Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Давыдов, Х. Басто-Гонсалвеш, Управляемость неравенств в 2-особых точках, *УМН*, 2000, том 55, выпуск 6, 121–122

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm319>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 13:10:50

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

УПРАВЛЯЕМОСТЬ НЕРАВЕНСТВ В 2-ОСОБЫХ ТОЧКАХ

А. А. ДАВЫДОВ, Х. БАСТО-ГОНСАЛВЕШ

Динамическое неравенство задается гладкой функцией F на пространстве скоростей в $\mathbb{R}^n$, v – допустимая скорость в точке x , если $F(x, v) \leq 0$. Множество $I(x)$ допустимых скоростей в точке x называется *индикатрисой скоростей* этой точки. Здесь изучается случай локально ограниченных индикатрис. *Типичное* неравенство – точка некоторого открытого всюду плотно множества в пространстве соответствующих функций F в тонкой C^∞ -топологии.

Для неравенства F *допустимое движение на интервале времени* есть кусочно-дифференцируемое отображение x этого интервала в фазовое пространство такое, что неравенство $F(x(t), \dot{x}(t)) \leq 0$ выполнено всюду на этом интервале. Точка A *достижима из точки B за время T* , если существует допустимое движение x такое, что $x(0) = A$ и $x(T) = B$. Точка A имеет *свойство локальной транзитивности за малое время* (=SLTP), если для любой ее окрестности V и любого времени $T > 0$ существует окрестность V_1 этой точки такая, что любые две точки из окрестности V_1 достижимы одна из другой за время T без выхода из окрестности V . Точка A обладает *свойством локальной транзитивности* (=LTP), если такая достижимость есть лишь для некоторого $T > 0$.

Точка A границы S множества точек с SLTP называется *k-особой*, если существует проходящая через нуль опорная плоскость к индикатрисе $I(A)$, имеющая ровно k общих точек с этой индикатрисой и лежащая в касательном множестве к S в этой точке; $k \in \mathbb{N}$. При $n \geq 2$ типичное неравенство имеет *k-особые* точки лишь с $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, и вблизи каждой из них S есть гладко вложенная гиперповерхность в $\mathbb{R}^n$ (=разделяющая поверхность; см. [1] при $k = 1, n$). При $n = 2$ локальная управляемость типичных неравенств полностью изучена в [2].

ТЕОРЕМА 1. *При $n > 2$ типичное неравенство имеет SLTP в любой k-особой точке при $n \geq k \geq 3$ и не имеет его в любой своей 1-особой точке.*

Здесь наличие SLTP доказывается с помощью оценки “снизу” неравенства управляемой системой с наилучшими свойствами управляемости, но с SLTP в изучаемой точке, а отсутствие SLTP – с помощью оценки сверху неравенством с нехудшими свойствами управляемости, но без SLTP в этой точке. Итак, 2-особая точка – граничный случай наличия SLTP. Для типичного неравенства вблизи такой точки P на разделяющей поверхности S нулевая скорость – внутренняя точка “цилиндрической” части границы выпуклой оболочки $I(P)$, заполненной отрезками; структура

границы выпуклой оболочки типичной замкнутой поверхности описана в [3]. Такие отрезки, содержащие нулевую скорость, определяют на S вблизи точки P гладкое поле отрезков. Оно у типичного неравенства продолжается до гладкого поля L в окрестности этой точки со значениями – направлениями отрезков из “цилиндрических” частей границ выпуклых оболочек индикатрис.

ТЕОРЕМА 2. *Границы выпуклых оболочек индикатрис скоростей типичного неравенства задаются вблизи нулевой скорости в 2-особой точке P равенством (возможно, после обращения и локальных C^∞ -растяжений времени)*

$$(1) \quad \dot{z} = z - x^2 + Y[A(x, y, z) \pm (E + \Lambda \dot{x})^{-1} Y^*] + \dots,$$

где $Y = \dot{y} - (z - x^2)\eta(x, y, z)$, “*” – знак транспонирования, E – единичная матрица, η, A – гладкие матричные функции, $\eta(P) = 0$, $A(P) = 0$, Λ – диагональная матрица такая, что матрица $E + \Lambda \dot{x}$ положительно определена для всех $\dot{x}$ из пересечения $l(P)$ прямой $L(P)$ с выпуклой оболочкой индикатрисы $I(P)$, в подходящей гладкой системе координат x, y ($\dim y = n - 2$), z с началом в точке P . При этом многоточие означает члены по крайней мере второго порядка по Y и третьего по Y и x, y, z , а поле L и разделяющая поверхность имеют форму $\mathbb{R} \frac{\partial}{\partial x}$ и $z = x^2$ соответственно.

Теорема 2 доказывается на основе того факта, что изучаемая часть границы выпуклой оболочки заполнена отрезками.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Типичное динамическое неравенство имеет SLTP в его 2-особой точке P , если в этой точке интегральная кривая поля L касается разделяющей поверхности изнутри множества точек, имеющих SLTP (=когда в равенстве (1) стоит знак “+”).*

ТЕОРЕМА 3. *Если в 2-особой точке P типичного неравенства в соответствующем равенстве (1) стоит знак “–”, то эта точка имеет SLTP, если $A_x(P)^* A_x(P) > 4$, и не имеет LTP, если существует симметричная положительно определенная матрица D размера $(n - 2) \times (n - 2)$ такая, что матрица*

$$\begin{pmatrix} 4 - A_x^* C A_x & -A_x^* C (A_y + D) \\ -(A_x^* C (A_y^* + D))^* & 2D - (D + A_y^*) C (D + A_y) \end{pmatrix} (P),$$

где $C = E + \Lambda \dot{x}$, положительно определена для $\dot{x}$ на концах сегмента $l(P)$. При этом вблизи этой точки поверхность $2z = -yDy^*$ является полупроницаемой для допустимых движений этого неравенства.

Первое утверждение этой теоремы доказывается с помощью подходящего выбора аффинной подсистемы из равенства (1) и использования известных результатов об управляемости систем; второе – прямой проверкой свойства полупроницаемости поверхности $2z = -yDy^*$.

СЛЕДСТВИЕ 2. *При $n = 3$ достаточные условия отсутствия LTP в теореме 3 равносильны выполнению в точке P двух неравенств: $(1 + \lambda)A_x^2 < 4$ и $(1 + \lambda)(8A_y + A_x^2) < 4$, где $\lambda = \max\{\dot{x}\Lambda, \dot{x} \in l(P)\}$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Davydov A. A., Basto-Gonçalves J. // Chapman & Hall/CRC Res. Notes Math. 2000. V. 412. P. 223–235. [2] Давыдов А. А. // Труды МИАН. 1995. Т. 209. С. 84–123. [3] Закалюкин В. М. // Функц. анализ и его прил. 1977. Т. 11. № 3. С. 76–77.

E-mail: davydov-m2@vpti.vladimir.su

Принято редколлегией
03.10.2000