Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Максимов, Об одном обобщении кольца косых полиномов Ore, *УМН*, 2000, том 55, выпуск 4, 215–216

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm317>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 09:01:46

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ КОЛЬЦА КОСЫХ ПОЛИНОМОВ ОРЕ

В. М. МАКСИМОВ

1. Напомним определение кольца косых полиномов (см. [1]–[4]).

Кольцо A называется кольцом косых полиномов (левым) над кольцом $\mathcal{K}$, $\mathcal{K} \subset A$, если существует элемент τ , $\tau \in A$, такой, что каждый элемент a , $a \in A$, можно однозначно представить в виде $a = \alpha_0 + \alpha_1\tau + \dots + \alpha_k\tau^k$, где $\alpha_i \in \mathcal{K}$, $k = k(a)$.

Определение правого кольца косых полиномов аналогично. Ясно, что однозначно определяются выражения $\tau\alpha$, $\alpha \in \mathcal{K}$, называемые коммутациями, $\tau\alpha = \alpha_0^{(1)} + \alpha_1^{(1)}\tau + \dots + \alpha_{m_1}^{(1)}\tau^{m_1}$, где $\alpha_i^{(1)} \in \mathcal{K}$, $m_1 = m_1(\alpha)$. Коммутации определяют отображения $\psi_j^{(1)}$: $\psi_j^{(1)}(\alpha) = \alpha_j^{(1)}$; $j = 0, 1, 2, \dots$, которые в силу равенств $\tau(\alpha + \beta) = \tau\alpha + \tau\beta$ будут линейными отображениями кольца $\mathcal{K}$ в себя. Операторы $\{\psi_j^{(1)}\}$ обычно называются обобщенными дифференцированиями кольца $\mathcal{K}$. Между операторами $\{\psi_j^{(1)}\}$ существуют алгебраические выражения. Для их нахождения соотношением $\tau^n\alpha = \psi_0^{(n)}(\alpha) + \psi_1^{(n)}(\alpha)\tau + \dots + \psi_{m_n}^{(n)}(\alpha)\tau^{m_n}$ определим операторы $\psi_j^{(n)}$, $n = 1, 2, \dots$, на $\mathcal{K}$, где $\alpha \in \mathcal{K}$, $m_n = m_n(\alpha)$. Тогда операторы $\psi_j^{(n)}$ можно выразить через $\psi_0^{(1)}, \psi_1^{(1)}, \dots$ (см. [2], [5]).

Если $\psi(t) = \psi_0^{(1)} + \psi_1^{(1)}t + \psi_2^{(1)}t^2 + \dots$ есть производящий ряд для операторов $\psi_m^{(1)}$ с коммутирующей переменной t , то тогда легко получить, что

$$(1) \quad \psi^n(t) = \psi_0^{(n)} + \psi_1^{(n)}t + \psi_2^{(n)}t^2 + \dots, \quad n = 1, 2, \dots$$

С другой стороны, из равенств $\tau^m(\alpha\beta) = (\tau^m\alpha)\beta$; $\alpha, \beta \in \mathcal{K}$, $m = 1, 2, \dots$, и единственности представлений $\tau^n\alpha$ имеем:

$$(2) \quad \begin{aligned} \psi_0^{(m)}(\alpha\beta) &= \psi_0^{(m)}(\alpha)\beta + \psi_1^{(m)}(\alpha)\psi_0^{(1)}(\beta) + \psi_2^{(m)}(\alpha)\psi_0^{(2)}(\beta) + \dots, \\ \psi_1^{(m)}(\alpha\beta) &= \psi_1^{(m)}(\alpha)\psi_1^{(1)}(\beta) + \psi_2^{(m)}(\alpha)\psi_1^{(2)}(\beta) + \dots, \\ \psi_2^{(m)}(\alpha\beta) &= \psi_1^{(m)}(\alpha)\psi_2^{(1)}(\beta) + \psi_2^{(m)}(\alpha)\psi_2^{(2)}(\beta) + \dots, \\ &\dots \end{aligned}$$

Операторы $\psi_j^{(m)}$ определяют матричное представление ψ кольца $\mathcal{K}$, $\psi(\alpha) = \|\psi_j^{(m)}(\alpha)\|$, $\alpha \in \mathcal{K}$. Частный случай этого представления при $\psi_0^{(1)} = 0$ был указан в [2].

2. Косые полиномы Оре [1] есть частный случай кольца косых полиномов с коммутацией

$$(3) \quad \tau\alpha = \psi(\alpha) + \varphi(\alpha)\tau \quad \forall \alpha \in \mathcal{K}.$$

В этом случае для операторов ψ и φ из (2) получим уравнения

$$(4) \quad 1) \quad \varphi(\alpha\beta) = \varphi(\alpha)\varphi(\beta), \quad 2) \quad \psi(\alpha\beta) = \psi(\alpha)\beta + \varphi(\alpha)\psi(\beta),$$

которые называются условиями Оре для операторов ψ и φ . Отображение ψ есть φ -дифференцирование кольца $\mathcal{K}$. Условие (4) является необходимым и достаточным, чтобы существовало кольцо косых полиномов Оре с коммутацией (3). Доказательство можно найти в [3].

В случае произвольного кольца косых полиномов теорема существования также основана на выполнении равенств, вытекающих из условия ассоциативности.

ТЕОРЕМА 1 (Условия существования). Пусть задано множество $\psi_0^{(m)}, \psi_1^{(m)}, \psi_2^{(m)}, \dots$; $m = 1, 2, \dots$, линейных отображений кольца $\mathcal{K}$ в себя. Тогда условия (1) и (2) являются необходимыми и достаточными, чтобы существовало кольцо косых полиномов над $\mathcal{K}$ с коммутацией

$$\tau\alpha = \psi_0^{(1)}(\alpha) + \psi_1^{(1)}(\alpha)\tau + \dots + \psi_{m_1}^{(1)}(\alpha)\tau^{m_1}, \quad m_1 = m_1(\alpha).$$

3. Отличительное и важное свойство кольца косых полиномов Оре состоит в том, что, зная коммутации $\tau\alpha$ и $\tau\beta$, легко вычислить коммутацию $\tau(\alpha\beta)$. Мы рассмотрим более широкий случай кольца косых полиномов, в которых это свойство выполняется. А именно, рассмотрим кольцо косых полиномов, в котором

$$(5) \quad \tau^i \alpha = \psi_0^{(i)}(\alpha) + \psi_1^{(i)}(\alpha)\tau + \dots + \psi_s^{(i)}(\alpha)\tau^s, \quad i = 1, \dots, s.$$

Мы будем называть коммутации вида (5) каноническими формами порядка s . Следовательно, в случае Оре имеется каноническая форма порядка 1. Кольцо с каноническими коммутациями назовем каноническими.

Пусть $\mathcal{G} = \{g_m\}$, $m = 1, 2, \dots$, есть некоторое множество образующих кольца $\mathcal{K}$. Тогда, полагая в (5) $\psi_j^{(i)}(g_m) = c_{mj}^i \in \mathcal{K}$, получим

$$(6) \quad \tau^i g_m = c_{m0}^i + c_{m1}^i \tau + \dots + c_{ms}^i \tau^s, \quad i = 1, \dots, s, \quad m = 1, 2, \dots$$

Очевидно, что по системе (6) однозначно восстанавливается система уравнений (5). С другой стороны, если элементы $\{c_{jk}^i\}$ задать произвольным образом, то кольцо, порождаемое соотношениями (6), может и не быть кольцом косых полиномов над $\mathcal{K}$. Поэтому естественно возникает вопрос: при каких соотношениях между элементами $\{c_{jk}^i\}$ для образующих $\mathcal{G}$ соотношения (6) порождают какое-нибудь кольцо косых полиномов над $\mathcal{K}$?

4. Определим на генераторах $\mathcal{G}$ отображение ψ :

$$(7) \quad \psi(g_m) = \begin{pmatrix} g_m & 0 & \dots & 0 \\ c_{m0}^1 & c_{m1}^1 & \dots & c_{ms}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m0}^s & c_{m1}^s & \dots & c_{ms}^s \end{pmatrix}.$$

Если отображение (7) может быть продолжено до гомоморфизма кольца $\mathcal{K}$, то будем говорить, что для множества $\{c_{jk}^i\}$ и образующих $\mathcal{G}$ выполнено условие корректности. Далее, если при условии $s \geq i, j, h, l \geq 1, i + j = h + l$, и любом $g_m \in \mathcal{G}$ выполнены равенства $\tau^i(\tau^j g_m) = \tau^h(\tau^l g_m)$, вычисленные из соотношений (6) при условии, что степени τ считаются линейно независимыми слева над $\mathcal{K}$, то мы будем говорить, что между множеством $\{c_{jk}^i\} \subset \mathcal{K}$ и множеством образующих $\mathcal{G}$ выполнено условие согласованности.

ТЕОРЕМА 2. Для того чтобы соотношения (6) порождали каноническое кольцо косых полиномов, необходимо и достаточно:

1. выполнения условия корректности для множеств $\{c_{jk}^i\}$ и $\mathcal{G}$;
2. выполнения условия согласованности между множествами $\{c_{jk}^i\}$ и $\mathcal{G}$;
3. для $i, j \geq 1, i + j \leq s$, и любого $g_m \in \mathcal{G}$ должны иметь место равенства $\tau^i(\tau^j g_m) = \tau^{i+j} g_m$, где каждая коммутация вычисляется с помощью уравнений (6).

Наиболее эффективные следствия теоремы 2 получаются, когда кольцо $\mathcal{K} = \mathcal{F}[x]$ есть кольцо обычных полиномов над полем $\mathcal{F}$. В этом случае условия корректности выполняются автоматически.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ore O. // Ann. of Math. (2). 1933. V. 34. P. 480–508. [2] Smits T. H. M. // Indag. Math. 1968. V. 30. P. 209–224. [3] Кон П. Свободные кольца и их связи. М.: Мир, 1975. [4] Артамонов В. А. // УМН. 1998. Т. 53. №4. С. 3–76. [5] Brungs H. H., Torner G. // J. Algebra. 1984. V. 87. P. 368–379.