применений теоремы Безу — проведение вспомогательной кривой D через определенное число подходящим образом выбранных точек и оценка числа точек пересечения кривой $\mathbb{R}D$ с данной кривой $\mathbb{R}A$ (именно таким способом Харнак получил свою оценку числа вещественных компонент плоской кривой). Иногда требуется, чтобы кривая $\mathbb{R}D$ была связной или, более общо, чтобы все точки пересечения лежали на одной компоненте кривой $\mathbb{R}D$. Простейший способ обеспечить это — рассматривать рациональные кривые.

Таким образом, для применения теоремы Безу на произвольной поверхности X нужно, во-первых, выяснить, можно ли данный класс $x \in H_2(X; \mathbb{Z})$ реализовать формальной линейной комбинацией аналитических кривых, и, во-вторых, найти размерность пространства таких кривых и их род. Ответ на первый вопрос в случае, когда X проективна, дается теоремой Лефшеца–Ходжа (см. [68]): *гомологический класс $x \in H_2(X; \mathbb{Z})$ можно реализовать формальной линейной комбинацией алгебраических кривых на X тогда и только тогда, когда класс, двойственный по Пуанкаре классу x , принадлежит группе $H^{1,1}(X)$* (см. 2.4). Несмотря на то, что для поверхностей размерность $h^{1,1}(X) = \dim H^{1,1}(X)$ является топологическим инвариантом: $h^{1,1}(X) = \sigma^-(X) + 1$, расположение подгруппы $H^{1,1}$ в $H^2(X; \mathbb{Z})$ зависит от комплексной структуры на X и может меняться при варьировании поверхности X в пределах ее деформационного типа. Поэтому в общем случае можно лишь утверждать, что рациональные кратные класса гиперплоского сечения (те, которые являются целочисленными классами) можно реализовать комбинациями алгебраических кривых. Однако, если $h^{1,1}(X) = b_2(X)$, т.е. $\sigma^+(X) = 1$, все классы в $H_2(X; \mathbb{Z})$ являются алгебраическими. Примеры — рациональные поверхности и поверхности Энрикеса.

Размерность линейной системы $|D|$ в определенных случаях можно оценить, используя *теорему Римана–Роха*:

$$(4.6.1) \quad \dim |D| + \dim |K_X - D| \geq \frac{1}{2}([D]^2 - [K_X] \circ [D]) + p_a(X) - 1,$$

где $p_a(X) = \frac{1}{2}(\sigma^+(X) - b_1(X) + 1)$ есть *арифметический род* поверхности X . Если D обилён (напомним, что для эффективного дивизора на поверхности это эквивалентно тому, что $[D]^2 > 0$ и $[D] \circ [D'] \geq 0$ для всех неприводимых компонент D' дивизора D), то $|K_X - D| = \emptyset$ и в 4.6.1 достигается равенство:

$$(4.6.2) \quad \dim |D| = \frac{1}{2}([D]^2 - [K_X] \circ [D]) + p_a(X).$$

Следующее утверждение легко вывести из 4.6.2.

4.6.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Пусть D — обильный вещественный дивизор и $s_D = \frac{1}{2}([D]^2 - [K_X] \circ [D]) + p_a(X)$. Тогда через любые s_D точек можно провести*

вещественную кривую, принадлежащую $|D|$. Более того, для любого $(s_D - s)$ -точечного множества S , $s \geq 0$, вещественные кривые из $|D|$, содержащие S , образуют вещественную линейную систему размерности $\geq s$.

К сожалению, этот результат недостаточен даже для обобщения хорошо известных неравенств Гильберта на случай большего числа гнезд. Трудность состоит в том, что число компонент связности кривой, даваемой предложением 4.6.3, нелегко проконтролировать. В общем случае можно лишь утверждать, что это число лежит между 1 и $2 + \frac{1}{2}([D]^2 + [K_X] \cdot [D])$, т.е. границей Харнака. Поэтому, кроме того, было бы полезно знать, через какое число точек можно провести компоненту связности кривой, принадлежащей $|D|$. (Этот и другие подобные вопросы, более или менее явно поднятые в [99], по-видимому, представляют интерес независимо от неравенств для гнезд.)

Обозначим через $c(D)$ максимальное число c такое, что через любые c точек поверхности $\mathbb{R}X$, находящихся в общем положении, можно провести вещественную кривую, принадлежащую $|D|$ и имеющую связное множество вещественных точек. Обозначим, далее, через $c'(D)$ максимальное число c такое, что через любые c точек поверхности $\mathbb{R}X$ (не обязательно в общем положении) можно провести компоненту связности множества вещественных точек вещественной кривой, взятой из $|D|$.

4.6.4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. $c'(D) \geq c(D)$ для любого дивизора D .

4.6.5. ЛЕММА. Пусть $\{F_n\}$ – последовательность непрерывных функций на компактном хаусдорфовом пространстве Y , равномерно сходящаяся к функции F . Если множество нулей Z_n функции F_n связно для каждого n , то множество нулей Z функции F имеет компоненту связности, содержащую $\bigcap_n Z_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть пересечение $\bigcap_n Z_n$ непусто. Оно содержится в Z . Выберем точку $z \in \bigcap_n Z_n$ и открыто-замкнутое подмножество C в Z , содержащее z . Поскольку Z замкнуто в Y , множества C и $Z \setminus C$ тоже замкнуты и, следовательно, разделяются окрестностью U (т.е. $U \supset C$ и $\overline{CU} \cap (Z \setminus C) = \emptyset$).

Так как сходимость $F_n \rightarrow F$ является равномерной, существует такой номер N , что $Z_n \subset U \cup (Y \setminus \overline{CU})$ для всех $n > N$. Тогда, поскольку все Z_n связны и пересекают $C \subset U$, каждое Z_n с $n > N$ содержится в U , и, следовательно, $\bigcap_n Z_n$ содержится в $C = U \cap Z$. Остается заметить, что в компактном хаусдорфовом пространстве пересечение всех открыто-замкнутых подмножеств, содержащих данную точку, есть компонента связности этой точки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 4.6.4. Пусть c – такое число, что через любые c точек в общем положении на $\mathbb{R}X$ можно провести вещественную алгебраическую кривую из $|D|$ со связным множеством вещественных точек. Нужно доказать, что любое c -точечное множество в $\mathbb{R}X$ содержится в компоненте связности вещественной кривой из $|D|$.

Рассмотрим c -точечное множество $\Sigma \subset \mathbb{R}X$. По предположению существует последовательность c -точечных множеств $\{\Sigma_n\}$ в $\mathbb{R}X$, сходящаяся к Σ и такая, что каждое Σ_n лежит на связной вещественной кривой $\mathbb{R}A_n$ из $|D|$. Пусть ξ есть $\mathbb{R}$ -расслоение над $\mathbb{R}X$, соответствующее линейной системе $|D|$. Его тензорный квадрат, как квадрат любого $\mathbb{R}$ -расслоения, тривиален. Пусть F_n , $n \geq 1$, – вещественное сечение расслоения ξ , представляющее кривую A_n . Поскольку пространство сечений конечномерно,

после соответствующей нормировки последовательность $\{F_n\}$ будет содержать сходящуюся подпоследовательность. Как обычно, можно считать, что $\{F_n\}$ сама сходится. Остается применить лемму 4.6.5 к F_n^2 , рассматриваемым как функции на $\mathbb{R}X$.

Следующее свойство аддитивности сразу следует из определений.

4.6.6. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Для любых дивизоров D_1, D_2*

$$c(D_1 + D_2) \geq c(D_1) + c(D_2) - 1 \quad \text{и} \quad c'(D_1 + D_2) \geq c'(D_1) + c'(D_2) - 1.$$

Упомянем о некоторых других проблемах, связанных с этой темой. Во-первых, естественно рассматривать кривые с ограниченным числом компонент. Тогда $c(D)$ становится первым членом $c_1(D)$ большего семейства характеристик $c_{\leq k}(D)$, определяемых аналогично $c(D)$ с заменой требования связности кривой условием иметь не более k компонент связности. Во-вторых, можно рассматривать минимакс $\nu(r, D)$ и максимум $\mu(r, D)$ числа компонент связности в линейной подсистеме данной размерности r в $|D|$. Другая возможность – рассматривать иные топологические характеристики линейных систем, скажем, типовые числа Морса и т. д.

4.6.7. ОЦЕНКА МАРЕНА. *Если дивизор D очень обилен и число $\chi(X) + D^2$ нечетно, любой общий пучок вещественных кривых в $|D|$ содержит хотя бы одну $(M - j)$ -кривую с некоторым $j \geq 3$.*

Этот результат можно переформулировать так: $\mu(1, D) \leq M(D) - 3$, где $M(D)$ – число Харнака $2 + \frac{1}{2}([D]^2 + [K_X] \circ [D])$.

4.6.8. УТВЕРЖДЕНИЕ КЛЕЙНА. *Если вещественная кривая типа I подвергается морсовской перестройке при переходе через невырожденную двойную точку, то число ее компонент связности не увеличивается.*

Заметим, что число компонент связности такой кривой не обязательно меняется, ср. 4.6.9 ниже. Утверждение Клейна, другими словами, означает, что для любого q число компонент связности, рассматриваемое как кусочно постоянная функция на пространстве $\mathbb{R}C_q$ кривых степени q , достигает “локального максимума” на каждой компоненте пространства $\mathbb{R}C_q \setminus \mathbb{R}D_q$ (где $\mathbb{R}D_q$ – гиперповерхность особых кривых), образованной вещественными кривыми типа I. В добавление к 4.6.7 и 4.6.9 можно показать, используя комплексные ориентации, что не существует стенки (т.е. старшего страта множества $\mathbb{R}D_q$), к которой примыкают две компоненты, образованные кривыми типа I. (Имеется одно исключение: $q = 2$ и стенка, соответствующая выворачиванию овала наизнанку; однако эта стенка не разделяет две разные компоненты!)

ЗАМЕЧАНИЕ. Утверждение 4.6.8 распространяется на поверхности (см. [119]) и на гиперповерхности в проективном пространстве (см. [54]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 4.6.8. Пусть A_t , $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, – такое семейство вещественных кривых, что A_0 – кривая с невырожденной двойной точкой, кривые $A_{<0}$ принадлежат типу I и число компонент связности уменьшается при переходе от $\mathbb{R}A_{>0}$ к $\mathbb{R}A_{<0}$. Из последнего условия следует, что особая компонента связности множества $\mathbb{R}A_0$, поднятая в нормализацию кривой A_0 , есть топологическая окружность. В частности, число вещественных компонент нормализации кривой A_0 равно числу

компонент множества $\mathbb{R}A_{<0}$. С другой стороны, род кривой A_0 и род кривой $A_{\neq 0}$ отличаются на 1: $g(A_0) = g(A_{\neq 0}) - 1$. Поэтому в силу, например, сравнения Клейна (которое утверждает, что число вещественных компонент разбивающей кривой сравнимо с родом по модулю 2, ср. введение) A_0 не принадлежит типу I. Следовательно, две комплексно сопряженные точки в $A_0 \setminus \mathbb{R}A_0$ можно соединить путем в $A_0 \setminus \mathbb{R}A_0$. Значит, такой путь существует и в каждой близкой кривой A_t , $t \neq 0$, что противоречит принадлежности кривых A_t с $t < 0$ типу I.

Для $(M - 2)$ -кривых утверждение Клейна можно усилить.

4.6.9. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Если две $(M - 2)$ -кривые получаются друг из друга морсовской перестройкой при переходе через невырожденную двойную точку, то одна из них принадлежит типу I, а другая — типу II.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через A_t , $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, семейство таких вещественных кривых, что A_0 — кривая с невырожденной двойной точкой и $A_{\neq 0}$ являются $(M - 2)$ -кривыми. Так как число компонент связности не меняется от $\mathbb{R}A_{>0}$ к $\mathbb{R}A_{<0}$, особая компонента связности множества $\mathbb{R}A_0$, поднятая в нормализацию кривой A_0 , превращается в две топологические окружности. В частности, число вещественных компонент нормализации кривой A_0 больше на 1 числа компонент множества $\mathbb{R}A_t$ с $t \neq 0$. С другой стороны, $g(A_0) = g(A_{\neq 0}) - 1$. Поэтому нормализация является M -кривой и, следовательно, принадлежит типу I, а вместе с ней и ее возмущение, согласованное с комплексной ориентацией (в то время как другое возмущение принадлежит типу II).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 4.6.7. Рассмотрим граф Γ с 4 вершинами, представляющими M -, $(M - 1)$ -кривые, $(M - 2)$ -кривые типа I и $(M - 2)$ -кривые типа II. Две вершины соединим ребром, если их можно представить примыкающими кривыми. В силу 4.6.8 и 4.6.9 Γ имеет только три ребра: они соединяют вершины M и $M - 1$, $M - 1$ и $M - 2$ типа II, $M - 2$ типа II и $M - 2$ типа I. В частности, Γ не содержит циклов нечетной длины.

Общий пучок вещественных кривых в $|D|$, рассматриваемый как прямая в соответствующем проективном пространстве, пересекает дискриминантную гиперповерхность особых кривых трансверсально, причем точки пересечения отвечают перестройкам вещественных частей кривых. Степень дискриминанта сравнима с $\chi(X) + D^2$ по модулю 2. Поэтому если пучок не содержит $(M - j)$ -кривую с $j \geq 3$, он определяет цикл нечетной длины в построенном выше графе, что приводит к противоречию.

В заключение этого раздела мы используем предыдущие результаты для получения оценок числа овалов в гнездах. Первая теорема формулируется так, что она зависит только от нижней границы для $c'(D)$.

4.6.10. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Если вещественная кривая C имеет $s \leq c'(D)$ таких дизъюнктивных гнезд глубины $h_1, \dots, h_c$, что ни один овал гнезд глубины > 1 не охватывает все остальные овалы этих гнезд, то*

$$h_1 + \dots + h_c + \left\lceil \frac{1}{2}(c'(D) - c) \right\rceil \leq \frac{1}{2}C \circ D.$$

В частности, если C имеет $c \leq c'(D) - 1$ таких дизъюнктивных гнезд глубины $h_1, \dots, h_c$, что ни один овал гнезд глубины > 1 не охватывает все остальные овалы этих гнезд и

$$h_1 + \dots + h_c + \left\lceil \frac{1}{2}(c'(D) - c) \right\rceil = \left\lceil \frac{1}{2}C \circ D \right\rceil,$$

то объединение этих гнезд исчерпывает всю кривую.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В каждом гнезде возьмем точку на самом внутреннем овале (или внутри него, если $h > 1$) и еще $c'(D) - c$ точек на одном из этих овалов. Проведем связную компоненту вещественной кривой из $|D|$ через $c'(D) = c + (c'(D) - c)$ полученных точек. Она пересекает исходную кривую не менее, чем в $2(h_1 + \dots + h_c) + r$ точках, где $r = 2\left\lceil \frac{1}{2}(c'(D) - c) \right\rceil$. Поэтому из теоремы Безу получаем нужную оценку, а экстремальное свойство является его прямым следствием.

Если объединение таких гнезд не исчерпывает всю кривую, то оценку можно немного уточнить, взяв дополнительно $c'(D) - c$ точек на овале, не входящем в гнезда.

4.6.11. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть вещественная кривая C имеет $s = \frac{1}{2}D \circ (D - K) - l$ гнезд, лежащих вне друг друга. Если $s > \mu(l, D)$, то среди этих гнезд найдутся $s - \mu(l, D) + 1$ гнезд, общее число овалов которых не больше, чем $\frac{1}{2}C \circ D - (\mu(l, D) - 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В каждом гнезде возьмем точку на самом внутреннем овале и рассмотрим линейную систему кривых в $|D|$, проходящих через эти точки. Ее размерность не меньше l , и по определению числа $\mu(l, D)$ она содержит кривую D_0 с числом компонент связности $\leq \mu(l, D)$. Поэтому в пересечение с D_0 не менее $s - \mu(l, D) + 1$ гнезд дают вклад, не меньший их удвоенной глубины. Вклад каждого из остальных гнезд не меньше 2 благодаря их самым внутренним овалам. Остается применить неравенство Безу.

4.6.12. СЛЕДСТВИЕ. Если кривая C имеет $\frac{1}{2}D \circ (D - K)$ гнезд, лежащих вне друг друга, то среди этих гнезд найдутся $r = -D \circ K - 1$ гнезд, общее число овалов которых не превосходит $\frac{1}{2}C \circ D - \frac{1}{2}D \circ (D + K) - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это следствие — специальный случай предложения 4.6.11, когда $l = 0$. Действительно, $\mu(0, q) = \frac{1}{2}D \circ (D + K) + 2$ и $r = \frac{1}{2}D \circ (D - K) - \mu(0, D) + 1$.

4.7. Плоские кривые, проходящие через данные точки. В случае плоских кривых линейная система $|D|$ определяется степенью q дивизора D . Поэтому речь идет просто о двух последовательностях $\{c(q)\}$, $\{c'(q)\}$. Их первые четыре члена известны.

4.7.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Справедливы равенства

$$c(1) = c'(1) = 2, \quad c(2) = c'(2) = 5, \quad c(3) = c'(3) = 8 \quad \text{и} \quad c(4) = c'(4) = 13.$$

Заметим, что любой вещественный пучок кубик, в действительности, содержит вещественную кубик со связной вещественной частью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество вещественных точек любой вещественной кривой степени 1 или 2 связно. В силу 4.6.4 остается доказать, что

$$8 \leq c(3), c'(3) < 9, \quad 13 \leq c(4), c'(4) < 14.$$

Неравенство $c(3) \geq 8$ следует из 4.7.3 ниже. Для доказательства неравенства $c'(3) < 9$ возьмем неприводимую вещественную кривую A степени 3 с двумя вещественными компонентами, выберем 5 точек на ее двусторонней компоненте и 4 точки на односторонней. В силу двойственности Пуанкаре любая вещественная кривая A' степени 3, проходящая через 9 выбранных точек, имеет 5 точек пересечения с односторонней компонентой (либо одна из четырех выбранных точек получается кратной). Тогда по теореме Безу A' совпадает с A , но ни одна из компонент кривой A не содержит все 9 точек.

Неравенства $c(4) \geq 13$ является простым следствием п. 4.6.7.

Для доказательства неравенства $c'(4) < 14$ возьмем вещественную кривую A степени 4 с 4 вещественными компонентами, выберем 11 точек на одной из них и по одной точке на каждом из остальных овалов. В силу двойственности Пуанкаре любая вещественная кривая A' степени 4, проходящая через 14 выбранных точек, пересекает каждый овал кривой A еще по крайней мере в одной точке (или имеет кратную точку пересечения). Поэтому общее число точек пересечения > 16 , и по теореме Безу A' совпадает с A (как кривая степени 4 с максимальным числом компонент A неособа и неприводима). Остается заметить, что ни одна из компонент кривой $A' = A$ не содержит все 14 точек.

ЗАМЕЧАНИЕ. В доказательстве неравенства $c'_3 < 9$, приведенном выше, 9 точек выбраны так, что они не лежат ни на одной вещественной кубике, отличной от A . Из доказательства следует также, что связную вещественную кубическую кривую можно провести через 9 точек M -кубики C тогда и только тогда, когда эти точки лежат на кубике C' , отличной от C . Существование кубики C' можно выразить в терминах групповой структуры на C : она существует тогда и только тогда, когда сумма этих 9 точек равна 0 (или, точнее, 9-кратной точке перегиба). Конечно, множество из 9 точек должно быть инвариантным относительно комплексного сопряжения; тогда C' можно выбрать вещественной. Как следствие получаем, что девятки точек, не лежащих на связной кубике, образуют открытое непустое подмножество в пространстве всех девяток точек на $\mathbb{RP}^2$.

Точное значение остальных членов последовательностей $\{c(q)\}, \{c'(q)\}$ неизвестно. Ниже мы даем несколько простых общих нижних и верхних границ.

4.7.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для любого q справедливо неравенство $c(q) \geq 3q - 1$.

Отступление: вещественные рациональные кривые. Насколько нам известно, следующий вопрос пока остается открытым: *возможно ли провести неприводимую вещественную рациональную кривую (или, точнее, ее компоненту связности) степени q через любое множество $3q - 1$ вещественных точек в общем положении?* В [99] на этот вопрос был дан утвердительный ответ, однако доказательство не было опубликовано; возможно, оно содержало пробел. С другой стороны, можно отбросить условие общего положения и поставить вопрос о существовании некоторой (не обязательно неприводимой) рациональной кривой.

Первый нетривиальный случай (и единственный, где известен полный ответ) — когда $q = 3$: через 8 точек в общем положении можно провести 12 (рациональных) кубик; в зависимости от расположения точек, 8, 10 или 12 из них вещественны. (Все три значения реализуются; все 12 рациональных кубик в пучке вещественны тогда и только тогда, когда пучок содержит две кубики с уединенной вещественной двойной точкой.)

Имеется также несколько простых результатов о наборах точек с предписанными кратностями. Например, если $q - 1$ из $3q - 1$ точек совпадают, ответ утвердительный. По сути дела, в аффинной системе координат, в которой кратная точка M и одна из остальных $2q$ точек, обозначенная через N , лежат на бесконечности, задача становится линейной: если ось x провести через N , а ось y — через M , то все сведется к интерполяции $2q - 1$ значений y_j рациональной функцией $y = P(x)/Q(x)$ мультистепени $(\deg P, \deg Q) = (q - 1, q - 1)$. Явное решение этой задачи называется *интерполяционной формулой Коши*. Как показывает это построение, через **любые** $2q$ вещественных точек можно провести вещественную рациональную кривую степени q . Этот результат можно также получить соответствующим малым возмущением семейства q прямых, проходящих через данные точки, рассматривая в пространстве $\mathbb{R}C_q$ вещественных кривых степени q подмногообразие кривых, имеющих $\frac{1}{2}(q - 1)(q - 2)$ двойных точек. Замена прямых кониками или рациональными кубиками дает несколько лучшие результаты: вещественную рациональную кривую степени q можно провести через **любые** $\frac{5}{2}q$ или соответственно $\frac{8}{3}q$ вещественных точек.

4.7.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Для любых 8 точек в общем положении в $\mathbb{RP}^2$ обозначим через s_+ (соответственно s_-) число вещественных кубик, проходящих через эти точки и имеющих уединенную (соответственно неуединенную) двойную точку. Тогда $s_- - s_+ = 8$ и $s_- + s_+ \leq 12$. В частности, существует не менее 8 вещественных рациональных кубик, проходящих через данные точки.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пучок кубик, проходящих через 8 данных точек, определяет (особое) расслоение $X \rightarrow \mathbb{RP}^1$, где X есть $\mathbb{RP}^2$, на которой эти 8 точек раздуты. Утверждение следует из вычисления эйлеровой характеристики пространства X .

Заметим, что аналогично доказывается утверждение: любой пучок кубик содержит кубик со связной вещественной частью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 4.7.2. В силу п. 4.7.1 достаточно рассмотреть случай $q > 4$. Доказательство зависит от значения $q \bmod 4$.

Если $q = 4k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$, то $3(4k + 1) - 1 = 12k + 2$. Проведем вещественную прямую через любые две из $12k + 2$ точек. Остальные $12k$ точек разобьем на k групп по 12 точек. Каждую группу и одну из первых двух точек можно соединить вещественной кривой степени 4 со связным множеством вещественных точек. Объединение указанной прямой и построенных кривых степени 4 имеет степень $4k + 1$; его множество вещественных точек связно и содержит все $12k + 2$ точек.

Если $q = 4k + 2$, $k \in \mathbb{Z}$, то $3(4k + 2) - 1 = 12k + 5$. Проведем вещественную конику через любые 5 из $12k + 5$ точек. Остальные $12k$ точек разобьем на k групп по 12 точек. Каждую группу и одну из первых пяти точек можно соединить вещественной кривой степени 4 со связным множеством вещественных точек. Объединение коники и построенных кривых степени 4 имеет степень $4k + 2$; его вещественная часть связна и содержит все $12k + 5$ точек.

Если $q = 4k + 3$, $k \in \mathbb{Z}$, то $3(4k + 3) - 1 = 12k + 8$, и кривую можно построить, как и выше, начиная с кубики, проходящей через любые 8 из $12k + 8$ точек.

Если $q = 4k$, $k \in \mathbb{Z}$, то границу $12k - 1$ можно заменить на $12k + 1$. Выберем одну из этих точек. Остальные $12k$ точек разобьем на k групп по 12 точек. Каждую группу и выбранную точку можно соединить вещественной кривой степени 4 со связным множеством вещественных точек. Объединение этих кривых имеет степень $4k$, множество его вещественных точек связно и содержит все $12k + 1$ точек.

4.7.4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если q нечетно, то $c'(q) \leq \frac{1}{2}q(q+3) - [\frac{1}{8}(q^2-1)]$. Если q четно, то $c'(q) \leq \frac{1}{2}q(q+3) - [\frac{1}{8}q(q-2)]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала рассмотрим случай нечетного $q \geq 3$. (Для $q = 1$ неравенство следует из $c'(1) = 2$.) Положим $q = 2k - 1$ и $m = k + 1$. Тогда граница примет вид $c'(q) \leq \frac{3}{2}k(k+1) - 1$. Возьмем M -кривую A степени m . Ее вещественная часть имеет $\frac{1}{2}k(k-1) + 1$ компонент связности. Выберем $3k$ точек на одной из компонент и по 3 точки на каждой из остальных – всего $\frac{3}{2}k(k+1)$ точек. Если k четно, выбранная компонента должна быть односторонней. Пусть $c'(q) \geq \frac{3}{2}k(k+1)$. Тогда существует вещественная кривая B степени q с компонентой связности, содержащей все $\frac{3}{2}k(k+1)$ точек. В силу двойственности Пуанкаре каждая компонента множества $\mathbb{R}A$ пересекает $\mathbb{R}B$ по крайней мере в одной дополнительной точке (или одна из точек пересечения кратная). Поэтому число точек пересечения кривых A и B с учетом их кратностей не меньше, чем $2k^2 + k + 1 > mq$, и, значит, по теореме Безу кривая B содержит A в качестве компоненты (как M -кривая, A неприводима). Следовательно, B распадается на две кривые A и B' степеней $m = k + 1$ и $q - m = k - 2$ соответственно. Более того, $\mathbb{R}A$ содержится в компоненте связности множества $\mathbb{R}B'$; таким образом, A и B' пересекаются не менее чем в $k(k-1) > (k+1)(k-2)$ точках. Поскольку A неприводима, это противоречит теореме Безу.

Если q четно, положим $q = 2k$ и $m = q + 4 = 2(k + 2)$ и рассмотрим M -кривую Вимана A степени m (т.е. кривую с вещественной схемой $\langle (k+1)(k+3) + 1 \rangle \sqcup \frac{1}{2}k(k+1)\langle 1\langle 1 \rangle \rangle$; ее можно построить малым возмущением квадрата M -кривой степени $k + 2$). Пусть $c'(q) \geq \frac{1}{2}q(q+3) - \frac{1}{8}q(q-2) + 1 = \frac{3}{2}k(k+1) + 2k + 1$. Выберем по одной точке на внутреннем овале каждого гнезда кривой A и по одной точке в $k^2 + 3k + 1$ из $k^2 + 4k + 4$ пустых внешних овалов – всего $\frac{3}{2}k(k+1) + 2k + 1$ точек, и проведем через них компоненту связности вещественной кривой B степени q . Тогда A и B пересекаются не менее чем в $4k^2 + 8k + 2 > 4k^2 + 8k$ точках, что противоречит теореме Безу.

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае нечетного q можно дать иное доказательство, аналогичное случаю четного q . Удивительно, но это не улучшает оценку.

4.7.6. СЛЕДСТВИЕ. Справедливы неравенства

$$14 \leq c(5) \leq c'(5) \leq 17, \quad 17 \leq c(6) \leq c'(6) \leq 24 \quad \text{и} \quad 20 \leq c(7) \leq c'(7) \leq 29.$$

Верхняя граница для $c'(6)$ легко улучшается:

4.7.6. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Справедливо неравенство $c'(6) \leq 23$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $c'(6) \geq 24$. Возьмем (очевидно, неприводимую) M -кривую степени 9 со схемой $J \sqcup \langle 1 \langle a \rangle \rangle \sqcup \langle 1 \langle b \rangle \rangle \sqcup \langle 1 \langle c \rangle \rangle \sqcup \langle 1 \langle d \rangle \rangle$, $a, b, c, d > 0$, $a+b+c+d = 24$, и проведем компоненту связности вещественной секстики через все 24 пустых овала. Эти две кривые пересекаются не менее чем в $48 + 8 = 56 > 54$ точках.

4.8. Препятствия к жесткой изотопии. Топологические характеристики вещественной кривой такие, как ее вещественная схема, тип, комплексная схема (т.е. вещественная схема, обогащенная комплексными ориентациями) для кривой типа I, сохраняются при жестких изотопиях. Другим мощным источником препятствий является теорема Безу, примененная к соответствующим вспомогательным кривым.

Насколько нам известно, препятствия, полученные из теоремы Безу, никогда не изучались систематически. Поэтому мы ограничимся объяснением основной идеи и ее простейшими реализациями, взятыми из [34] и [77].

Начнем со вспомогательных кривых наименьшей степени: рассмотрим прямые. В этом случае мы ищем пары точек, для простоты – в $\mathbb{RP}^2 \setminus \mathbb{R}A$, расположенных топологически таким образом, чтобы прямая L , проходящая через них, пересекала кривую A только в вещественных точках. Если такой выбор возможен, положение множества $\mathbb{R}A$ относительно $\mathbb{R}L$ сохраняется при жестких изотопиях кривой A . В частности, множество $\mathbb{R}A$ расположено одинаково относительно всех вещественных прямых, близких к L .

Чтобы сделать эту идею более конструктивной, введем следующее определение. Вещественная прямая L с двумя отмеченными точками $p_1, p_2 \in \mathbb{R}L$, не лежащими на вещественной части неособой вещественной кривой A , называется *замком* кривой A , если (1) число точек в $S = \mathbb{R}L \cap \mathbb{R}A$ равно степени кривой A , (2) для любой пары (возможно совпадающих) точек из S , ограничивающих интервал в $\mathbb{R}L \setminus (\{p_1, p_2\} \cup S)$ и дугу в $\mathbb{R}A \setminus S$, цикл, образованный этими сегментом и дугой, либо не гомологичен нулю в $\mathbb{RP}^2$, либо охватывает хотя бы один овал кривой A . Ясно, что замок непрерывно продолжается на любую жесткую изотопию кривой A и, более того, независимо от продолжения топологический тип четверки $(\mathbb{RP}^2, \mathbb{R}A \cup \mathbb{R}L, \mathbb{R}L, \{p_1, p_2\})$ не меняется. Даже это простое рассмотрение дает нам два инварианта: существование замка и топологические типы четверок, соответствующих всем замкам.

В качестве примера рассмотрим две кривые степени 6 со схемой $\langle 2 \rangle \sqcup \langle 1 \langle 2 \rangle \rangle$, построенные из двух объединений эллипсов так, как показано на рис. 2. У первой кривой нет замков. Для второй – любая пара точек, взятых по одной внутри каждого из двух внешних овалов, определяет замок. Значит, эти кривые не жестко изотопны.

Рис. 2. Секстики без замка и с замком

Бывают ситуации, когда полезно рассматривать одновременно несколько замков. Пример – две кривые степени 5 с 4 овалами, показанные на рис. 3. Для обеих кривых

любая пара овалов определяет замок; поэтому любая тройка определяет тройной замок. Первая кривая имеет тройку овалов, тройной замок которой обладает следующим свойством: одна из компонент связности дополнения трех прямых замка содержит четвертый овал и не пересекает одностороннюю компоненту. Другая кривая не имеет такой тройки овалов. Значит, эти кривые не являются жестко изотопными.

Рис. 3. Две квинтики с различными тройными замками

Фактически, в обоих примерах кривые отличаются своей комплексной схемой: как видно из построения, в каждом примере одна кривая принадлежит типу I, а другая – типу II. Пары не жестко изотопных кривых с одной и той же комплексной схемой впервые появляются в степени 7. Пример, принадлежащий А. Марену [77], показан на рис. 4. Две кривые с комплексной схемой $\langle J \sqcup 1^+ \langle 1^+ \sqcup 2^- \rangle \sqcup 6^+ \sqcup 5^- \rangle$ строятся методом Гильберта с различием в построениях на последнем шаге. Три внутренних овала определяют тройной замок, и указанные кривые отличаются распределением внешних овалов между компонентами связности дополнения трех прямых.

Рис. 4. Две кривые степени 7 с различными тройными замками

Другой пример не жестко изотопных кривых степени 7 с одной и той же комплексной схемой был построен Т. Фидлером [34]. (В его примере кривые неразбивающие.)

Существуют примеры, где в качестве замков вместо прямых используются коники. В одном из них, принадлежащем И. В. Итенбергу, внутренние овалы двух отрицательных инъективных пар секстики $\langle 1 \langle 3^+ \sqcup 2^- \rangle \rangle \sqcup \langle 5 \rangle$ отделяются друг от друга коникой, пересекающей три остальных внутренних овала и два внешних. Можно, конечно, рассматривать и замки большей степени. Мы заканчиваем обсуждение этой темы, поскольку она еще не достаточно понята.

Возвращаясь к примеру Марена, заметим, что неизвестно, являются ли эти кривые эквивариантно изотопными. Более общо, две следующих фундаментальных проблемы до сих пор открыты: *Существуют ли препятствия, связанные с теоремой Безу и не являющиеся гибкими? Существуют ли эквивариантно изотопные, но не жестко изотопные кривые?* (Когда этот обзор был готов, С. Фидлер–Ле Тузе и

С. Ю. Оревков сообщили, что они нашли гибкую аффинную секстику, не реализуемую алгебраически вследствие теоремы Безу, примененной к пересечениям с кубиками.)

4.9. Кривые на квадраках. Мы заключаем этот раздел кратким перечислением известных результатов, относящихся к кривым на неособых квадраках. Это, по-видимому, единственный (кроме $\mathbb{P}^2$) серьезно изучавшийся случай.

Пусть X – неособая квадрака. С комплексной точки зрения $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, и на X можно ввести две, с точностью до биголоморфизма, антиголоморфные инволюции с непустой вещественной частью; в результате получаются две вещественные поверхности: гиперboloид, являющийся M -поверхностью с вещественной частью, гомеоморфной тору, и эллипсоид – $(M - 1)$ -поверхность с $\mathbb{R}X \cong S^2$.

Зафиксируем пару P_1, P_2 образующих квадраки X . Фундаментальные классы $[P_1], [P_2]$ образуют базис группы $H_2(\mathbb{C}X) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$; форма пересечений задается равенствами $[P_1]^2 = [P_2]^2 = 0, [P_1] \circ [P_2] = 1$. Пусть A – алгебраическая кривая на X . Тогда $[A] = m_1[P_1] + m_2[P_2]$ для некоторых неотрицательных целых m_1, m_2 . Пара (m_1, m_2) называется *бистепенью* кривой A . Если $[x_0 : x_1], [y_0 : y_1]$ – однородные координаты на прямых P_1, P_2 , то кривая A задается бигоморфным многочленом

$$F(x_0, x_1; y_0, y_1) = \sum_{i,j=1}^{m_1, m_2} a_{ij} x_1^i x_0^{m_1-i} y_1^j y_0^{m_2-j},$$

имеющим степени однородности m_1 по x_0, x_1 и m_2 по y_0, y_1 . Такие кривые образуют проективное пространство размерности $m_1 m_2 + m_1 + m_2$; если A неособа, ее род равен $(m_1 - 1)(m_2 - 1)$ (см. (4.3.1); K_X имеет бистепень $(-2, -2)$).

На гиперboloиде антиголоморфная инволюция conj переводит каждую из четырех координат в комплексно сопряженную; поэтому кривая A вещественна тогда и только тогда, когда все a_{ij} вещественны. На эллипсоиде инволюция conj действует по формуле $([x_0 : x_1], [y_0 : y_1]) \mapsto ([\bar{y}_0 : \bar{y}_1], [\bar{x}_0 : \bar{x}_1])$, и вещественность кривой A означает, что $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$ (в частности, $m_1 = m_2$).

Далее кривая A всюду считается вещественной. Пусть сначала (X, conj) – гиперboloид. Фундаментальные классы $[\mathbb{R}P_1], [\mathbb{R}P_2]$, наделенные некоторыми (фиксированными) ориентациями, образуют базис группы $H_1(\mathbb{R}X) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Вещественная часть $\mathbb{R}A$ может иметь компоненты двух типов: стягиваемые в $\mathbb{R}X$ и нестягиваемые; стягиваемые компоненты называются *овалами*. Число овалов обозначается через l , число нестягиваемых компонент – через h . Каждый овал ограничивает топологический диск в $\mathbb{R}X$, называемый *внутренностью* овала. Все нестягиваемые компоненты $N_1, \dots, N_h$ реализуют один и тот же ненулевой класс (c_1, c_2) в $H_1(\mathbb{R}X)$, где c_1, c_2 взаимно просты. Вещественная схема кривой $\mathbb{R}A \subset \mathbb{R}X$ кодируется следующим образом:

$$((c_1, c_2), \text{scheme}_1, (c_1, c_2), \text{scheme}_2, \dots, (c_1, c_2), \text{scheme}_h),$$

где $\text{scheme}_1, \dots, \text{scheme}_h$ – схемы расположения овалов, лежащих в компонентах связности поверхности $\mathbb{R}X \setminus (N_1 \cup \dots \cup N_h)$.

Если оба числа m_1 и m_2 четны, $\mathbb{R}A$ разделяет $\mathbb{R}X$ на две части $\mathbb{R}X_{\pm}$. Ясно, что $\chi(\mathbb{R}X_-) = -\chi(\mathbb{R}X_+)$. Если все компоненты множества $\mathbb{R}A$ являются овалами, будем считать, что $\mathbb{R}X_+$ – поверхность рода 1.

4.9.1. ЗАПРЕТЫ ДЛЯ КРИВЫХ НА ГИПЕРБОЛОИДЕ. Пусть A – вещественная кривая бистепени (m_1, m_2) на гиперboloиде X . Тогда определенные выше l , h , c_1 , c_2 удовлетворяют следующим ограничениям.

Неравенство Харнака:

$$(1) \quad l + h \leq (m_1 - 1)(m_2 - 1) + 1.$$

Сравнения. Пусть m_1, m_2 четны и $\frac{1}{2}(m_1 c_2 + m_2 c_1) = c_1 c_2 \pmod{2}$. Тогда (при сделанном соглашении о выборе $\mathbb{R}X_+$)

$$(2) \quad \text{если } A \text{ есть } M\text{-кривая, то } \chi(\mathbb{R}X_+) = \frac{1}{2}m_1 m_2 \pmod{8};$$

$$(3) \quad \text{если } A \text{ есть } (M - 1)\text{-кривая, то } \chi(\mathbb{R}X_+) = \frac{1}{2}m_1 m_2 \pm 1 \pmod{8};$$

$$(4) \quad \text{если } A \text{ есть } (M - 2)\text{-кривая и } \chi(\mathbb{R}X_+) = \frac{1}{2}m_1 m_2 + 4 \pmod{8}, \text{ то } A \text{ принадлежит типу I};$$

$$(5) \quad \text{если } A \text{ принадлежит типу I, то } \chi(\mathbb{R}X_+) = 0 \pmod{4}.$$

Следствия теоремы Безу:

$$(6) \quad h c_i = m_i \pmod{2} \text{ и } h |c_i| \leq m_i \text{ для } i = 1, 2;$$

$$(7) \quad \text{если } \mathbb{R}A \text{ имеет } r \text{ попарно дизъюнктивных гнезд глубины } s_1, \dots, s_r, \text{ то справедливо неравенство}$$

$$\sum_{j=1}^r s_j \leq \frac{1}{2}(m_1 - h |c_1| + [r/2](m_2 + h |c_2|))$$

(и такое же неравенство, полученное заменой m_1, c_1 на m_2, c_2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (1) есть классическое неравенство Харнака–Клейна. Утверждения (2)–(5) следуют из 3.3.2 и 3.3.4. Утверждение (6) есть вещественный вариант теоремы Безу (см. 4.6), примененный к A и кривым бистепени $(1, 0)$ и $(0, 1)$, а неравенство (7) доказывается применением теоремы Безу к A и кривой бистепени $([r/2], 1)$, проведенной через r точек, взятых внутри самых внутренних овалов гнезд (см. [130]).

ЗАМЕЧАНИЕ. В более слабой форме указанные сравнения появились в [79], [80], что побудило Михалкина [81], [83] улучшить и обобщить их до теоремы 3.3.2.

Если (X, conj) – эллипсоид, то все компоненты кривой $\mathbb{R}A$ стягиваемы и называются овалами; их число обозначается через l . В этом случае мы фиксируем точку $\infty \in \mathbb{R}X \setminus \mathbb{R}A$, называемую *внешней*, и для овала $C \subset \mathbb{R}X$ определяем его *внутренность* как компоненту поверхности $\mathbb{R}X \setminus C$, не содержащую ∞ . При этом на множестве овалов возникает естественный частичный порядок, и схема расположения овалов кодируется как обычно.

Поскольку $\mathbb{R}X \cong S^2$, любая кривая $\mathbb{R}A$ разделяет $\mathbb{R}X$ на две части, обозначаемые через $\mathbb{R}X_{\pm}$.

4.9.2. ЗАПРЕТЫ ДЛЯ КРИВЫХ НА ЭЛЛИПСОИДЕ. Пусть A – вещественная кривая бистепени (m, m) на эллипсоиде X и l – число компонент множества $\mathbb{R}A$. Тогда A удовлетворяет следующим ограничениям.

Неравенство Харнака:

$$(1) \quad l \leq (m_1 - 1)(m_2 - 1) + 1.$$

Сравнения. Пусть t нечетно.

- (2) Если A есть M -кривая, то $\chi(\mathbb{R}X_{\pm}) = \frac{1}{2}(m^2 + 1) \bmod 8$.
- (3) Если A есть $(M - 1)$ -кривая, то $\chi(\mathbb{R}X_{\pm}) = \frac{1}{2}(m^2 + 1) \pm 1 \bmod 8$.
- (4) Если A есть $(M - 2)$ -кривая и $\chi(\mathbb{R}X_{\pm}) = \frac{1}{2}(m^2 + 1) + 4 \bmod 8$, то A принадлежит типу I.
- (5) Если A принадлежит типу I, то $\chi(\mathbb{R}X_{\pm}) = 1 \bmod 4$.

Следствия теоремы Безу:

- (6) Общее число овалов любых трех попарно дизъюнктивных гнезд не превосходит m .

Доказательство аналогично доказательству утверждения 4.9.1.

Два следующих хорошо известных утверждения можно найти, например, в [131]. Их стандартные доказательства, воспроизводимые ниже, служат моделью доказательств в ряде подобных случаев (таких, как рациональные и гиперэллиптические кривые на линейчатых поверхностях, пересечения квадрик или гомотопическая классификация невырожденных однородных полиномиальных векторных полей).

4.9.3. КРИВЫЕ БИСТЕПЕНИ $(m, 1)$. Кривая бистепени $(m, 1)$ на гиперboloиде определяется с точностью до жесткой изотопии своей вещественной схемой: $\langle (w, 1) \rangle$ с $-m \leq w \leq m$ и $w \equiv m \bmod 2$. Все такие кривые принадлежат типу I.

На эллипсоиде кривые бистепени $(1, 1)$ образуют два жестких изотопических класса: $\langle 0 \rangle$ и $\langle 1 \rangle$, последний состоит из кривых типа I.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неособая кривая бистепени $(m, 1)$ на гиперboloиде задается уравнением

$$y_0 a(x_0, x_1) + y_1 b(x_0, x_1) = 0,$$

где a и b – ненулевые однородные многочлены степени m без общих корней. Многочлены a и b своими корнями определяются с точностью до постоянного множителя. Любые два соседних вещественных корня одного из этих многочленов, не разделенные вещественными корнями другого, можно удалить в мнимую область. После удаления всех таких пар $|w|$ есть число вещественных корней многочлена a (или b); каждому ненулевому значению $|w|$ отвечают два класса кривых, отличающихся знаками многочленов a и b в фиксированной общей точке.

Любая кривая бистепени $(1, 1)$ на эллипсоиде высекается плоскостью, поэтому, очевидно, возможны лишь два указанных случая.

4.9.4. КРИВЫЕ БИСТЕПЕНИ $(m, 2)$. Кривая бистепени $(m, 2)$ на гиперboloиде определяется с точностью до жесткой изотопии своей вещественной схемой, имеющей вид

$$\langle (0, 1), \alpha_1, (0, 1), \alpha_2, \dots, (0, 1), \alpha_h \rangle,$$

где $0 \leq h \leq m$, $h \equiv m \bmod 2$ и $h + \sum \alpha_i \leq m$, либо

$$\langle 2(\frac{1}{2}w, 1) \rangle \text{ при четном } m \text{ и } \langle (w, 2) \rangle \text{ при нечетном } m,$$

где $-m \leq w \leq m$ и $w \equiv m \bmod 2$. Последняя схема (и при четном, и при нечетном m) и M -схемы принадлежат типу I; остальные схемы – типу II.

На эллипсоиде кривые бистепени $(2, 2)$ образуют три жестких изотопических класса: $\emptyset$, $\langle 1 \rangle$ и $\langle 2 \rangle$. Тип I имеет лишь схема $\langle 2 \rangle$.

Приведенное ниже доказательство справедливо более или менее без изменений во всех случаях, когда рассматриваемые кривые гиперэллиптичны (и гиперэллиптическая структура индуцируется расслоением поверхности на прямые). По этой причине мы воспроизводим все существенные детали.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Кривая бистепени $(m, 2)$ на гиперboloиде задается уравнением

$$y_0^2 a(x_0, x_1) + 2y_0 y_1 b(x_0, x_1) + y_1^2 c(x_0, x_1) = 0,$$

где a , b и c — однородные многочлены степени m . Такая кривая неособа тогда и только тогда, когда дискриминант $D = b^2 - ac$ не имеет кратных корней.

Положим $V = \{(x_0 : x_1) \in \mathbb{RP}^1 \mid D(x_0, x_1) \geq 0\}$. Рассмотрим аффинную часть $x_1 \neq 0$. Компоненты связности множества, состоящего из неособых кривых с фиксированным V и фиксированными корнями $u_1, \dots, u_m$ многочлена a (которые могут быть кратными), определяются выбором значений $b(u_i) = \pm \sqrt{D(u_i)}$, $i = 1, \dots, m$, т.е. выбором знака многочлена b в вещественных корнях многочлена a (которые, очевидно, принадлежат V) и одной из двух ветвей квадратного корня в каждой паре комплексно сопряженных корней. Эти компоненты можно соединить, используя следующие движения:

- (1) передвижение в мнимую область пары соседних вещественных корней многочлена a , в которых b имеет один и тот же знак; и наоборот, передвижение пары комплексно сопряженных корней в произвольную компоненту множества V ;
- (2) изменение знака многочлена b в вещественном корне многочлена a , не отделенном от ∂V другими корнями, передвижением этого корня до ∂V и обратно;
- (3) замена ветви $\sqrt{D}$ на противоположную в любой паре комплексно сопряженных корней многочлена a передвижением этой пары сквозь пару корней (возможно совпадающих) дискриминанта D .

Следовательно, если $V = \emptyset$ или $\partial V \neq \emptyset$, знак многочлена b в каждом (вещественном или мнимом) корне многочлена a можно обратить; поэтому кривая в этом случае определяется с точностью до жесткой изотопии компонентами множества V и вычетом по модулю 2 числа вещественных корней многочлена a в каждой такой компоненте: соответствующая компонента кривой является овалом, если это число четно, или компонентой класса $(1, 0)$, если оно нечетно. Если множество V совпадает с $\mathbb{RP}^1$, то оно содержит $|w|$ вещественных корней многочлена a , причем многочлен b имеет противоположные знаки в любых двух соседних корнях; это дает вторую группу вещественных схем в 4.9.4.

Рассмотрим теперь кривые на эллипсоиде. Все пустые кривые жестко изотопны (на самом деле для любой бистепени), так как они образуют выпуклое множество. Если кривая непуста, раздуем на ней вещественную точку и стянем собственные прообразы двух мнимых образующих, проходящих через эту точку. В результате получим неособую кубик в $\mathbb{RP}^2$. Обратное преобразование задается парой комплексно сопряженных точек этой кубики. Два жестких изотопических класса кубик соответствуют двум указанным в формулировке классам кривых на эллипсоиде.

4.9.5. КРИВЫЕ БИСТЕПЕНИ (3, 3). *Кривая бистепени (3, 3) на гиперboloиде или эллипсоиде с точностью до жесткой изотопии определяется своей вещественной схемой и, в случае гиперboloида, своим типом. Кривые на гиперboloиде имеют следующие вещественные схемы:*

$$\langle(1, \pm 1), \alpha\rangle \text{ с } \alpha \leq 4, \quad \langle 3(1, \pm 1) \rangle, \quad \langle(3, \pm 1) \rangle, \quad \langle(1, \pm 3) \rangle.$$

Схемы $\langle(1, \pm 1), 4\rangle$, $\langle 3(1, \pm 1) \rangle$, $\langle(3, \pm 1) \rangle$ и $\langle(1, \pm 3) \rangle$ принадлежат типу I; схема $\langle(1, \pm 1), 2\rangle$ – неопределенному типу; остальные схемы – типу II. Кривые на эллипсоиде имеют следующие вещественные схемы:

$$\langle \alpha \rangle \text{ с } \alpha \leq 5 \text{ и } \langle 1\langle 1\langle 1 \rangle \rangle \rangle.$$

Схемы $\langle 5 \rangle$ и $\langle 1\langle 1\langle 1 \rangle \rangle \rangle$ принадлежат типу I; остальные – типу II.

Как и в 3.5.2, доказательство утверждения 4.9.5 основано на перечислении стенок в пространстве кривых; последняя проблема, в основном, сводится к классификации плоских кватрик с фиксированной касательной. Подробности – в [28].

В остальных пунктах этого раздела (предложения 4.9.6–4.9.8) даются только списки возможных схем для определенных бистепеней. Все схемы вне списков запрещаются п. 4.9.1 и 4.9.2. Указанные в списках схемы реализованы Д. А. Гудковым, А. К. Усачевым и Е. И. Шустинным (см. [42], [44] и [43]). Утверждения о типах схем следуют, в основном, из формулы Рохлина для комплексных ориентаций 4.2.2. Заметим также, что рассматриваемые кривые имеют те и только те ориентации, которые не противоречат формулам Рохлина и Оревкова. Подробности и реализация схем неопределенного типа имеются в работе Звонилова [130].

4.9.6. СХЕМЫ БИСТЕПЕНИ (m, 3). *Кривая бистепени (m, 3) с $m > 3$ на гиперboloиде может иметь только одну из следующих вещественных схем:*

- (1) $\langle 3(w, 1) \rangle$ с $3|w| \leq m$ и $w = m \bmod 2$;
- (2) $\langle(w, 3) \rangle$ с $|w| \leq m$, $w = m \bmod 2$ и $w \neq 0 \bmod 3$;
- (3) $\langle(m, \pm 1) \rangle$;
- (4) $\langle(w, 1), \alpha \rangle$ с $|w| \leq m - 2$, $w = m \bmod 2$ и $0 \leq \alpha \leq 2m - 2$.

Схемы (1)–(3) принадлежат типу I; схемы (4) – типу I при $\alpha = 2m - 2$ и типу II при α нечетном или равном 0.

Все указанные схемы (вместе с их типами) реализованы А. Б. Корчагиным [69], который использовал метод склеивания Виро. Согласно В. И. Звонилову они могут быть реализованы также T -кривыми. Новый многообещающий подход к изучению тригональных кривых на линейчатых поверхностях, применяющий *dessins d'enfant* Гротендика к дискриминанту кривой, был недавно предложен С. Ю. Оревковым [93].

4.9.7. СХЕМЫ БИСТЕПЕНИ (4, 4) НА ГИПЕРБОЛОИДЕ. *Следующий список вещественных схем бистепени (4, 4) на гиперboloиде является полным:*

- (1) $\langle 4(1, 0) \rangle$, $\langle 4(0, 1) \rangle$ и $\langle 4(1, \pm 1) \rangle$;
- (2) $\langle 2(2, \pm 1) \rangle$ и $\langle 2(1, \pm 2) \rangle$;
- (3) $\langle(1, \pm 1), \alpha, (1, \pm 1), \beta \rangle$ с $0 \leq \alpha + \beta \leq 8$ и $\alpha \geq \beta$;
- (4) $\langle(1, 0), \alpha, (1, 0), \beta \rangle$ и $\langle(0, 1), \alpha, (0, 1), \beta \rangle$, где либо $0 \leq \alpha + \beta \leq 6$ и $\alpha \geq \beta$, либо $(\alpha, \beta) = (8, 0), (4, 4), (7, 0)$ или $(4, 3)$;

- (5) $\langle \alpha \sqcup 1\langle \beta \rangle \rangle$, где либо $0 \leq \alpha + \beta \leq 7$, либо $(\alpha, \beta) = (0, 9), (4, 5), (8, 1), (0, 8), (3, 5), (4, 4), (7, 1)$ или $(8, 0)$;
 (6) $\langle 2\langle 1 \rangle \rangle$;
 (7) $\langle 0 \rangle$.

Схемы (1), (2) и (6) принадлежат типу I. Схема (7) принадлежит типу II. Схемы (3) принадлежат типу I, если $\alpha + \beta = 8$, принадлежат типу II, если $\alpha + \beta$ нечетно или $(\alpha, \beta) = (0, 0), (1, 1)$ или $(4, 0)$, и принадлежат неопределенному типу в противном случае. Схемы (4) принадлежат типу I, если $(\alpha, \beta) = (8, 0), (4, 4)$ или $(5, 1)$, принадлежат неопределенному типу, если $(\alpha, \beta) = (3, 3), (4, 0), (2, 2)$ или $(1, 1)$, и принадлежат типу II в остальных случаях. Схемы (5) принадлежат типу I, если $(\alpha, \beta) = (0, 9), (4, 5), (8, 1), (1, 6)$ или $(5, 2)$, принадлежат неопределенному типу, если $(\alpha, \beta) = (3, 4), (7, 0), (2, 3)$ или $(4, 1)$, и принадлежат типу II в противном случае.

4.9.8. СХЕМЫ БИСТЕПЕНИ $(4, 4)$ НА ЭЛЛИПСОИДЕ. Следующий список вещественных схем бистепени $(4, 4)$ на эллипсоиде является полным:

- (1) $\langle \alpha \sqcup 1\langle \beta \rangle \rangle$ с $0 \leq \alpha + \beta \leq 9$ и $\alpha \geq \beta$;
 (2) $\langle 1\langle 1\langle 1\langle 1 \rangle \rangle \rangle$;
 (3) $\langle 0 \rangle$.

Типу I принадлежат схемы (2) и (1) при $\alpha + \beta = 9$; типу II принадлежат схемы (3) и (1), если $\alpha + \beta \leq 4$, или $\alpha + \beta$ четно, или $(\alpha, \beta) = (5, 0)$; остальные схемы принадлежат неопределенному типу.

Двулистное накрывающее квадрики с ветвлением над кривой бистепени $(4, 4)$ есть $K3$ -поверхность, группа Пикара которой содержит $U(2)$ (т.е. пару a, b с $a^2 = b^2 = 0$ и $ab = 2$), и обратно, любая $K3$ -поверхность X с выделенной подгруппой $U(2) \subset \text{Pic } X$ получается таким образом (см., например, [88]). Поэтому кривые бистепени $(4, 4)$ можно изучать так же, как плоские секстики. В частности, с помощью этой техники можно получить их жесткую изотопическую классификацию. Первые шаги в этом направлении сделаны в [103]. В случае гиперболоида будет не удивительно, если список 4.9.7 совпадет с классификацией с точностью до жестких изотопий и автоморфизмов поверхности. (В случае эллипсоида возможно появление дополнительных инвариантов.) Заметим, что некоторые кривые на гиперболоиде, например, $\langle 1\langle 9 \rangle \rangle$, $\langle 4 \sqcup 1\langle 5 \rangle \rangle$, $\langle 1\langle 8 \rangle \rangle$, $\langle 3 \sqcup 1\langle 5 \rangle \rangle$ и $\langle 4 \sqcup 1\langle 4 \rangle \rangle$, не являются киральными, см. [61].

О кривых на поверхностях большей степени известно мало. Можно лишь сослаться на [106] и [84], где на вещественных кубических поверхностях изучались соответственно вещественные прямые и сечения вещественными квадриками.

Приложение А. Топология инволюций

А.1. Теория Смита. Большинство результатов, приведенных в этом разделе, принадлежит П. А. Смигу; доказательства можно найти, например, в [13; гл. 3]. Всяду в этом разделе мы рассматриваем топологическое пространство X с инволюцией $c: X \rightarrow X$ и полагаем $F = \text{Fix } c$ и $X' = X/c$.

А.1.1. ТЕОРЕМА. Следующие две последовательности, называемые (гомологической и когомологической) последовательностями Смита пространства (X, c) ,

естественны относительно эквивариантных отображений и точны:

$$\begin{aligned} \rightarrow H_{p+1}(X', F) \xrightarrow{\Delta} H_p(X', F) \oplus H_p(F) \xrightarrow{\text{tr}^* + \text{in}_*} H_p(X) \xrightarrow{\text{pr}_*} H_p(X', F) \rightarrow, \\ \rightarrow H^p(X', F) \xrightarrow{\text{pr}^*} H^p(X) \xrightarrow{\text{tr}_* \oplus \text{in}^*} H^p(X', F) \oplus H^p(F) \xrightarrow{\Delta} H^{p+1}(X', F) \rightarrow. \end{aligned}$$

Гомологический и когомологический связывающие гомоморфизмы Δ имеют соответственно вид

$$x \mapsto x \cap \omega \oplus \partial x \quad \text{и} \quad x \oplus f \mapsto x \cup \omega + \delta f,$$

где $\omega \in H^1(X' \setminus F)$ – характеристический класс двулистного накрытия $X \setminus F \rightarrow X' \setminus F$. Образы гомоморфизмов $\text{tr}^* + \text{in}_*$ и pr^* состоят из инвариантных классов: $\text{Im tr}^* \subset \text{Ker}(1 + c_*)$ и $\text{Im pr}^* \subset \text{Ker}(1 + c^*)$.

А.1.2. Трансферы tr^* и tr_* в А.1.1 можно описать следующим образом. Представим пространство X в виде S^0 -расслоения, ассоциированного с относительным D^1 -расслоением $T \rightarrow X'$, характеристический класс которого равен ω . А именно, возьмем цилиндр проекции $X \rightarrow X'$ и для каждого $f \in F$ стянем слой над f . Тогда tr^* и tr_* являются композициями

$$\begin{aligned} \text{tr}^*: H_p(X', F) \xrightarrow{\text{th}^{-1}} H_{p+1}(T, X) \xrightarrow{\partial} H_p(X), \\ \text{tr}_*: H^p(X) \xrightarrow{\delta} H^{p+1}(T, X) \xrightarrow{\text{th}^{-1}} H^p(X', F), \end{aligned}$$

где th – изоморфизм Тома.

Следующее утверждение сразу получается из А.1.1. Мы формулируем его для гомологий, для когомологий формулировка аналогична.

А.1.3. СЛЕДСТВИЕ (из А.1.1).

- (1) $\dim H_*(F) + 2 \sum_p \dim \text{Coker}(\text{tr}^p + \text{in}_p) = \dim H_*(X)$ (формула Смита);
- (2) $\dim H_*(F) \leq \dim H_*(X)$ (неравенство Смита);
- (3) $\dim H_*(F) \leq \dim H^1(\mathbb{Z}_2; H_*(X))$ (неравенство Бореля–Свона);
- (4) $\dim H_*(F) = \dim H_*(X) \bmod 2$;
- (5) $\chi(X) = \chi(F) + 2\chi(X', F)$;
- (6) $\chi(X) = 2\chi(X') - \chi(F)$.

(Напомним, что $H^1(\mathbb{Z}_2; H_*(X)) = \text{Ker}(1 + c_*) / \text{Im}(1 + c_*)$.)

А.1.4. Если в А.1.3(2) достигается равенство: $\dim H_*(F) = \dim H_*(X)$, то говорят, что c есть M -инволюция. Если в А.1.3(3) достигается равенство (что эквивалентно включению $\text{Im}(\text{tr}^* + \text{in}_*) \supset \text{Ker}(1 + c_*)$), то c называется $(\mathbb{Z}_2)$ -Галуа максимальной. (Эта терминология введена В. А. Красновым [70]. Р. Том [111] называет размерность $p \in \mathbb{N}$ регулярной для (X, c) , если $\text{Im}(\text{tr}^p + \text{in}_p) \supset \text{Ker}(1 + c_p)$.)

В общем случае из А.1.3(2) и (4) следует, что $\dim H_*(F) = \dim H_*(X) - 2d$ для некоторого целого $d \geq 0$; в этом случае c называется $(M - d)$ -инволюцией.

А.1.5. Геометрическая конструкция последовательности Смита. Введем цепные комплексы Смита

$$\begin{aligned} \text{Sm}_*(X) &= \text{Ker}[(1 + c_*): S_*(X) \rightarrow S_*(X)], \\ \text{Sm}_*(X, F) &= \text{Ker}[(1 + c_*): S_*(X, F) \rightarrow S_*(X, F)] \end{aligned}$$

и гомологии Смита $H_r(\mathrm{Sm}_*(X))$, $H_r(\mathrm{Sm}_*(X, F))$. Имеется канонический изоморфизм $\mathrm{Sm}_*(X, F) = \mathrm{Im}[(1 + c_*): S_*(X) \rightarrow S_*(X)]$ и каноническое расщепление $\mathrm{Sm}_*(X) = S_*(F) \oplus \mathrm{Im}(1 + c_*)$. Более того, $\mathrm{tr}^*: S_*(X', F) \rightarrow \mathrm{Sm}_*(X, F)$ есть изоморфизм, и благодаря отождествлениям, которые задаются всеми этими изоморфизмами, последовательности Смита являются длинными точными гомологической и когомологической последовательностями, ассоциированными с короткой точной последовательностью комплексов

$$0 \longrightarrow \mathrm{Sm}_*(X) \xrightarrow{\text{inclusion}} S_*(X) \xrightarrow{1+c_*} \mathrm{Sm}_*(X, F) \longrightarrow 0.$$

A.1.6. КВАДРАТЫ СТИНРОДА В ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ СМИТА. Для любых $x \in H_p(X', F)$ и $y \in H^p(X)$ справедливы равенства $\mathrm{Sq} \, \mathrm{tr}^* x = \mathrm{tr}^* \mathrm{Sq}(x \cap (1 + \omega))$ и $\mathrm{tr}_* \mathrm{Sq} y = (\mathrm{Sq} \, \mathrm{tr}_* y) \cup (1 + \omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это утверждение следует из A.1.2 и формулы Тома–Картана для сферических расслоений (см. [112]): поскольку тотальный характеристический класс относительного D^1 -расслоения $T \rightarrow X'$ равен $1 + \omega$, получаем, что $\mathrm{th}^{-1} \mathrm{Sq}(x \cap (1 + \omega)) = \mathrm{Sq} \, \mathrm{th}^{-1} x$ и $\mathrm{th}^{-1} \mathrm{Sq} y' = (\mathrm{Sq} \, \mathrm{th}^{-1} y') \cup (1 + \omega)$, где $y' = \delta y$.

A.1.7. СЛЕДСТВИЕ. Для любых $x \in H_p(X', F)$ и $y \in H^p(X)$ справедливы равенства $\mathrm{Sq}_1 \, \mathrm{tr}^* x = \mathrm{tr}^* \mathrm{Sq}_1 x + \mathrm{in}_* \partial x$ и $\mathrm{tr}_* \mathrm{Sq}_1 y = \mathrm{Sq}_1 \, \mathrm{tr}_* y + \delta \, \mathrm{in}^* y$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу точности последовательностей Смита

$$\mathrm{tr}^*(x \cap \omega) = \mathrm{in}_* \partial x \quad \text{и} \quad (\mathrm{tr}_* y) \cup \omega = \delta \, \mathrm{in}^* y.$$

Таким образом, доказываемые равенства следуют из A.1.6.

A.1.8. Относительный вариант последовательностей Смита. Если $A \subset X$ есть G -инвариантное подпространство, имеется естественная точная последовательность

$$\begin{aligned} \longrightarrow H_{p+1}(X', F \cup A') &\xrightarrow{\Delta} H_p(X', F \cup A') \oplus H_p(F, F \cap A') \xrightarrow{\mathrm{tr}^* + \mathrm{in}_*} \\ &\xrightarrow{\mathrm{tr}^* + \mathrm{in}_*} H_p(X, A) \xrightarrow{\mathrm{pr}_*} H_p(X', F \cup A') \longrightarrow \end{aligned}$$

(и такая же последовательность в когомологиях), где $A' = A/c$. Ее свойства и их следствия аналогичны свойствам и следствиям абсолютной последовательности Смита. В частности, неравенство Смита A.1.3(2) превращается в

$$(A.1.9) \quad \dim H_*(F, F \cap A) \leq \dim H_*(X, A).$$

A.2. Спектральная последовательность Калинина. В этом разделе мы описываем относительно новое мощное средство – *спектральную последовательность Калинина*. Первоначально она была введена И. О. Калининым [54] как стабильный вариант спектральной последовательности Бореля–Серра расслоения $X \times_{\mathbb{Z}_2} S^\infty \rightarrow \mathbb{RP}^\infty$, где X является топологическим пространством с инволюцией c , а S^∞ рассматривается со стандартной антиподальной инволюцией. Эта последовательность начинается с гомологий $H_*(X)$ и сходится к тотальной группе гомологий $H_*(\mathrm{Fix} \, c)$. Получающаяся фильтрация $\mathcal{F}^*$ на $H_*(\mathrm{Fix} \, c)$ и изоморфизмы bv_p между предельным

членом спектральной последовательности и $\mathrm{Gr} \mathcal{H}_*(\mathrm{Fix} c)$ были открыты О. Я. Виро геометрически до работы Калинина и первоначально были связаны с точной последовательностью Смита. Связь между двумя этими конструкциями была установлена в [23]. Как показано в [26] (в предварительном варианте), а также в [29], спектральную последовательность Калинина также можно вывести из точной последовательности Смита (см. А.2.4).

Конструкция, подобная спектральной последовательности Калинина, изучалась В. А. Красновым в серии работ; см., например, [71].

Ниже мы даем другое, геометрическое, описание гомологического варианта спектральной последовательности Калинина и гомоморфизмов Виро bv_* и формулируем их основные свойства. (Как обычно, когомологический вариант получается поднятием всех индексов и обращением всех стрелок; мы имеем в виду этот вариант, говоря об умножениях и двойственности Пуанкаре.) Доказательства этих результатов и/или дальнейшие подробности можно найти в [26] и [29]. Дифференциалы ${}^r d_p$ этой спектральной последовательности и гомоморфизмы Виро bv_p часто рассматриваются как аддитивные отношения (т.е. как частичные многозначные гомоморфизмы) $H_p(X) \dashrightarrow H_{p+r-1}(X)$ и соответственно $\mathrm{bv}_p: H_*(\mathrm{Fix} c) \dashrightarrow H_p(X)$. Поскольку наш подход геометрический, нам приходится работать с цепями; в зависимости от природы пространства X можно считать их сингулярными, симплициальными, гладкими и т.д. Для сходимости спектральной последовательности пространство X должно удовлетворять определенным условиям, которые зависят от выбранной гомологической теории (например, пучковые (ко)гомологии и локально компактные конечномерные пространства). Конечно, эти условия всегда выполнены для компактных гладких многообразий и конечных клеточных пространств.

Итак, зафиксируем хорошее (см. выше) топологическое пространство X с инволюцией c . Рассмотрим частичные гомоморфизмы $\mathrm{bv}_p: H_*(\mathrm{Fix} c) \dashrightarrow H_p(X)$ и $\mathbb{Z}$ -градуированную спектральную последовательность $({}^r E_*(X), {}^r d_*)$, определенную следующим образом:

- (1) bv_0 равен нулю на $H_{\geq 1}(\mathrm{Fix} c)$, а его сужение на $H_0(\mathrm{Fix} c)$ совпадает с гомоморфизмом включения;
- (2) bv_p определен на (неоднородном) элементе $x \in H_*(\mathrm{Fix} c)$, представленном циклом $\sum x_i$ (где x_i — i -мерная компонента элемента x), тогда и только тогда, когда существуют такие цепи y_i в X , $1 \leq i \leq p$, что $\partial y_1 = x_0$ и $\partial y_{i+1} = x_i + (1 + c_*)y_i$ для $i \geq 1$; в этом случае $\mathrm{bv}_p x$ представляется в $H_p(X)$ классом цикла $x_p + (1 + c_*)y_p$;
- (3) ${}^1 E_* = H_*(X)$ и ${}^1 d_* = 1 + c_*$;
- (4) ${}^r d_p$ определен на цикле x_p в X тогда и только тогда, когда существуют такие цепи $y_p, y_{p+1}, \dots, y_{p+r-1}$, что $\partial y_{i+1} = (1 + c_*)y_i$; в этом случае ${}^r d_p x_p = (1 + c_*)y_{p+r-1}$.

А.2.1. СПЕКТРАЛЬНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ИНВОЛЮЦИИ. Гомоморфизмы bv_* и спектральная последовательность $({}^r E_*, {}^r d_*)$ естественны относительно эквивариантных отображений. Более того, ${}^r E_*$ и ${}^r d_*$ действительно образуют спектральную последовательность (т.е. ${}^r d_p$ — корректно определенные гомоморфизмы ${}^r E_p \rightarrow {}^r E_{p+r-1}$ и ${}^{r+1} E_p = \mathrm{Ker} {}^r d_p / \mathrm{Im} {}^r d_{p-r+1}$), причем эта последовательность сходится к $H_*(\mathrm{Fix} c)$ посредством гомоморфизмов bv_* , т.е. bv_p

индуцирует (настоящий) изоморфизм $\mathcal{F}^p / \mathcal{F}^{p+1} \rightarrow {}^\infty E_p$, где $\mathcal{F}^p = \text{Domain } \text{bv}_p = \text{Ker } \text{bv}_{p-1}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Детальный анализ приведенной выше конструкции показывает, что bv_p можно рассматривать как настоящий гомоморфизм

$$\text{bv}_p: \text{Ker}[\text{bv}_{p-1}: H_*(\text{Fix } c) \dashrightarrow {}^{r-1}E_{p-1}] \rightarrow {}^rE_p, \quad r > 1$$

(где $\text{bv}_p: H_*(\text{Fix } c) \dashrightarrow {}^1E_p = H_p(X)$ определяется на $H_p(\text{Fix } c)$ как гомоморфизм включения и продолжается нулем на $H_{>p}(\text{Fix } c)$). Эти гомоморфизмы, фактически, связаны с первоначальной, нестабилизированной, спектральной последовательностью Бореля–Серра (подробности см. в [23]).

Когомологический вариант ${}^rE^* \Rightarrow H^*(\text{Fix } c)$ строится аналогично и является двойственным гомологическому. Произведения $\cup$ и $\cap$ в X после факторизации естественно переходят в структуру $\mathbb{Z}_2$ -алгебры в ${}^rE^*$ и соответственно в структуру ${}^rE^*$ -модуля в rE_* . Если X – связное замкнутое N -мерное многообразие и $\text{Fix } c \neq \emptyset$, фундаментальный класс многообразия $[X]$ доживает до ${}^\infty E_N$ и умножение $\cap[X]: {}^rE^p \rightarrow {}^rE_{N-p}$ является изоморфизмом (двойственностью Пуанкаре). Поэтому, как обычно, определяется спаривание $\circ: {}^rE_p \otimes {}^rE_q \rightarrow {}^rE_{p+q-N}$, называемое *гомологическим спариванием Калинина*.

A.2.2. Гомологическое спаривание Калинина. Пусть X – гладкое замкнутое связное N -мерное многообразие с гладкой инволюцией $c: X \rightarrow X$. Обозначим через $w(\nu)$ тотальный класс Штифеля–Уитни нормального расслоения ν на $\text{Fix } c$ в X . Тогда $w(\nu) \cap (a \circ b) \in \mathcal{F}^{p+q-N}$ и

$$\text{bv}_p a \circ \text{bv}_q b = \text{bv}_{p+q-N}[w(\nu) \cap (a \circ b)]$$

для $a \in \mathcal{F}^p$ и $b \in \mathcal{F}^q$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Предыдущее равенство содержит в качестве специального случая вариант Бореля–Хефлигера [12] теоремы Безу над полем вещественных чисел (с $\mathbb{Z}_2$ -значным пересечением): индекс пересечения двух вещественных алгебраических циклов A, B дополнительных размерностей в вещественном алгебраическом многообразии X сравним по модулю 2 с индексом пересечения циклов $\mathbb{R}A$ и $\mathbb{R}B$ в $\mathbb{R}X$. Это следует из того, что $[\mathbb{R}A]$ есть член наибольшей степени в $\text{bv}^{-1}[A]$.

Гомологические операции Стинрода $\text{Sq}_t: H_*(X) \rightarrow H_{*-t}(X)$ также спускаются в rE_* . Чтобы описать их связь с обычными операциями Стинрода в $H_*(\text{Fix } c)$, введем *взвешенные операции Стинрода*

$$\widehat{\text{Sq}}_t: H_p(X) \rightarrow H_{\leq p}(X), \quad x \mapsto \sum_{0 \leq j \leq t} \binom{P-p}{t-j} \text{Sq}_j x,$$

где $P > p + t$ есть степень числа 2. (Участвующие в определении биномиальные коэффициенты не зависят от P , см., например, [109; лемма I.2.6].) В результате получим:

А.2.3. КВАДРАТЫ СТИНРОДА В СПЕКТРАЛЬНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ КАЛИНИНА. Если $x \in \mathcal{F}^p$ и $t \geq 0$, то $\widehat{\text{Sq}}_t x \in \mathcal{F}^{p-t}$ и

$$\text{Sq}_t \text{bv}_p x = \text{bv}_{p-t} \widehat{\text{Sq}}_t x.$$

Спектральную последовательность Калинина можно, в свою очередь, вывести из точной последовательности Смита А.1.1. Ниже мы даем соответствующее описание дифференциалов ${}^r d_*$ и гомоморфизмов Виро bv_* ; построение спектральной последовательности и фильтрации $\mathcal{F}^*$ можно найти в [29].

А.2.4. СПЕКТРАЛЬНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ КАЛИНИНА И ТОЧНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ СМИТА. Дифференциалы ${}^r d_p$ и гомоморфизмы Виро bv_p задаются равенствами

$$\begin{aligned} {}^r d_p &= \text{tr}^{p+r-1} \circ \Delta_{p+r-1}^{-1} \circ \cdots \circ \Delta_{p+1}^{-1} \circ \text{pr}_p: H_p(X) \dashrightarrow H_{p+r-1}(X), \\ \text{bv}_p \left(\sum_{r \leq p} x_r \right) &= \text{in}_p x_p + \text{tr}^p y'_p: H_*(\text{Fix } c) \dashrightarrow H_p(X), \end{aligned}$$

где $\text{in}_*: H_*(\text{Fix } c) \rightarrow H_*(X)$ – гомоморфизм включения, tr^* , pr_* и Δ_* – такие же, как в точной последовательности Смита А.1.1, а в последнем равенстве $x_r \in H_r(\text{Fix } c)$ и $y'_p \in H_p(X', \text{Fix } c)$ определяются индуктивно: $y'_0 = 0$, $y'_{r+1} = \Delta_{r+1}^{-1}(x_r \oplus y'_r) \in H_{r+1}(X', \text{Fix } c)$.

А.2.5. Поднятие инволюций. Пусть (X, c) – топологическое пространство с инволюцией, $Y \rightarrow X$ – двулистное накрытие и $\omega \in H^1(X)$ – его характеристический класс. Тогда c поднимается до инволюции на Y тогда и только тогда, когда ω доживает до ${}^\infty E^1(X)$. Если это условие выполнено, существуют, очевидно, две инволюции $c_1, c_2: Y \rightarrow Y$, накрывающие c , которые коммутируют друг с другом и с автоморфизмом накрытия τ и удовлетворяют равенству $c_1 \circ c_2 = \tau$.

Очевидное необходимое условие доживания класса ω до ${}^\infty E^1$ состоит в том, что он должен быть c^* -инвариантным (т.е. доживать до ${}^2 E^1$). Заметим, что если X связно и $\text{Fix } c \neq \emptyset$, это условие также и достаточно, поскольку все дифференциалы, определенные на ${}^r E^0$, тривиальны.

Все сказанное выше применимо и к разветвленным накрытиям с заменой пространства X на $X \setminus A$, где A – множество ветвления.

А.2.6. Комплексные поверхности. Спектральная последовательность Калинина, а также связанные с ней гомологическое спаривание и операции Стинрода имеют ясное геометрическое истолкование в случае, когда X есть комплексная поверхность с вещественной структурой $c = \text{conj}$. Пусть C_i , $i = 1, \dots, k$, – компоненты множества $\mathbb{R}X$, $\langle C_i \rangle \in H_0(\mathbb{R}X)$ – соответствующие классы и $C_I = \sum_{i \in I} \langle C_i \rangle$ для $I \subset \{1, \dots, k\}$. Значения $\text{bv}_0 \langle C_i \rangle$, $\text{bv}_1 \alpha$ ($\alpha \in H_1(\mathbb{R}X)$) и $\text{bv}_2 [C_i]$ всегда определены и совпадают с образами этих классов при гомоморфизмах включения. Значение $\text{bv}_1 \langle C_I \rangle$ определено, если число $|I|$ слагаемых четно; оно представляется набором $(1 + \text{conj}_*)y_1$ инвариантных окружностей, где y_1 – набор дуг в X , множество концов которых распределено между слагаемыми C_i , $i \in I$, по одному в каждом слагаемом. Если для такого набора y_1 кривая $(1 + \text{conj}_*)y_1$ гомологична нулю: $(1 + \text{conj}_*)y_1 = \partial y_2$, то $\text{bv}_1 \langle C_I \rangle = 0$ и цикл $(1 + \text{conj}_*)y_2$ представляет класс $\text{bv}_2 \langle C_I \rangle$. Аналогично, если

$\text{bv}_1 \alpha = 0$, т.е. цикл α гомологичен $(1 + \text{conj}_*)y_1$ для некоторой цепи y_1 в X , существует такая цепь y_2 в X , что $\partial y_2 = \alpha + (1 + \text{conj}_*)y_1$, и цикл $(1 + \text{conj}_*)y_2$ представляет класс $\text{bv}_2 \alpha$. Наконец, если $\text{bv}_1 \alpha = \text{bv}_1 \langle C_I \rangle$ для некоторого 0-класса C_I и 1-класса $\alpha \in H_1(\mathbb{R}X)$, то класс $\text{bv}_2(\alpha + \langle C_I \rangle)$ определен и представлен циклом $(1 + \text{conj}_*)y_2$, где $\partial y_2 = \alpha + (1 + \text{conj}_*)y_1$ и y_1 – набор дуг с таким же, как и выше, условием на их концы.

Элементы вида $\text{bv}_2[C_i]$, $\text{bv}_2 \langle C_I \rangle$, $\text{bv}_2 \alpha$ и $\text{bv}_2(\alpha + \langle C_I \rangle)$ порождают ${}^\infty E_2(X)$; злоупотребляя обозначениями, мы полагаем $\sum \text{bv}_2 x_j = \text{bv}_2 \sum x_j$ при условии, что правая часть определена, хотя каждое слагаемое слева не обязательно определено. Согласно А.2.2 гомологическая форма Калинина на ${}^\infty E_2(X)$ задается табл. 4, где пересечение $\alpha \circ \beta$ рассматривается как элемент группы $H_0(\mathbb{R}X)$, а $\text{aug}(\alpha \circ \beta)$ и $\text{aug}_i(\alpha \circ \beta)$ являются соответственно общим индексом пересечения и его частью, попадающей в C_i . Знаком δ_{ij} обозначается символ Кронекера: $\delta_{ii} = 1$ и $\delta_{ij} = 0$, если $i \neq j$. Эта форма продолжается линейно на классы вида $\text{bv}_2(\alpha + \langle C_I \rangle)$, как если бы $\text{bv}_2 \alpha$ и $\text{bv}_2 \langle C_I \rangle$ были определены.

	$\text{bv}_2 \langle C_I \rangle$	$\text{bv}_2 \alpha$	$\text{bv}_2[C_i]$
$\text{bv}_2 \langle C_K \rangle$	0	0	$\sum_{k \in K} \delta_{ik}$
$\text{bv}_2 \beta$	0	$\text{aug}(\alpha \circ \beta)$	$\text{aug}_i(\beta \circ \beta)$
$\text{bv}_2[C_k]$	$\sum_{i \in I} \delta_{ik}$	$\text{aug}_k(\alpha \circ \alpha)$	$\delta_{ik} \chi(C_i)$

ТАБЛИЦА 4. Гомологическая форма Калинина

Гомоморфизм Бокштейна $\text{Sq}_1 : {}^\infty E_2(X) \rightarrow {}^\infty E_1(X)$ определяется с помощью А.2.3: $\text{Sq}_1 \text{bv}_2[C_i] = \text{bv}_1 w_1(C_i)$ и $\text{Sq}_1 \text{bv}_2(\alpha + \langle C_I \rangle) = \text{bv}_1 \alpha$.

В заключение этого раздела мы даем несколько примеров вычисления фильтрации $\mathcal{F}^*$ и гомоморфизмов Виро bv_* . Первый пример может служить моделью регулярных полных пересечений в $\mathbb{P}^n$ (см. [54]), второй – локальной моделью инволюций на гладких многообразиях.

А.2.7. ФИЛЬТРАЦИИ В $\mathbb{RP}^n$ (см. [54]). Пусть $X = \mathbb{P}^n$ и $c = \text{conj}$. Тогда фильтрации $\mathcal{F}^*$ на $H_*(\mathbb{RP}^n)$ и $\mathcal{F}_*$ на $H^*(\mathbb{RP}^n)$ имеют вид

$$\mathcal{F}^r = \text{Sq } H_{\geq r/2}(\mathbb{RP}^n), \quad \mathcal{F}_r = \text{Sq } H^{\leq r/2}(\mathbb{RP}^n),$$

где через Sq обозначаются как гомологический, так и когомологический тотальные квадраты Стинрода.

А.2.8. ФИЛЬТРАЦИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ ТОМА (см. [26]). Пусть ν есть m -мерное векторное расслоение над конечным клеточным пространством F , и пусть T и ∂T – ассоциированные расслоения соответственно на шары и сферы, разделенные антиподальной инволюцией. Тогда фильтрации $\mathcal{F}^*$ на $H_*(F)$ и $\mathcal{F}_*$ на $H^*(F)$, ассоциированные со спектральной последовательностью Калинина пары $(T, \partial T)$, задаются равенствами

$$\mathcal{F}^p = w(\nu)^{-1} \cap H_{\geq p-m}(F), \quad \mathcal{F}_p = w(\nu) \cup H^{\leq p-m}(F),$$

где $w(\nu) = 1 + w_1(\nu) + w_2(\nu) + \dots$ – тотальный класс Штифеля–Уитни расслоения ν . Гомоморфизмами Виро являются

$$\begin{aligned} \text{bv}_p: \mathcal{F}^p &\rightarrow H_p(T, \partial T), \quad x \mapsto \text{th}^{-1}[w(\nu) \cap x]_{p-m}, \\ \text{bv}^p: H^p(T, \partial T) &\rightarrow H^*(F)/\mathcal{F}_{p-1}, \quad x \mapsto w(\nu) \cup \text{th}^{-1}x, \end{aligned}$$

где th – изоморфизм Тома, а $[x]_r$ – r -мерная компонента неоднородного гомологического класса x .

Следующее утверждение является обобщением утверждения А.2.7; его можно вывести из А.2.7, используя принцип расщепления.

А.2.9. ФИЛЬТРАЦИИ НА МНОГООБРАЗИЯХ ГРАССМАНА. Пусть $X = G_k(\mathbb{C}^n)$ – многообразие Грассмана k -мерных плоскостей в $\mathbb{C}^n$ и $c = \text{сопж}$ – стандартное сопряжение. Тогда фильтрации $\mathcal{F}^*$ на $H_*(G_k(\mathbb{R}^n))$ и $\mathcal{F}_*$ на $H^*(G_k(\mathbb{R}^n))$ имеют вид

$$\mathcal{F}^r = \text{Sq } H_{\geq r/2}(G_k(\mathbb{R}^n)), \quad \mathcal{F}_r = \text{Sq } H^{\leq r/2}(G_k(\mathbb{R}^n)),$$

где через Sq обозначаются как гомологический, так и когомологический тотальные квадраты Стинрода.

Следующее следствие утверждения А.2.9, по существу, равносильно ему. Другое связанное с этим тождество имеется в [71].

А.2.10. СЛЕДСТВИЕ. Пусть X – топологическое пространство с инволюцией $c: X \rightarrow X$ и E – пространство вещественного векторного расслоения над X в смысле Атии [7] (т.е. E – пространство комплексного векторного расслоения, наделенное антилинейной инволюцией c_E , накрывающей инволюцию c). Тогда $\text{bv}^{2i} c_i(E) = \text{Sq } w^i(\mathbb{R}E)$ для всех i , где $\mathbb{R}E = \text{Fix } c_E$ – пространство вещественного векторного расслоения над $\text{Fix } c$.

А.3. ИНВОЛЮЦИИ НА МНОГООБРАЗИЯХ. Пусть X – гладкое замкнутое ориентированное $2k$ -мерное многообразие и c – гладкая инволюция, сохраняющая ориентацию, если k четно, и обращающая ее в противном случае. Определим скрученную форму пересечений

$$B^c: (H_k(X; \mathbb{Z})/\text{Tors}) \otimes (H_k(X; \mathbb{Z})/\text{Tors}) \rightarrow \mathbb{Z}, \quad B^c(x, y) = x \circ c_* y.$$

Эта форма симметрична; ее сигнатура $\sigma(c)$ называется *сигнатурой инволюции*. Если k нечетно, сигнатура равна 0, в противном случае $\sigma(c) = \sigma_+ - \sigma_-$, где $\sigma_{\pm}$ – сигнатуры сужений формы пересечений на собственные подпространства $H_k^{\pm 1}$ инволюции c_* .

А.3.1. ТЕОРЕМА. Если все компоненты множества $F = \text{Fix } c$ имеют размерность k , то $\sigma(c) = F \circ F$, где $F \circ F$ – нормальное число Эйлера подмногообразия F в X .

Поскольку вещественная часть $\mathbb{R}X$ неособого комплексного многообразия X с вещественной структурой вполне вещественна, все компоненты множества $\mathbb{R}X$ имеют размерность $n = \dim_{\mathbb{C}} X$ и потому $\mathbb{R}X \circ \mathbb{R}X = (-1)^{n/2} \chi(\mathbb{R}X)$. Если X наделено инвариантной кэлеровой метрикой, вещественная часть является лагранжевой.

А.3.2. СЛЕДСТВИЕ. Если X — $2k$ -мерное неособое компактное комплексное многообразие с вещественной структурой conj , то $\sigma(\text{conj}) = (-1)^k \chi(\mathbb{R}X)$.

Если X — замкнутое компактное (не обязательно ориентируемое) многообразие, размерность которого $\dim X = 2k$ четна, определен $\mathbb{Z}_2$ -значный вариант $B^c: H_k(X) \otimes H_k(X) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ скрученной формы пересечений. Эта форма также симметрична.

А.3.3. ЛЕММА АРНОЛЬДА. Пусть X — замкнутое гладкое $2k$ -мерное многообразие с инволюцией s . Если $\dim \text{Fix } s \leq k$, то фундаментальный класс $[\text{Fix } s]_k$ объединения k -мерных компонент множества $\text{Fix } s$ реализует в $H_k(X) \otimes H_k(X) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ характеристический класс формы $B^c: H_k(X) \otimes H_k(X) \rightarrow \mathbb{Z}_2$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В общем случае характеристический класс формы B^c есть k -мерная компонента класса $\text{in}_!(v(\tau) v^{-1}(\nu))$, где $\text{in}: \text{Fix } s \rightarrow X$ — включение, τ и ν — касательное и соответственно нормальное расслоения на $\text{Fix } s$, а v обозначает тотальный класс Bu . Подробности см. в [21].

Приложение В. Целочисленные решетки и квадратичные формы

В этом приложении мы даем краткое введение в арифметику целочисленных решеток и конечных квадратичных форм, которая часто используется в топологии вещественных алгебраических многообразий. Доказательства, в большинстве несложные, можно найти в любом учебнике, например, в [85] и [104].

В.1. Конечные квадратичные формы. Конечной симметричной билинейной формой называется пара $(\mathcal{L}, b)$, где $\mathcal{L}$ — конечная абелева группа и $b: \mathcal{L} \otimes \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ — симметричная билинейная форма. Конечной квадратичной формой на $\mathcal{L}$ называется отображение $q: \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{Q}/2\mathbb{Z}$, удовлетворяющее условиям $q(nx) = n^2 q(x)$, $x \in \mathcal{L}$, $n \in \mathbb{Z}$, и $q(x+y) - q(x) - q(y) = 2b(x, y)$, $x, y \in \mathcal{L}$, где b — симметричная билинейная форма; форма b определяется формой q и называется билинейной формой, ассоциированной с q , в свою очередь q называется квадратичным расширением формы b .

В случаях, не вызывающих недоразумений, для квадратичной формы q (билинейной формы b) мы часто используем сокращенное обозначение $q(x) = x^2$ (соответственно $b(x, y) = xy$).

Если q_1, q_2 — два квадратичных расширения одной и той же билинейной формы b , разность $q_1 - q_2$ есть линейная форма. Более того, $q_i(x) = b(x, x) \bmod \mathbb{Z}$, $i = 1, 2$, для любого $x \in \mathcal{L}$; поэтому $q_1 - q_2$ принимает значения в $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}/2\mathbb{Z}$. Следовательно, множество $\text{Qu}(\mathcal{L}, b)$ квадратичных расширений данной билинейной формы b на $\mathcal{L}$ является аффинным пространством над $\text{Hom}(\mathcal{L}, \mathbb{Z}_2)$. В частности, если $\mathcal{L}$ не имеет 2-кручения, любая билинейная форма b на $\mathcal{L}$ имеет единственное квадратичное расширение.

Симметричная билинейная форма b называется невырожденной, если гомоморфизм корреляции $\mathcal{L} \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{L}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, $x \mapsto b(x, \cdot)$, биективен. Квадратичная форма называется невырожденной, если невырождена ассоциированная с ней билинейная форма. В общем случае ядро гомоморфизма корреляции обозначается через $\text{Ker } \mathcal{L}$ или $\mathcal{L}^\perp$.

Невырожденные конечные квадратичные (билинейные) формы образуют аддитивный моноид Bil (соответственно Qu) с операцией ортогонального суммирования. Сис-

тема образующих моноида Bil указана, например, в [121]; для каждой образующей группа $\mathcal{L}$ либо циклическая, либо является (не ортогональной) суммой двух циклических групп. Образующие моноида Qu можно получить поднятием образующих моноида Bil . В этом обзоре мы имеем дело исключительно с формами на группах периода 2 (однако доказательства результатов о вещественных поверхностях Энриквеса существенно используют формы на группах периода 4, теорию которых можно найти в [29]); они образуют прямые слагаемые Bil_2 и Qu_2 моноидов Bil и Qu соответственно. Для Bil_2 образующими Уолла являются

$$\mathcal{L} = \mathbb{Z}_2: a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad \mathcal{L} = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2: u_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Каждая из форм a_2 и u_2 имеет с точностью до изоморфизма два квадратичных расширения:

$$\text{для } a_2: \begin{bmatrix} \pm \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \text{для } u_2: \mathcal{U}_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \text{ и } \mathcal{V}_2 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Инвариантом Брауна $\text{Br } q$ невырожденной конечной квадратичной формы q на $\mathcal{L}$ называется класс вычетов по модулю 8, определяемый равенством

$$\exp\left(\frac{1}{4}i\pi \text{Br } q\right) = |\mathcal{L}|^{-\frac{1}{2}} \sum_{x \in \mathcal{L}} \exp(i\pi q(x)).$$

В.1.1. *Справедливы равенства $\text{Br} \begin{bmatrix} \pm \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \pm 1$, $\text{Br } \mathcal{U}_2 = 0$ и $\text{Br } \mathcal{V}_2 = 4$.*

Конечная группа $\mathcal{L}$ периода 2 является $\mathbb{Z}_2$ -векторным пространством. Пространство $\mathcal{L}$ с конечной квадратичной формой на нем называется *квадратичным пространством*. Квадратичная (билинейная) форма на $\mathbb{Z}_2$ -пространстве принимает значения в $(\frac{1}{2}\mathbb{Z})/2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}/2\mathbb{Z}$ (соответственно в $(\frac{1}{2}\mathbb{Z})/\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$). Используя канонические отождествления $(\frac{1}{2}\mathbb{Z})/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_4$ и $(\frac{1}{2}\mathbb{Z})/\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_2$, $\frac{1}{2} \mapsto 1$, можно рассматривать квадратичные (билинейные) формы на $\mathbb{Z}_2$ -пространствах как отображения $\mathcal{L} \rightarrow \mathbb{Z}_4$ (соответственно $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{Z}_2$).

Вектор $w \in \mathcal{L}$ называется *характеристическим элементом* пространства $\mathcal{L}$, если $xw = x^2 \bmod 2$ для любого $x \in \mathcal{L}$. Поскольку на группах периода 2 отображение $x \mapsto x^2 \bmod 2$ линейно, характеристические элементы существуют и образуют класс смежности $\bmod (\text{Ker } \mathcal{L})$; он называется *характеристическим классом смежности* пространства $\mathcal{L}$. Если $\mathcal{L}$ невырождено, характеристический элемент единственен. Подгруппа в $\mathcal{L}$, натянутая на объединение ядра $\text{Ker } \mathcal{L}$ и характеристического элемента, будет обозначаться через $\Omega = \Omega(\mathcal{L})$.

Квадратичное пространство называется *четным*, если 0 является его характеристическим элементом, т.е. если $x^2 = 0 \bmod 2$ для любого $x \in \mathcal{L}$. В противном случае оно называется *нечетным*.

В.1.2. *Моноид невырожденных конечных квадратичных форм на группах периода 2 порожден формами $\mathcal{A}^\pm = [\pm \frac{1}{2}]$, $\mathcal{U}_2$ и $\mathcal{V}_2$, которые подчинены соотношениям $2\mathcal{U}_2 = 2\mathcal{V}_2$, $3\mathcal{A}^\pm = \mathcal{A}^\mp \oplus \mathcal{V}_2$ и $\mathcal{A}^\pm \oplus \mathcal{A}^+ \oplus \mathcal{A}^- = \mathcal{A}^\pm \oplus \mathcal{U}_2$.*

Два невырожденных квадратичных пространства изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые ранг, инвариант Брауна и оба либо четны, либо нечетны.

Квадратичная форма q на $\mathcal{L}$ называется *информативной*, если $q|_{\mathcal{L}^\perp} = 0$. Понятие инварианта Брауна распространяется на информативные формы: поскольку q равна нулю на $\mathcal{L}^\perp$, она факторизуется до квадратичной формы $q': \mathcal{L}/\mathcal{L}^\perp \rightarrow \mathbb{Q}/2\mathbb{Z}$, и можно положить $\text{Br } q = \text{Br } q'$. Инвариант Брауна аддитивен: для любой пары $(\mathcal{L}_i, q_i)$, $i = 1, 2$, информативных квадратичных форм $\text{Br}(\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2, q_1 \oplus q_2) = \text{Br}(\mathcal{L}_1, q_1) + \text{Br}(\mathcal{L}_2, q_2)$.

Подформа $\mathcal{N}$ информативной квадратичной формы $(\mathcal{L}, q)$ называется *информативной*, если $\mathcal{N}^\perp \subset \mathcal{N}$ и $q|_{\mathcal{N}^\perp} = 0$. (Информативная подформа является, очевидно, информативной формой; поэтому для нее определен инвариант Брауна.) Подформа $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$ называется *изотропной* (точнее, q -изотропной), если $q|_{\mathcal{S}} = 0$. Ясно, что подформа $\mathcal{N}$ невырожденной формы $(\mathcal{L}, q)$ информативна тогда и только тогда, когда $\mathcal{N}^\perp$ изотропна.

Следующее утверждение сразу получается из свойств суммы Гаусса.

В.1.3. Если $\mathcal{S}$ — q -изотропная подформа невырожденной квадратичной формы $(\mathcal{L}, q)$, то q определяет невырожденную квадратичную форму на $\mathcal{S}^\perp/\mathcal{S}$, причем $\text{Br}(\mathcal{S}^\perp/\mathcal{S}) = \text{Br } \mathcal{L}$.

В.1.4. СЛЕДСТВИЕ. Если $\mathcal{N}$ — информативная подформа информативной квадратичной формы $(\mathcal{L}, q)$, то $\text{Br}(\mathcal{N}, q|_{\mathcal{N}}) = \text{Br}(\mathcal{L}, q)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Понятие информативного подпространства имеет смысл и в случае, когда квадратичная форма q определена лишь на $\mathcal{N}$ (но при этом билинейная форма определена на всем пространстве $\mathcal{L}$). В этом случае следствие В.1.4 утверждает, что $\text{Br } q' = \text{Br } q$ для любого расширения q' формы q на L .

В.1.5. Для любого информативного квадратичного пространства $(\mathcal{L}, q)$:

- (1) $\text{Br } q = \dim(\mathcal{L}/\mathcal{L}^\perp) \bmod 2$;
- (2) $\text{Br } q = q(w) \bmod 4$ для любого характеристического элемента $w \in \mathcal{L}$;
- (3) $\text{Br}(q + v) = \text{Br } q - 2q(v)$ для любого $v \in \mathcal{L}$ (где $q + v$ обозначает квадратичную форму $x \mapsto q(x) + 2(vx)$);
- (4) $\text{Br } q = 0$ тогда и только тогда, когда форма $(\mathcal{L}, q)$ кобордантна нулю, т.е. существует такое подпространство $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}$, что $\mathcal{H}^\perp = \mathcal{H}$ и $q|_{\mathcal{H}} = 0$.

В.2. Целочисленные решетки. (Целочисленной) *решеткой* называется свободная абелева группа L конечного ранга вместе с симметричной билинейной формой $b: L \otimes L \rightarrow \mathbb{Z}$. Как и в случае конечных форм, мы часто используем сокращенные обозначения $b(x, y) = xy$ и $b(x, x) = x^2$. Решетка L называется *четной*, если $x^2 = 0 \bmod 2$ для любого $x \in L$; в противном случае L называется *нечетной*. Пусть $L^\vee = \text{Hom}(L, \mathbb{Z})$ — двойственная абелева группа. Решетка L называется *невырожденной* (унимодулярной), если гомоморфизм корреляции $L \rightarrow L^\vee$, $x \mapsto b(x, \cdot)$, инъективен (соответственно биективен). Коядро гомоморфизма корреляции называется *дискриминантной группой* решетки L и обозначается через $\text{discr } L$ или $\mathcal{L}$.

Билинейная форма на L продолжается до $\mathbb{Q}$ -значной билинейной формы на $L \otimes \mathbb{Q}$. Если L невырождена, имеется естественное отождествление $L^\vee = \{x \in L \otimes \mathbb{Q} \mid xy \in \mathbb{Z}\}$

для $y \in L$ и гомоморфизм корреляции является вложением $L \hookrightarrow L^\vee$. Поэтому группа $\mathcal{L}$ конечна, а форма на L продолжается до $\mathbb{Q}$ -значной формы на $L^\vee$, которая, в свою очередь, индуцирует конечную симметричную билинейную форму $b: \mathcal{L} \otimes \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Порядок группы $\mathcal{L}$ равен модулю определителя $\det L$ матрицы Грама решетки L . Если к тому же L четна, то форма b является ассоциированной с конечной квадратичной формой $q: \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{Q}/2\mathbb{Z}$, определенной равенством $q(x + L) = x^2 \bmod 2\mathbb{Z}$, $x \in L^\vee$.

В.2.1. ФОРМУЛА ВАН ДЕР БЛИЯ. Если L – невырожденная четная целочисленная решетка, то $\text{Br } \mathcal{L} = \sigma(L) \bmod 8$.

Следующее предложение сразу получается из В.2.1.

В.2.2. СЛЕДСТВИЕ. Пусть L – четная невырожденная целочисленная решетка, дискриминантная группа которой $\mathcal{L} = \text{discr } L$ имеет период 2. Тогда:

- (1) если L унимодулярна (т.е. $\mathcal{L} = 0$), то $\sigma(L) = 0 \bmod 8$;
- (2) если $\det L = \pm 2$ (т.е. $\mathcal{L} = \mathbb{Z}_2$), то $\sigma(L) = \pm 2 \bmod 8$;
- (3) если $\det L = \pm 4$ (т.е. $\mathcal{L} = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$) и дискриминантная форма на $\mathcal{L}$ нечетна, то $\sigma(L) = 0, \pm 2 \bmod 8$;
- (4) если дискриминантная форма на $\mathcal{L}$ четна, то $\sigma(L) = 0 \bmod 4$.

В.3. Инволюции на унимодулярных решетках. Пусть L – унимодулярная решетка и $s: L \rightarrow L$ – инволютивная автоизометрия решетки L . Для подрешеток $L^\pm \subset L$, инвариантных и косоинвариантных относительно s элементов, положим $q^\pm = \text{discr } L^\pm$ и $J = L/(L^+ \oplus L^-)$. Как $\mathbb{Z}_2$ -векторные пространства J и $q^\pm$ изоморфны. Подрешетки $L^\pm$ являются ортогональными дополнениями друг друга, причем $\text{rk } L^+ + \text{rk } L^- = \text{rk } L$ и

$$\log_2 |\text{discr } L^\pm| = \dim_{\mathbb{Z}_2} J = \dim_{\mathbb{Z}_2} L \otimes \mathbb{Z}_2 - \dim_{\mathbb{Z}_2} \{L \otimes \mathbb{Z}_2\}^c,$$

где $\{L \otimes \mathbb{Z}_2\}^c = \{x \in L \otimes \mathbb{Z}_2 \mid sx = l\}$.

Легко проверить, что справедливо следующее утверждение.

В.3.1. Форма q^+ четна тогда и только тогда, когда характеристические элементы решетки L совпадают с характеристическими элементами скрученной формы $b^c: L \otimes L \rightarrow \mathbb{Z}_2$, $x \otimes y \mapsto b(x, sy)$.

Приложение С. Форма Рохлина–Гийю–Марена

В этом приложении мы кратко напоминаем конструкцию формы Рохлина–Гийю–Марена (см. [46]) характеристической поверхности в четырехмерном многообразии.

Пусть Y – ориентированное замкнутое гладкое четырехмерное многообразие и U – характеристическая поверхность в Y , т.е. гладкое замкнутое двумерное подмногообразие с $[U] = Du_2(Y)$ в $H_2(Y)$. Обозначим через $i: U \hookrightarrow Y$ включение и положим $K = \text{Ker}[i_*: H_1(U) \rightarrow H_1(Y)]$. Тогда существует естественное квадратичное расширение $\text{gm}: K \rightarrow \mathbb{Z}_4$ гомологической формы пересечений, которое называется *формой Рохлина–Гийю–Марена* пары (Y, U) . Геометрически ее можно определить следующим образом. Возьмем класс $x \in K$ и реализуем его объединением (попарно не пересекающихся простых замкнутых гладких кривых в U). Оно является краем погруженной в Y поверхности $\mathfrak{M}$, которую можно выбрать нормальной к U вдоль $\mathfrak{l} = \partial \mathfrak{M}$ и трансверсальной к U в ее внутренних точках. (Такая поверхность называется *перепонкой*.)

Рассмотрим поле нормальных прямых ξ на $\mathbb{I}$, касательных к U , и определим индекс $\text{ind } \mathfrak{M} \in \mathbb{Z}$ как препятствие к продолжению поля ξ до поля нормальных прямых на $\mathfrak{M}$. (Поскольку $\tau\mathfrak{M} \oplus \nu\mathfrak{M}$ — ориентированное векторное расслоение, это препятствие определено и является целым числом. Если кривая $\mathbb{I}$ расположена двусторонне в U , этот индекс равен удвоенному индексу, определенному с помощью векторных полей вместо полей прямых.) Тогда $\text{gm}(x) = \text{ind } \mathfrak{M} + 2 \text{Card}(\text{int } \mathfrak{M} \cap F) \bmod 4$.

С.1. ТЕОРЕМА. Для указанных Y и U пара (K, gm) является информативным подпространством в $H_1(U)$ и

$$2 \text{Br gm} = \sigma(Y) - U \circ U \bmod 16,$$

где $U \circ U$ — нормальное число Эйлера поверхности U в Y .

Доказательство в случае, когда Y односвязно (или в более общем случае, когда $K = H_1(U)$), см. в [46], самый общий случай см., например, в [29]. Рохлин рассматривал случай, когда характеристическая поверхность ориентируема и использовал Arf-инвариант: в этом случае $4 \text{Arf} = \text{Br}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Имеется другое построение формы Рохлина–Гийю–Марена. Так как поверхность U характеристическая, $Y \setminus U$ допускает спинорную структуру, которая не продолжается ни через одну компоненту поверхности U . Сужение этой структуры на край трубчатой окрестности поверхности U индуцирует естественным образом Pin^- -структуру на U (ср. [38]), которая определяет квадратичную форму q на $H_1(U)$. Нетрудно проверить, что q определена с точностью до слагаемых из $\text{Im}[i^*: H^1(Y) \rightarrow H^1(U)]$ и, следовательно, ее сужение на K не зависит от выбора спинорной структуры; это сужение совпадает с gm . (Таким образом получается другое доказательство теоремы С.0.1, о котором сообщил нам С. Бейли: квадратичные формы, возникающие из Pin^- -структур, изоморфны друг другу, так как имеют один и тот же инвариант Брауна (см. В.1.2); эти формы дают все квадратичные продолжения формы gm с K на $H_1(U)$ и потому, как показано в [9], K информативно.)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Akbulut S. On quotients of complex surfaces under complex conjugation // J. Reine Angew. Math. 1994. V. 447. P. 83–90.
- [2] Арнольд В. И. О расположении овалов вещественных плоских алгебраических кривых, инволюциях четырехмерных гладких многообразий и арифметике целочисленных квадратичных форм // Функц. анализ и его прил. 1971. Т. 5. №3. С. 1–9.
- [3] Арнольд В. И. Индекс особой точки векторного поля, неравенства Петровского–Олейник и смешанные структуры Ходжа // Функц. анализ и его прил. 1978. Т. 12. №1. С. 1–14.
- [4] Арнольд В. И. Разветвленное накрытие $CP^2 \rightarrow S^4$, гиперболичность и проективная топология // Сиб. матем. журн. 1988. Т. 29. №5. С. 36–47.
- [5] Arnold V. I. Topological content of the Maxwell theorem on multipole representation of spherical functions // Topol. Methods Nonlinear Anal. 1996. V. 7. №2. P. 205–217.
- [6] Арнольд В. И., Олейник О. А. Топология вещественных алгебраических многообразий // Вестник МГУ. Сер. 1, матем. мех. 1979. №6. С. 7–17.
- [7] Atiyah M. F. K-theory and reality // Quart. J. Math. Oxford Ser. (2). 1966. V. 17. P. 367–386.
- [8] Atiyah M. F., Dupont J. L. Vector fields with finite singularities // Acta Math. 1972. V. 128. P. 1–40.

- [9] Bailly C., Vdovina A. Sous-espaces déterminant l'invariant d'Arf et un Théorème de Rokhlin sur la signature // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 2000. V. 330. № 3. P. 221–223.
- [10] Barth W., Peters C., van de Ven A. Compact complex surfaces. Ergeb. Math. Grenzgeb. (3). Berlin: Springer-Verlag, 1984.
- [11] Bihan F. Constructions combinatoires de surfaces algébriques réelles. Thèse. Rennes: Univ. Rennes I, 1998.
- [12] Borel A., Haefliger A. La classe d'homologie fondamentale d'un espace analytique // Bull. Soc. Math. France. 1961. V. 89. P. 461–513.
- [13] Бредон Г. Е. Введение в теорию компактных групп преобразований. М.: Наука, 1980.
- [14] Cerf J. Sur les difféomorphismes de la sphère de dimension trois, $\Gamma_4 = 0$ // Lecture Notes in Math. 1968. V. 53.
- [15] Ciliberto C., Pedrini C. Annibale Comessatti and real algebraic geometry // Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl. 1994. № 36. P. 71–102.
- [16] Чжень Пэн-шень. Комплексные многообразия. М.: ИЛ, 1961.
- [17] Comessatti A. Sulla connessione delle superficie algebriche reale // Verh. Internat. Math. Kongr. Zürich. 1932. V. 2. P. 169.
- [18] Comessatti A. Fondamenti per la geometria sopra le superficie razionali dal punto di vista reale // Math. Ann. 1912. V. 43. P. 1–72.
- [19] Comessatti A. Sur la connessione delle superficie razionali reale // Annali di Matematica. 1914. V. 23. P. 215–285.
- [20] Comessatti A. Reele Fragen in der algebraischen Geometrie // Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. 1932. V. 41. P. 107–134.
- [21] Conner P. E., Miller E. Y. Equivariant self-intersection // Preprint, 1979.
- [22] Данилов В. И., Хованский А. Г. Многогранники Ньютона и алгоритм вычисления чисел Ходжа–Делиня // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1986. Т. 50. № 5. С. 925–945.
- [23] Degtyarev A. Stiefel orientations on a real algebraic variety // Lecture Notes in Math. 1992. V. 1524. P. 205–220.
- [24] Degtyarev A. Cohomology approach to killing structures on Steenrod bundles // Adv. Soviet Math. 1994. V. 18. P. 1–22.
- [25] Degtyarev A. On the Pontrjagin–Viro form // Adv. Math. Sci. Appl. Rokhlin's Memorial volume (to appear).
- [26] Degtyarev A., Kharlamov V. Halves of a real Enriques surface // Comment. Math. Helv. 1996. V. 71. P. 628–663.
- [27] Degtyarev A., Kharlamov V. Topological classification of real Enriques surfaces // Topology. 1996. V. 35. № 3. P. 711–729.
- [28] Дегтярев А. И., Звонилов В. И. Жесткая изотопическая классификация вещественных алгебраических кривых бистепени $(3, 3)$ на квадриках // Матем. заметки. 1999. Т. 66. № 6. С. 810–815.
- [29] Degtyarev A., Itenberg I., Kharlamov V. Real Enriques Surfaces // Lecture Notes in Math. (to appear).
- [30] Donaldson S. Yang–Mills invariants of smooth four-manifolds // Geometry of Low-Dimensional Manifolds. V. 1. Gauge Theory and Algebraic Surfaces. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990. P. 5–40.
- [31] Edmonds A. L. Orientability of fixed point sets // Proc. Amer. Math. Soc. 1981. V. 82. № 1. P. 120–124.
- [32] Элиашберг Я. М., Харламов В. М. О числе комплексных точек вещественной поверхности в комплексной // Труды Ленинградской международной топологической конференции. Л.: Наука, 1983. С. 143–148.
- [33] Фидлер Т. Пучки прямых и топология вещественных алгебраических кривых // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1982. Т. 46. № 4. С. 853–863.
- [34] Фидлер Т. Новые сравнения в топологии вещественных плоских алгебраических кривых // Докл. АН СССР. 1983. Т. 270. № 1. С. 56–58.
- [35] Фидлер Т. Дополнительные неравенства в топологии вещественных плоских алгебраических кривых // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1985. Т. 49. № 4. С. 874–883.

- [36] Finashin S. Rokhlin conjecture and quotients of complex surfaces by complex conjugation // J. Reine Angew. Math. 1996. V. 481. P. 55–71.
- [37] Finashin S. Decomposability of quotients by complex conjugation for rational and Enriques surfaces // Topology Appl. 1997. V. 79. №2. P. 121–128.
- [38] Финашин С. М. Инвариант относительно Pin^- кобордизма и обобщение сигнатурного сравнения Рохлина // Алгебра и анализ. 1990. Т. 2. №4. С. 242–250.
- [39] Finashin S., Shustin E. On imaginary plane curves and Spin-quotients of complex surfaces by complex conjugation // Trans. Amer. Math. Soc. 1997. V. 180. P. 93–101.
- [40] Гудков Д. А. Построение новой серии M -кривых // Докл. АН СССР. 1971. Т. 200. №6. С. 1269–1272.
- [41] Гудков Д. А. Топология вещественных проективных алгебраических многообразий // УМН. 1974. Т. 29. №4. С. 3–79.
- [42] Гудков Д. А. О топологии алгебраических кривых на гиперboloиде // УМН. 1979. Т. 34. №6. С. 26–32.
- [43] Гудков Д. А., Шустин Е. И. Классификация неособых кривых восьмого порядка на эллипсоиде // Методы качественной теории дифференциальных уравнений. Горький: ГГУ, 1980. С. 104–107.
- [44] Гудков Д. А., Усачев А. К. Неособые кривые младших порядков на гиперboloиде // Методы качественной теории дифференциальных уравнений. Горький: ГГУ, 1980. С. 96–103.
- [45] Гудков Д. А., Уткин Г. А. Топология кривых 6-го порядка и поверхностей 4-го порядка // Уч. зап. Горьк. ун-та. 1969. Т. 87. С. 3–213.
- [46] Guillou L., Marin A. Une extension d'un théorème de Rohlin sur la signature // C. R. Acad. Sci. Paris. 1977. V. 285. P. A95–A98; // рус. перев. в кн.: В поисках утраченной топологии. Под ред. Л. Гийу, А. Марена. М.: Мир, 1989. С. 110–134.
- [47] Хартсхорн Р. Алгебраическая геометрия. М.: Мир, 1981.
- [48] Hirzebruch F. Über vierdimensionale Riemannsche Flächen mehrdeutiger analytischer Functionen von zwei komplexen Veränderlichen // Math. Ann. 1953. V. 126. №1. P. 1–22.
- [49] Хирцебрух Ф. Топологические методы в алгебраической геометрии. М.: Мир, 1973.
- [50] Horikawa E. On deformations of quintic surfaces // Invent. Math. 1975. V. 31. P. 43–85.
- [51] Itenberg I., Kharlamov V. Towards the maximal number of components of a nonsingular surface of degree 5 in $\mathbb{RP}^3$ // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. 1996. V. 173. P. 111–118.
- [52] Itenberg I., Viro O. Ya. Patchworking algebraic curves disproves the Ragsdale conjecture // Math. Intelligencer. 1996. V. 18. №4. P. 19–28.
- [53] Itenberg I., Viro O. Ya. Maximal real algebraic hypersurfaces of projective space // Preprint.
- [54] Kalinin I. Когомологические характеристики вещественных проективных гиперповерхностей // Алгебра и анализ. 1991. Т. 3. №2. С. 91–110.
- [55] Харламов В. М. Максимальное число компонент поверхности 4-й степени в $\mathbb{RP}^3$ // Функц. анализ и его прил. 1972. Т. 6. №4. С. 101.
- [56] Харламов В. М. Обобщенное неравенство Петровского // Функц. анализ и его прил. 1974. Т. 8. №2. С. 50–56.
- [57] Харламов В. М. Топологические типы неособых поверхностей степени 4 в $\mathbb{RP}^3$ // Функц. анализ и его прил. 1976. Т. 10. №4. С. 55–68.
- [58] Харламов В. М. Обобщенное неравенство Петровского. II // Функц. анализ и его прил. 1975. Т. 9. №3. С. 93–94.
- [59] Харламов В. М. Дополнительные сравнения для эйлеровой характеристики четномерных вещественных алгебраических многообразий // Функц. анализ и его прил. 1975. Т. 9. №2. С. 51–60.
- [60] Харламов В. М. Изотопические типы неособых поверхностей степени 4 в $\mathbb{RP}^3$ // Функц. анализ и его прил. 1978. Т. 12. №1. С. 86–87.
- [61] Харламов В. М. К классификации неособых поверхностей степени 4 в $\mathbb{RP}^3$ относительно жестких изотопий // Функц. анализ и его прил. 1984. Т. 18. №1. С. 49–56.

- [62] Kharlamov V. Nonamphicheiral surfaces of degree 4 in $\mathbb{RP}^3$ // Lecture Notes in Math. 1988. V. 1346. P. 349–356.
- [63] Харламов В. М. О числе компонент M -поверхности степени 5 в $\mathbb{RP}^3$ // Труды XVI советской алгебраической конференции. Л., 1981. С. 353–354.
- [64] Kharlamov V. Estimates of Betti numbers in topology of real algebraic surfaces // Proc. Internat. Topological Conference. Oberwolfach, 1987. P. 12–13.
- [65] Хованский А. Г. Индекс полиномиального векторного поля // Функци. анализ и его прил. 1979. Т. 13. № 1. С. 49–58.
- [66] Хованский А. Г. Краевые индексы полиномиальных 1-форм с однородными компонентами // Алгебра и анализ. 1998. Т. 10. № 3. С. 193–222.
- [67] Klein F. Über Flächen dritter Ordnung // Math. Ann. 1873. V. 6. P. 551–581.
- [68] Kodaira K., Spencer D. C. Groups of complex line bundles over compact Kähler varieties. Divisor class groups on algebraic varieties // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 1953. V. 39. P. 868–877.
- [69] Korchagin A. Classification of real algebraic curves on toric varieties, Preliminary report // 911-th AMS Meeting, Program. Louisiana State Univ., Baton Rouge, Apr. 19–21, 1996.
- [70] Краснов В. А. Неравенства Харнака–Тома для отображений вещественных алгебраических многообразий // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. Т. 47. № 2. С. 268–297.
- [71] Краснов В. А. Об эквивариантных когомологиях Гротендика вещественного алгебраического многообразия и их приложениях // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 3. С. 36–52.
- [72] Kuiper N. The quotient space of $\mathbb{CP}^2$ by complex conjugation is the 4-sphere // Math. Ann. 1974. V. 208. P. 175–177.
- [73] Lai Hon-Fei. Characteristic classes of real manifolds immersed in complex manifolds // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. V. 172. P. 1–33.
- [74] Laudenbach F., Poenaru V. A note on four-dimensional handlebodies // Bull. Soc. Math. France. 1972. V. 100. P. 337–344.
- [75] Letizia M. Quotients by complex conjugation of nonsingular quadrics and cubics in $\mathbb{CP}^3$ defined over $\mathbb{R}$ // Pacific J. Math. 1984. V. 110. № 2. P. 307–314.
- [76] Марен А. $\mathbb{CP}^2/\sigma$ или Кейпер и Маси в стране коник // В поисках утраченной топологии. Под ред. А. Гийу, А. Марена. М.: Мир, 1989. С. 149–161.
- [77] Марен А. Несколько замечаний о вещественных плоских алгебраических кривых // В поисках утраченной топологии. Под ред. А. Гийу, А. Марена. М.: Мир, 1989. С. 162–172.
- [78] Massey W. The quotient space of the complex projective plane under conjugation is a 4-sphere // Geom. Dedicata. 1973. V. 2. P. 371–374.
- [79] Matsuoaka S. Nonsingular algebraic curves in $\mathbb{RP}^1 \times \mathbb{RP}^1$ // Trans. Amer. Math. Soc. 1991. V. 324. № 1. P. 87–107.
- [80] Matsuoaka S. Congruences for M - and $(M - 1)$ -curves with odd branches on a hyperboloid // Bull. London Math. Soc. 1992. V. 24. P. 61–67.
- [81] Mikhalkin G. The complex separation of real surfaces and extensions of Rokhlin congruence // Invent. Math. 1994. V. 118. P. 197–222.
- [82] Mikhalkin G. Adjunction inequality for real algebraic curves // Math. Res. Lett. 1997. V. 4. № 1. P. 45–52.
- [83] Mikhalkin G. Congruences for real algebraic curves on an ellipsoid // Adv. Soviet Math. 1994. V. 18. P. 223–233.
- [84] Mikhalkin G. Topology of curves of degree 6 on cubic surfaces in $\mathbb{RP}^3$ // J. Algebraic Geom. 1998. V. 7. № 2. P. 219–237.
- [85] Милнор Дж., Хьюзмоллер Д. Симметрические билинейные формы. М.: Наука, 1979.
- [86] Милнор Дж., Сташеф Дж. Характеристические классы. М.: Мир, 1979.
- [87] Натанзон С. М. Клейновы поверхности // УМН. 1990. Т. 45. № 6. С. 47–90.
- [88] Никулин В. В. Целочисленные симметрические билинейные формы и некоторые их геометрические приложения // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43. № 1. С. 111–177.

- [89] Никулин В. В. Инволюции целочисленных квадратичных форм и их приложения к вещественной алгебраической геометрии // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. Т. 47. № 1. С. 109–188.
- [90] Ochanine S. Signature modulo 16, invariants de Kervaire généralisés et nombres caractéristiques dans la K -théorie réelle // Mém. Soc. Math. France (N.S.). 1981. № 5. P. 1–142.
- [91] Олейник О. А. О топологии действительных алгебраических кривых на алгебраической поверхности // Матем. сб. 1951. Т. 29. № 1. С. 133–156.
- [92] Orevkov S. Link theory and oval arrangements of real algebraic curves // Topology. 1999. V. 38. № 4. P. 779–810.
- [93] Orevkov S. Riemann existence theorem and construction of real algebraic curves (to appear).
- [94] Petrovskiy I. G. On the topology of real plane algebraic curves // Ann. Math. 1938. V. 39. № 1. P. 189–209.
- [95] Петровский И. Г., Олейник О. А. О топологии действительных алгебраических поверхностей // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1949. Т. 67. № 13. С. 389–402.
- [96] Risler J.-J. Construction d'hypersurfaces réelles (d'après Viro) // Astérisque. 1993. V. 216. P. 69–86.
- [97] Рохлин В. А. Доказательство гипотезы Гудкова // Функци. анализ и его прил. 1972. Т. 6. № 2. С. 62–64.
- [98] Рохлин В. А. Комплексные ориентации вещественных алгебраических кривых // Функци. анализ и его прил. 1974. Т. 8. № 4. С. 71–75.
- [99] Рохлин В. А. Комплексные топологические характеристики вещественных алгебраических кривых // УМН. 1978. Т. 33. № 5. С. 77–89.
- [100] Рохлин В. А. Сравнения по модулю 16 в шестнадцатой проблеме Гильберта // Функци. анализ и его прил. 1972. Т. 6. № 4. С. 58–64.
- [101] Рохлин В. А. Сравнения по модулю 16 в шестнадцатой проблеме Гильберта. II // Функци. анализ и его прил. 1973. Т. 7. № 2. С. 91–92.
- [102] Рохлин В. А. Новые неравенства в топологии вещественных плоских алгебраических кривых // Функци. анализ и его прил. 1980. Т. 14. № 1. С. 37–43.
- [103] Saito S. (formerly S. Matsuoka). Classification of involutions of lattices with conditions and real algebraic curves on a hyperboloid // Sūrikaiseikenkyūsho Kōkyūroku. 1977. V. 1006. P. 1–21.
- [104] Scharlau W. Quadratic and Hermitian Forms. Berlin: Springer-Verlag, 1985. (Grundlehren Math. Wiss. V. 270.)
- [105] Schläfli L. On the distribution of surfaces of the third order into species, in reference to the absence or presence of singular points, and the reality of their lines // Philos. Trans. Roy. Soc. London. 1863. V. 153. P. 195–241.
- [106] Segre B. The Non-Singular Cubic Surfaces. Oxford: Oxford Univ. Press, 1942.
- [107] Silhol R. Real Algebraic Surfaces. Berlin: Springer-Verlag, 1989. (Lecture Notes in Math. V. 1392.)
- [108] Steenbrink J. Intersection form for quasi-homogeneous singularities // Compositio Math. 1977. V. 34. № 2. P. 211–223.
- [109] Steenrod N. E., Epstein D. B. A. Cohomology Operations. Princeton: Princeton Univ. Press, 1962.
- [110] Szabó Z. Simply-connected irreducible 4-manifolds with no symplectic structure // Invent. Math. 1998. V. 132. P. 457–466.
- [111] Thom R. Une théorie intrinsèque des puissances de Steenrod // Colloque de Topologie de Strasbourg (1951) 1952. Exposé N. 6.
- [112] Thom R. Espaces fibrés en sphères et carrés de Steenrod // Ann. Sci. École Norm. Sup. 1952. V. 3. № 2. P. 109–182.
- [113] Thom R. Sur l'homologie des variétés algébriques réelles // Differ. Combinat. Topology: A symposium in honour of Marston Morse. Princeton: Princeton Univ. Press, 1965. P. 255–265.
- [114] Варченко А. Н. Теоремы топологической эквисингулярности семейств алгебраических многообразий и полиномиальных отображений // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1972. Т. 36. № 5. С. 957–1019.

- [115] Варченко А. Н. Асимптотическая смешанная структура Ходжа в исчезающих когомологиях // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1981. Т. 45. № 3. С. 540–591.
- [116] Варченко А. Н. О локальном вычете и форме пересечений в исчезающих когомологиях // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1985. Т. 49. № 1. С. 32–54.
- [117] Виро О. Я. Плоские вещественные алгебраические кривые: построения с контролируемой топологией // Алгебра и анализ. 1989. Т. 1. № 5. С. 1–73.
- [118] Виро О. Я. Построение M -поверхностей // Функц. анализ и его прил. 1979. Т. 13. № 3. С. 71–72.
- [119] Виро О. Я. Успехи в топологии вещественных алгебраических многообразий за последние шесть лет // УМН. 1986. Т. 41. № 3. С. 45–67.
- [120] Viro O. Ya. Complex orientations of real algebraic surfaces // Adv. Soviet Math. 1994. V. 18. P. 261–284.
- [121] Wall C. T. C. Quadratic form in finite groups and related topics // Topology. 1964. V. 2. P. 281–298.
- [122] Wallace A. Linear sections of algebraic varieties // Indiana Univ. Math. J. 1971. V. 20. P. 1153–1162.
- [123] Wang Sh. A vanishing theorem for Seiberg–Witten invariants // Math. Res. Lett. 1995. V. 2. № 3. P. 305–310.
- [124] Welschinger J.-Y. Orientations complexes des J -courbes réelles // Prépublications de l'Univ. Louis Pasteur, Strasbourg, 1999.
- [125] Welschinger J.-Y. J -courbes réelles à nids profonds sur les surfaces réglées // Prépublications de l'Univ. Louis Pasteur, Strasbourg, 1999.
- [126] Wilson G. Hilbert's sixteenth problem // Topology. 1978. V. 17. P. 53–73.
- [127] Zeuthen H. G. Etudes des propriétés de situation des surfaces cubiques // Math. Ann. 1875. V. 8. P. 1–30.
- [128] Звонилов В. И. Неравенства Харламова и неравенства Петровского–Олейник // Функц. анализ и его прил. 1975. Т. 9. № 2. С. 69–70.
- [129] Звонилов В. И. Комплексные топологические характеристики вещественных алгебраических кривых на поверхности // Функц. анализ и его прил. 1982. Т. 16. № 3. С. 56–57.
- [130] Звонилов В. И. Комплексные топологические инварианты вещественных алгебраических кривых на гиперboloиде и эллипсоиде // Алгебра и анализ. 1991. Т. 3. № 5. С. 88–108.
- [131] Zvonilov V. I. Stratified spaces of real algebraic curves of bidegree $(m, 1)$ and $(m, 2)$ on a hyperboloid // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. 1996. V. 173. P. 253–264.

Bilkent University, Ankara, Turkey;
 Institut de Recherche Mathématique Avancée
 Université Louis Pasteur et CNRS
 7 rue René-Descartes
 67084, Strasbourg, France
E-mail: degt@fen.bilkent.edu.edu, kharlam@math.u-strasbg.fr

Поступила в редакцию
 09.12.1999