Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Туганбаев, Области Безу и косые многочлены, *УМН*, 2000, том 55, выпуск 5, 169–170

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm323>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 13:56:46

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

ОБЛАСТИ БЕЗУ И КОСЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ

А. А. ТУГАНБАЕВ

Все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей. Если φ – инъективный эндоморфизм кольца A , то через $A_r[x, \varphi]$ обозначается правое кольцо косых многочленов, состоящее из конечных формальных сумм $\sum x^i a_i$ от переменной x с коэффициентами $a_i \in A$, где умножение определяется с помощью правила $ax^i = x^i \varphi^i(a)$. Модуль называется *модулем Безу*, если каждый его конечно порожденный подмодуль циклический.

ТЕОРЕМА 1. Пусть φ – инъективный эндоморфизм кольца A . Равносильны условия:

- (1) $A_r[x, \varphi]$ – правая область Безу;
- (2) $A_r[x, \varphi]$ – правое кольцо Безу и A – область;
- (3) $A_r[x, \varphi]/x^2 A_r[x, \varphi]$ – правое кольцо Безу и A – область;
- (4) A – правая область Безу и $\varphi(a)A = A$ для каждого ненулевого $a \in A$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Можно проверить, что

$$(A_r[x, \varphi] \text{ – левая область Безу}) \iff (A \text{ – тело и } \varphi(A) = A).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В [1; 6.78] приведен пример такой коммутативной области Безу A , что A не является полем и имеет такой инъективный эндоморфизм φ , что $\varphi(a)A = A$ для любого ненулевого $a \in A$.

Если A – кольцо, то через $r(a)$ обозначается правый аннулятор элемента $a \in A$.

ЛЕММА 1. Пусть φ – такой инъективный эндоморфизм области A , что $\varphi(a)A = A$ для каждого ненулевого $a \in A$. Положим $R \equiv A_r[x, \varphi]$.

(1) Для любых двух таких ненулевых многочленов $f, g \in R$, что $\deg(f) < \deg(g)$, существует такой многочлен $h \in R$, что $\deg(h) < \deg(g)$ и $fR + gR = fR + hR$.

(2) Если G – ненулевой правый идеал кольца R и $m \equiv \min_{0 \neq g \in G} \deg(g)$, то G порождается многочленами степени m .

(3) Если G – конечно порожденный ненулевой правый идеал кольца R и $m \equiv \min_{0 \neq g \in G} \deg(g)$, то G порождается конечным числом многочленов степени m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Положим $m \equiv \deg(f) \geq 0$ и $\deg(g) \equiv n > m$. Тогда существуют такие ненулевые $a, b \in A$, что $f = x^m a + s$ и $g = x^n b + t$, где $\deg(s) < m$ и $\deg(t) < n$. Обратимый справа элемент $\varphi(a)$ области A обратим в A . Тогда $x^{n-m} = ax^{n-m}(\varphi^{n-m}(a))^{-1}$. Поэтому $g - t = x^n b = x^m ax^{n-m}(\varphi^{n-m}(a))^{-1}b = (f - s)x^{n-m}(\varphi^{n-m}(a))^{-1}b$. Положим $h \equiv g - fx^{n-m}(\varphi^{n-m}(a))^{-1}b = t - sx^{n-m}(\varphi^{n-m}(a))^{-1}b \in fR + gR$. Тогда $\deg(h) < n$ и $g = fx^{n-m}(\varphi^{n-m}(a))^{-1}b + h \in fR + hR$. Поэтому $fR + gR \subseteq fR + hR \subseteq fR + gR$.

(2) Пусть F – ненулевой правый идеал кольца R , порожденный всеми многочленами степени m , лежащими в G . Допустим, что $F \neq G$. Тогда существует такое целое $n > m$, что все многочлены из G степени $< n$ лежат в F и $\deg(g) = n$ для некоторого многочлена $g \in G \setminus F$. В правом идеале F возьмем произвольный ненулевой многочлен f степени m . По (1) существует такой многочлен $h \in R$, что $\deg(h) < n$ и $fR + gR = fR + hR$. Так как $h \in G$ и $\deg(h) < n$, то $h \in F$. Поэтому $g \in fR + hR \subseteq F$. Получено противоречие.

(3) следует из (2) и того, что из каждой системы образующих конечно порожденного правого идеала можно выбрать конечную систему образующих.

ЛЕММА 2. Пусть φ – инъективный эндоморфизм кольца A , $R \equiv A_r[x, \varphi]$, причем R/x^2R – правое кольцо Безу.

(1) Для каждого $a \in A$ существуют такие $f_0, g_0, u_0, v_0, b, c \in A$, что верны следующие равенства: (i) $a = af_0u_0$; (ii) $af_0v_0 = 0$; (iii) $1 = \varphi(a)b + g_0v_0$; (iv) $\varphi(a)c = g_0u_0$.

(2) Пусть в кольце A все правые аннуляторы являются идеалами. Тогда для любого $a \in A$ существует такой элемент $b \in A$, что $a = a\varphi(a)b$. В частности, если $r(a) = 0$, то $\varphi(a)A = A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Пусть $h: R \rightarrow R/x^2R$ – естественный эпиморфизм. Так как $h(R)$ – правое кольцо Безу, то $h(aR + xR)$ – главный правый идеал в $h(R)$. Поэтому существуют такие $f, g \in R$, что $h(aR + xR) = h((af + xg)R)$. Тогда существуют такие $u, v \in R$, что $(af + xg)u - a \in x^2R$ и $(af + xg)v - x \in x^2R$. Пусть f_0, g_0, u_0 и v_0 – свободные члены многочленов f, g, u и v соответственно, f_1, u_1, v_1 – коэффициенты при x многочленов f, u, v соответственно. Так как свободные члены и коэффициенты при x многочленов $(af + xg)u - a$ и $(af + xg)v - x$ равны нулю, то получаем равенства $af_0u_0 - a = 0$; $af_0v_0 = 0$; $\varphi(a)(\varphi(f_0)u_1 + f_1u_0) + g_0u_0 = 0$; $\varphi(a)(\varphi(f_0)v_1 + f_1v_0) + g_0v_0 - 1 = 0$. Теперь можно положить $b \equiv \varphi(f_0)v_1 + f_1v_0$, $c \equiv -\varphi(f_0)u_1 - f_1u_0$.

(2) По (1) существуют такие $f_0, g_0, u_0, v_0, b \in A$, что выполняются следующие равенства: (i) $a = af_0u_0$; (ii) $af_0v_0 = 0$; (iii) $1 = \varphi(a)b + g_0v_0$. По (ii) $v_0 \in r(af_0)$. Так как $r(af_0)$ – идеал в A по условию, то $u_0g_0v_0 \in r(af_0)$. Поэтому $af_0u_0g_0v_0 = 0$. Из (i) следует, что $a(g_0v_0) = (af_0u_0)g_0v_0 = 0$. Из (iii) следует, что $a = a \cdot 1 = a\varphi(a)b + ag_0v_0$. Так как $ag_0v_0 = 0$, то $a = a\varphi(a)b$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Положим $R \equiv A_r[x, \varphi]$. Эквивалентность условий (1) и (2) проверяется непосредственно. Импликация (2) $\implies$ (3) очевидна. Импликация (3) $\implies$ (4) следует из леммы 2 (2) и изоморфизма $A \cong R/xR$.

(4) $\implies$ (2) Пусть F – конечно порожденный ненулевой правый идеал кольца R и $m \equiv \min_{0 \neq f \in F} \deg(f)$. По лемме 1 (3) существуют такие ненулевые многочлены $f_1, \dots, f_n$ степени $m \geq 0$, что $F = \sum_{i=1}^n f_i R$. Пусть a_i – ненулевые старшие коэффициенты многочленов f_i ($i = 1, \dots, n$). Так как A – правое кольцо Безу, то существуют такие элементы $b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n \in A$, что $(\sum_{i=1}^n a_i b_i) c_j = a_j$ ($j = 1, \dots, n$). Положим $g \equiv \sum_{i=1}^n f_i b_i \in F$, $h_j \equiv f_j - gc_j \in F$. Тогда $\deg(h_j) < m$. Так как $m \equiv \min_{0 \neq f \in F} \deg(f)$, то $h_j = 0$, $f_j = gc_j$ ($j = 1, \dots, n$). Поэтому $F = gR$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Tuganbaev A. A. Distributive Modules and Related Topics. Amsterdam: Gordon and Breach, 1999.

Московский энергетический институт
E-mail: askar@tuganbaev.mccme.ru

Принято редколлегией
07.09.2000