Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. И. Мохов, Согласованные и почти согласованные метрики, *УМН*, 2000, том 55, выпуск 4, 217–218

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm318>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 12:59:17

СОГЛАСОВАННЫЕ И ПОЧТИ СОГЛАСОВАННЫЕ МЕТРИКИ

О.И. Мохов

В заметке вводятся понятия согласованных и почти согласованных псевдоримановых метрик, обобщающие понятие плоского пучка метрик [1] (см. также [2]–[4]). Согласованные метрики порождают согласованные пуассоновы структуры гидродинамического типа (эти структуры являются локальными для плоских метрик [5] и нелокальными, если метрики – неплоские [6]–[8], [3]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Две псевдоримановы контравариантные метрики $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ называются *согласованными*, если для любой линейной комбинации этих метрик

$$(1) \quad g^{ij}(u) = \lambda_1 g_1^{ij}(u) + \lambda_2 g_2^{ij}(u),$$

где λ_1 и λ_2 – произвольные константы, для которых $\det(g^{ij}(u)) \neq 0$, коэффициенты соответствующих связностей Леви-Чивита и компоненты соответствующих тензоров римановой кривизны связаны тем же самым линейным соотношением:

$$(2) \quad \Gamma_k^{ij}(u) = \lambda_1 \Gamma_{1,k}^{ij}(u) + \lambda_2 \Gamma_{2,k}^{ij}(u),$$

$$(3) \quad R_{kl}^{ij}(u) = \lambda_1 R_{1,kl}^{ij}(u) + \lambda_2 R_{2,kl}^{ij}(u).$$

Мы также будем говорить в этом случае, что метрики $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ образуют пучок метрик.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Две псевдоримановы контравариантные метрики $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ называются *почти согласованными*, если для любой линейной комбинации таких метрик (1) выполняется условие (2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Две псевдоримановы метрики $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ называются *неособой парой метрик*, если собственные значения этой пары метрик, то есть корни уравнения

$$(4) \quad \det(g_1^{ij}(u) - \lambda g_2^{ij}(u)) = 0,$$

различны.

В случае, когда метрики $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ – плоские, то есть $R_{1,jkl}^i(u) = R_{2,jkl}^i(u) = 0$, соотношение (3) превращается в условие, что произвольная линейная комбинация плоских метрик $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ тоже всегда является плоской метрикой, и определение 1 эквивалентно известному определению плоского пучка метрик или, другими словами, согласованной пары локальных невырожденных пуассоновых структур гидродинамического типа [1] (см. также [2]–[4]).

В 1995 году в [3] Ферапонтов предложил подход к задаче о плоских пучках метрик, мотивированный теорией операторов рекурсии, и сформулировал критерий согласованности локальных невырожденных пуассоновых структур гидродинамического типа: тензор Нейенхейса аффинора, задаваемого метриками, тождественно равен нулю. К сожалению, в общем случае этот критерий неверен. Из обнуления соответствующего тензора Нейенхейса, вообще говоря, не следует согласованность плоских метрик. Мы приведем далее соответствующие контрпримеры. В общем случае, как будет показано ниже, равенство нулю соответствующего тензора Нейенхейса является в действительности критерием почти согласованности плоских метрик, что не гарантирует согласованность соответствующих локальных пуассоновых структур гидродинамического типа. Критерий, сформулированный Ферапонтовым в [3], верен для любой неособой пары плоских метрик, и, более того, он допускает существенное обобщение на случай любой неособой пары псевдоримановых метрик, в частности, на особенно важные в теории систем гидродинамического типа случаи метрик постоянной римановой кривизны или метрик, порождающих общие нелокальные пуассоновы структуры гидродинамического типа.

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда Александра фон Гумбольдта (Германия), а также РФФИ (гранты №№ 99-01-00010 и 96-15-96027) и INTAS (грант № 96-0770).

ТЕОРЕМА 1. Если для произвольной линейной комбинации (1) двух метрик $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ выполняется условие (2), то тензор Нейенхейса аффинора $v_j^i(u) = g_1^{is}(u)g_{2,sj}(u)$ тождественно равен нулю. Если пара метрик $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ является неособой, то из обнуления тензора Нейенхейса аффинора $v_j^i(u) = g_1^{is}(u)g_{2,sj}(u)$ следует согласованность метрик $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$.

Введем тензор

$$(5) \quad M^{ijk}(u) = g_1^{is}(u)\Gamma_{2,s}^{jk}(u) - g_2^{js}(u)\Gamma_{1,s}^{ik}(u) - g_1^{js}(u)\Gamma_{2,s}^{ik}(u) + g_2^{is}(u)\Gamma_{1,s}^{jk}(u).$$

ЛЕММА 1. Тензор $M^{ijk}(u)$ тождественно равен нулю тогда и только тогда, когда метрики $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ являются почти согласованными.

Введем аффинор $v_j^i(u) = g_1^{is}(u)g_{2,sj}(u)$ и рассмотрим тензор Нейенхейса этого аффинора

$$(6) \quad N_{ij}^k(u) = v_i^s(u)\frac{\partial v_j^k}{\partial u^s} - v_j^s(u)\frac{\partial v_i^k}{\partial u^s} + v_s^k(u)\frac{\partial v_i^s}{\partial u^j} - v_s^k(u)\frac{\partial v_j^s}{\partial u^i},$$

следуя [3], где аналогично рассматривался аффинор $v_j^i(u)$ и его тензор Нейенхейса для двух плоских метрик.

ТЕОРЕМА 2. Метрики $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ являются почти согласованными тогда и только тогда, когда соответствующий тензор Нейенхейса $N_{ij}^k(u)$ (6) тождественно равен нулю.

ЛЕММА 2. Всегда имеют место следующие тождества:

$$(7) \quad g_{1,sp}(u)N_{rq}^p(u)g_2^{rj}(u)g_2^{qi}(u)g_2^{sk}(u) = M^{kij}(u) + M^{jki}(u) + M^{jik}(u),$$

$$(8) \quad 2M^{kij}(u) = g_{1,sp}(u)N_{rq}^p(u)g_2^{rj}(u)g_2^{qi}(u)g_2^{sk}(u) - g_{1,sp}(u)N_{rq}^p(u)g_2^{rj}(u)g_2^{sk}(u)g_2^{si}(u).$$

ТЕОРЕМА 3. Произвольная неособая пара метрик является согласованной тогда и только тогда, когда существуют локальные координаты $u = (u^1, \dots, u^N)$, такие что $g_2^{ij}(u) = g^i(u)\delta^{ij}$ и $g_1^{ij}(u) = f^i(u^i)g^i(u)\delta^{ij}$, где $f^i(u^i)$, $i = 1, \dots, N$, — произвольные функции одной переменной.

Плоские метрики $g^{ij}(u) = \exp(u^1 u^2)\delta^{ij}$, $1 \leq i, j \leq 2$, и $g_2^{ij}(u) = \delta^{ij}$, $1 \leq i, j \leq 2$, являются почти согласованными, тензор Нейенхейса (6) для них тождественно равен нулю. При этом согласованными эти метрики не являются, и их сумма не является плоской метрикой.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Любая непостоянная вещественная гармоническая функция $a(u)$ определяет пару почти согласованных плоских метрик $g^{ij}(u) = \exp(a(u))\delta^{ij}$, $1 \leq i, j \leq 2$, и $g_2^{ij}(u) = \delta^{ij}$, $1 \leq i, j \leq 2$, которые не являются согласованными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Dubrovin B. // Lecture Notes in Math. 1996. V. 1620. P. 120–348; hep-th/9407018.
 [2] Dubrovin B. // Preprint SISSA 25/98/FM; math.DG/9803106. [3] Ferapontov E. V. // Topics in topology and mathematical physics / ed. S. P. Novikov. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1995. P. 33–58. [4] Мохов О. И. // Труды МИАН. 1999. Т. 225. С. 284–300. [5] Дубровин Б. А., Новиков С. П. // Докл. АН СССР. 1983. Т. 270. № 4. С. 781–785. [6] Мохов О. И., Ферапонтов Е. В. // УМН. 1990. Т. 45. № 3. С. 191–192. [7] Ферапонтов Е. В. // Функции, анализ и его прилож. 1991. Т. 25. № 3. С. 37–49. [8] Mokhov O. I. // Phys. Lett. A. 1992. V. 166. № 3, 4. P. 215–216.

Центр нелинейных исследований
 при Институте теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН,
 Department of Mathematics, University of Paderborn, Germany
 E-mail: mokhov@genesis.mi.ras.ru, mokhov@landau.ac.ru; mokhov@uni-paderborn.de

Принято редколлегией
 11.05.2000