Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. И. Бунина, Элементарная эквивалентность унитарных линейных групп над кольцами и телами, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 2, 137–138

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm32>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 08:01:14

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ УНИТАРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ГРУПП НАД КОЛЬЦАМИ И ТЕЛАМИ

Е. И. Бунина

Введение. В [5] А. И. Мальцев доказал следующую теорему: две линейные группы $GL_m(K)$ и $GL_n(L)$, где K и L — поля и $m, n \geq 3$, элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда $m = n$ и поля K и L элементарно эквивалентны. Прогресс в теории моделей позволил К. И. Бейдару и А. В. Михалеву предложить в [3] общий способ решения проблем такого типа. Они доказали подобные теоремы для групп над первичными ассоциативными кольцами, содержащими 1 и $1/2$, и над телами.

В [6] была доказана теорема, подобная теореме Мальцева, но для унитарных линейных групп над полями с инволюцией. Доказательство было построено “элементарными” методами, аналогично доказательству Мальцева. В данной работе получены теоремы для унитарных групп над ассоциативными кольцами с инволюцией, содержащими 1 и $1/2$, а также над телами. Они доказаны с помощью теорем [3] К. И. Бейдара и А. В. Михалева, а также И. З. Голубчика и А. В. Михалева [1].

1. Формулировки основных теорем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Если K — кольцо с инволюцией j , то будем обозначать через τ инволюцию кольца матриц над K ($M_{2n}(K)$) вида $\tau: A \mapsto Q_{2n} \circ (A^j)^T \circ Q_{2n}^{-1}$, где Q_{2n} — форма максимального ранга, приведенная к каноническому виду.

ТЕОРЕМА 1. Если K_1 и K_2 — ассоциативные (коммутативные) кольца, содержащие $1/2$ и $1/3$, j_1 и j_2 — инволюции в кольцах K_1 и K_2 соответственно, $n, m > 2$ ($n, m > 1$), Q_{2n} и Q_{2m} — формы максимального ранга, то унитарные линейные группы $U_{2n}(K_1, j_1, Q_{2n})$ и $U_{2m}(K_2, j_2, Q_{2m})$ элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда $m = n$ и $M_{2n}(K_1)$ и $M_{2m}(K_2)$ элементарно эквивалентны как кольца с инволюциями τ_1 и τ_2 соответственно.

ТЕОРЕМА 2. Если тела (поля) F_1 и F_2 имеют характеристику, большую 2, j_1 и j_2 — инволюции в телах F_1 и F_2 соответственно, $n, m > 2$ ($n, m > 1$), Q_{2n} и Q_{2m} — формы максимального ранга, то унитарные линейные группы $U_{2n}(F_1, j_1, Q_{2n})$ и $U_{2m}(F_2, j_2, Q_{2m})$ элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда тела (поля) F_1 и F_2 элементарно эквивалентны как тела (поля) с инволюциями j_1 и j_2 соответственно.

2. Основные леммы.

ЛЕММА 1. Если кольца K и S ассоциативны, содержат $1/2$ и центры колец содержат элементы α и β соответственно, такие, что $\alpha \cdot \alpha^j = 1$ и $\beta \cdot \beta^{j'} = 1$ обратимы, $n \geq 3$, и $U_{2n}(K, j, Q_{2n})$ изоморфна $U_{2m}(S, j', Q_{2m})$, то кольцо $M_{2n}(K)$ изоморфно кольцу $M_{2m}(S)$ и существует такой изоморфизм A колец $M_{2n}(K)$ и $M_{2m}(S)$, что на $E_f(R, \tau)$ он совпадает с изоморфизмом групп $U_{2n}(K, j, Q_{2n})$ и $U_{2m}(S, j', Q_{2m})$.

Аналогичную лемму можно сформулировать, если кольца K и S коммутативны и $n \geq 2$:

ЛЕММА 2. Если кольца K и S ассоциативны и коммутативны, содержат $1/2$ и элементы α и β соответственно такие, что $\alpha \cdot \alpha^j = 1$ и $\beta \cdot \beta^{j'} = 1$ обратимы, $n \geq 2$, и $U_{2n}(K, j, Q_{2n})$ изоморфна $U_{2m}(S, j', Q_{2m})$, то кольцо $M_{2n}(K)$ изоморфно кольцу $M_{2m}(S)$ и существует такой изоморфизм A колец $M_{2n}(K)$ и $M_{2m}(S)$, что на $E_f(R, \tau)$ он совпадает с изоморфизмом групп $U_{2n}(K, j, Q_{2n})$ и $U_{2m}(S, j', Q_{2m})$.

ЛЕММА 3. Изоморфизм колец $M_{2n}(K)$ и $M_{2m}(S)$ из лемм 1 и 2 сохраняет инволюцию τ , т. е. диаграмма

$$\begin{array}{ccc} M_{2n}(K) & \xrightarrow{A} & M_{2m}(S) \\ \downarrow \tau_1 & & \downarrow \tau_2 \\ M_{2n}(K) & \xrightarrow{A} & M_{2m}(S) \end{array}$$

коммутативна.

ЛЕММА 4. Пусть F_1 и F_2 – тела характеристики, большей 2, с инволюциями j_1 и j_2 соответственно; $M_{2n}(F_1, \tau_1)$ и $M_{2n}(F_2, \tau_2)$ – кольца матриц размера $n \times n$ над F_1 и F_2 с инволюциями τ_1 и τ_2 соответственно, получающимися из инволюций j_1 и j_2 следующим образом:

$$(a_{ij})^{\tau_1} = Q_{2n}(a_{ji}^{j_1})Q_{2n}^{-1}; \quad (a_{ij})^{\tau_2} = Q_{2n}(a_{ji}^{j_2})Q_{2n}^{-1}.$$

Пусть, кроме того, существует изоморфизм A между $M_{2n}(F_1, \tau_1)$ и $M_{2n}(F_2, \tau_2)$, коммутирующий с инволюцией, т.е. такой, что $\forall f \in M_{2n}(F_1, \tau_1) \quad A(f^{\tau_1}) = A(f)^{\tau_2}$.

Тогда существует изоморфизм B тел F_1 и F_2 такой, что $\forall a \in F_1 \quad B(a^{j_1}) = B(a)^{j_2}$.

3. Доказательство основных теорем. В [3] была доказана следующая теорема. Пусть U, V и W – абстрактные классы алгебраических систем сигнатур Ω_U, Ω_V и Ω_W соответственно, замкнутые относительно взятия ультрастепеней, $F = \{F_i \mid i = 1, 2, \dots\}$ и $G = \{G_{ij} \mid i, j = 1, 2, \dots\}$ – регулярные семейства отображений из U в V и в W соответственно. Пусть существует натуральное m такое, что для любых алгебраических систем $R, S \in U$ и любых целых $p, q > m$ соотношение $F_p(R) \cong F_q(S)$ эквивалентно существованию таких номеров $r, s \geq 1$, что $G_{rp}(R) \cong G_{sq}(S)$. Пусть теперь $R, S \in U$ и $p, q \geq m$. Тогда $F_p(R) \equiv F_q(S)$, если и только если существуют номера $r, s \geq 1$ такие, что $G_{rp}(R) \equiv G_{sq}(S)$. Теперь мы можем доказать теоремы, сформулированные в п. 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть U – это класс ассоциативных колец, содержащих $1/2$ и $1/3$, с инволюциями, V – класс групп, $W = U$, $F = \{U_6(\cdot), U_8(\cdot), \dots\}$, $G = \{(M_6(\cdot), \tau(\cdot)); (M_8(\cdot), \tau(\cdot)); \dots\}$ – семейства отображений из U в V и W соответственно. Очевидно, что оба семейства содержат регулярные отображения и классы U, V, W замкнуты относительно ультрастепеней. По ранее доказанному $U_{2n}(K_1, j_1) \cong U_{2m}(K_2, j_2)$ ($n, m > 2$) тогда и только тогда, когда $(M_{2n}(K_1), \tau_1) \cong (M_{2m}(K_2), \tau_2)$ как кольца с инволюциями. Отсюда и следует утверждение теоремы для некоммутативных колец.

Утверждение теоремы для коммутативных колец доказывается совершенно аналогично, только следует рассматривать класс коммутативных колец, содержащих $1/2$ и $1/3$, и $n, m > 1$ вместо $n, m > 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть U – класс тел с инволюцией характеристики, большей 2, V – класс групп, $W = U$, $F = \{U_6(\cdot, \cdot, Q_6), U_8(\cdot, \cdot, Q_8), \dots\}$, $G = \{G\}$ – тождественное отображение из U в W . Очевидно, что семейства F и G содержат регулярные отображения из U в V и W соответственно и классы U, V и W замкнуты относительно взятия ультрастепеней. Из ранее доказанного следует, что $U_{2n}(F_1, j_1, Q_{2n}) \cong U_{2m}(F_2, j_2, Q_{2m})$ тогда и только тогда, когда $n = m$ и $(F_1, j_1) \cong (F_2, j_2)$, откуда очевидным образом следует утверждение теоремы для тел.

Утверждение теоремы для полей доказывается аналогично предыдущему, нужно лишь заменить U на класс полей с инволюцией характеристики, большей 2, и рассматривать $n, m > 1$ вместо $n, m > 2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Голубчик И. З., Михалев А. В. // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1983. Т. 132. С. 97–109.
 [2] Бэр Р. Линейная алгебра и проективная геометрия. М.: Наука, 1995. [3] Beidar C. I., Michalev A. V. // Contemp. Math. 1992. V. 131. P. 29–35. [4] Мальцев А. И. Алгебраические системы. М.: Наука, 1970. [5] Мальцев А. И. Об элементарных свойствах линейных групп // Проблемы математики и механики. Новосибирск, 1961. С. 110–132. [6] Бунина Е. И. Элементарная эквивалентность унитарных линейных групп над полями // Фундаментальная и прикладная математика, 1998 (в печати).