Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. А. Айгунов, Об ограниченности ортонормированных собственных функций одного класса нелинейных операторов типа Штурма–Лиувилля с весовой функцией неограниченной вариации на конечном отрезке, *УМН*, 2000, том 55, выпуск 4, 213–214

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm316>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 10:09:30

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ
 СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА
 ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ ОРТОНОРМИРОВАННЫХ СОБСТВЕННЫХ
 ФУНКЦИЙ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ
 ТИПА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С ВЕСОВОЙ ФУНКЦИЕЙ
 НЕОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ НА КОНЕЧНОМ ОТРЕЗКЕ

Г. А. Айгунов

Пусть $0 < m \leq M$ – фиксированные числа. Обозначим через $C_{[0,1]}^+$ множество всех непрерывных на сегменте $[0, 1]$ функций $\rho(x)$, удовлетворяющих условию $0 < m \leq \rho(x) \leq M < \infty$.

Пусть $\rho(x) \in C_{[0,1]}^+$. Рассмотрим нелинейную спектральную задачу

$$(1) \quad \begin{aligned} -(y'(x))'_p &= \lambda \rho(x)(y(x))_p, & 0 < x < 1, \\ y(0) = y(1) &= 0, & \int_0^1 \rho(x)y^2(x) dx = 1, \end{aligned}$$

где $p > 1$ и $(z)_p \equiv |z|^{p-1} \operatorname{sgn} z = |z|^{p-2} \cdot z$.

Известно [1], что спектр задачи (1) дискретен и состоит из простых положительных собственных чисел λ_n ($n = 1, 2, \dots$). Обозначим через $y_n(x)$ собственную функцию, соответствующую собственному числу λ_n . Условимся говорить, что набор собственных функций $y_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) ассоциирован с весовой функцией $\rho(x)$ спектральной задачи (1).

В классических работах Штурма, Лиувилля и Стеклова в предположении некоторой гладкости весовой функции $\rho(x)$ в линейном случае (при $p = 2$) было доказано, что

$$(2) \quad \sup_n \max_{0 \leq x \leq 1} |y_n(x)| \leq C_0 < \infty, \quad C_0 > 0.$$

В работах [2], [3] автором данной заметки были указаны некоторые классы весовых функций неограниченной вариации, для которых в линейном случае справедлива оценка (2).

Цель настоящей работы – указать при любом $p > 1$ класс весовых функции неограниченной вариации таких, что для собственных функций спектральной задачи (1), ассоциированных с этим классом весовых функций, имеет место оценка (2).

Возьмем монотонно убывающую последовательность чисел $\{M_i\}$, удовлетворяющую условиям $M_1 = M$, $\lim_{i \rightarrow \infty} M_i = m$, $\sum_{i=1}^{\infty} (M_i - m) = \infty$, числа q и δ такие, что $0 < q < 1$ и $\delta = (1 - q)/4$, и определим последовательности чисел $\{a_i\}$, $\{x_i\}$, $\{b_i\}$, $\{\bar{x}_i\}$ и $\{\bar{b}_i\}$ условиями:

$$\begin{aligned} a_i &= \left(\frac{\delta q^{i-1}}{m^{-1/p} - M_i^{-1/p}} \right)^p, \quad x_{2i} = 4\delta \sum_{j=1}^i q^j, \quad x_{2i-1} = x_{2i} - 2\delta q^i, \\ \bar{x}_i &= x_i - \delta q^{\lceil \frac{i-1}{2} \rceil}, \quad b_i = \frac{\bar{x}_{2i} - x_{2i}(m/M_i)^{1/p}}{1 - (m/M_i)^{1/p}}, \quad \bar{b}_i = \frac{x_{2i-1} - \bar{x}_{2i-1}(m/M_i)^{1/p}}{1 - (m/M_i)^{1/p}}. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь функцию

$$(3) \quad \rho(x) = \begin{cases} m, & \text{если } x \in \bigcup_{i=0}^{\infty} [x_{2i}, \bar{x}_{2i+1}), \\ M_i, & \text{если } x \in [x_{2i-1}, \bar{x}_{2i}) \ (i = 1, 2, \dots), \\ a_i(\bar{b}_i - x)^{-p}, & \text{если } x \in [\bar{x}_{2i-1}, x_{2i-1}) \ (i = 1, 2, \dots), \\ a_i(x_i - b_i)^{-p}, & \text{если } x \in [\bar{x}_{2i}, x_{2i}) \ (i = 1, 2, \dots), \\ m, & \text{если } x = 1. \end{cases}$$

Непосредственной проверкой можно показать, что данная функция непрерывна, а из условия $\sum_{i=1}^{\infty} (M_i - m) = \infty$ следует, что эта функция имеет неограниченную вариацию.

Заметим, что функция $\rho(x)$ однозначно определяется заданием последовательности $\{M_i\}$ и числа q и поэтому можно писать $\rho(x) \equiv \rho(x, q, \{M_i\})$.

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА. *Существует число q и последовательность $\{M_i\}$ такие, что для совокупности собственных функций задачи (1), ассоциированных с весовой функцией $\rho(x) \equiv \rho(x, q, \{M_i\})$, определяемой формулой (3), справедлива оценка (2).*

Доказательство теоремы основывается на следующих леммах.

ЛЕММА 1. *Существует константа $\tau > 0$ такая, что для любого решения $y(x)$ уравнения $-\frac{d}{dx}(y'(x))_p = \lambda \frac{a}{(b-x)^p} (y(x))_p \ (x < b)$ и двух его последовательных нулей z' и z'' имеет место равенство: $|y'(z'')|/|y'(z')| = \tau$.*

ЛЕММА 2. *Пусть*

$$\rho(x) = \begin{cases} a(b-x_0)^{-p}, & x \leq x_0, \\ a(b-x)^{-p}, & x_0 < x < x_1, \\ a(b-x_1)^{-p}, & x \geq x_1, \end{cases}$$

где $x_0 < x_1 < b$, $y(x)$ – произвольное решение уравнения (1) ($x < b$), а z' , z'' два каких-либо последовательных нуля $y(x)$. Тогда $1 \leq |y'(z'')|/|y'(z')| \leq \tau$.

ЛЕММА 3. *Существует натуральное число k_0 и вещественная константа A такие, что $\tau < 1 + A(a\lambda)^{-1/p}$, если на промежутке $[b - (a/m)^{1/p}, b - (a/M)^{1/p}]$ какое-либо решение уравнения $-\frac{d}{dx}(y'(x))_p = \lambda \frac{a}{(b-x)^p} (y(x))_p$ имеет не менее чем k_0 нулей.*

ЛЕММА 4. *Пусть x_{i_0} – минимальный из номеров i таких, что на интервале $(\bar{x}_i, x_i)$ меньше k_0 нулей собственной функции $y_k(x)$ задачи (1). Существует константа C_0 , не зависящая от k , такая, что на промежутке $[x_{i_0}, 1]$ не более чем $C_0 k_0$ нулей $y_k(x)$.*

ЛЕММА 5. *Для любой собственной функции $y_k(x)$ задачи (1), ассоциированной с весовой функцией $\rho(x)$, и любых двух нулей z' и z'' существует число $A > 0$, не зависящее от k , такое, что*

$$A^{-1} \leq |y'_k(z')|/|y'_k(z'')| \leq A.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Elbert A. // Colloq. Math. Soc. János Bolyai. 1981. V. 30. P. 153–180. [2] Айгунов Г. А. // УМН. 1996. Т. 51. № 2. С. 143–144. [3] Айгунов Г. А. // Изв. Сев.-Кав. рег. Естеств. науки. 1998. № 2. С. 3–10.