Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. К. Бабенко, Сильная интерсистолическая мягкость замкнутых многообразий,
УМН, 2000, том 55, выпуск 5, 171–172

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm324>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 14:11:18

СИЛЬНАЯ ИНТЕРСИСТОЛИЧЕСКАЯ МЯГКОСТЬ ЗАМКНУТЫХ МНОГООБРАЗИЙ

И. К. БАБЕНКО

Пусть (M, g) – риманово многообразие размерности m . Если Δ^p – стандартный p -мерный симплекс, то для каждого сингулярного липшицева p -мерного симплекса $\tau^p: \Delta^p \rightarrow M$ естественным образом определен его объем $\text{vol}_p(\tau, g)$ по отношению к индуцированной метрике, которая определена почти всюду и измерима. Поле коэффициентов $\mathbf{k}$ будет в дальнейшем либо $\mathbb{Z}$, либо $\mathbb{R}$. Для липшицевой сингулярной p -цепи

$$\alpha(p) = \sum_i r_i \tau_i^p, \quad r_i \in \mathbf{k},$$

определим ее объем, положив $\text{vol}_p(\alpha(p), g) = \sum_i |r_i| \text{vol}_p(\tau_i^p, g)$. Для каждого целочисленного класса гомологий $a \in \mathbb{H}_p(M, \mathbb{Z})$ зададим его объем равенством:

$$(1) \quad \text{vol}_p(a, g) = \inf_{\alpha(\mathbb{Z}) \in a} \text{vol}_p(\alpha(\mathbb{Z}), g),$$

где нижняя грань берется по всем целочисленным сингулярным липшицевым цепям $\alpha(\mathbb{Z})$, представляющим класс a .

Хорошо известно [1], что усреднение (1) приводит к “массе” соответствующего класса гомологий (определения и свойства массы и комассы можно найти в [2]):

$$(2) \quad \text{mass}(a, g) = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \text{vol}_p(la, g).$$

Теперь определим p -систолу по модулю кручения для риманова многообразия (M, g) , положив:

$$\text{sys}_p(M, g) = \inf_{\substack{a \in \mathbb{H}_p(M, \mathbb{Z}) \\ a \not\equiv 0 \pmod{\text{Tors}}}} \text{vol}_p(a, g).$$

Соответственно стабильную p -систолу многообразия (M, g) определим как

$$\text{sys stab}_p(M, g) = \inf_{\substack{a \in \mathbb{H}_p(M, \mathbb{Z}) \\ a \not\equiv 0 \pmod{\text{Tors}}}} \text{mass}(a, g).$$

Для любого многообразия (M, g) имеет место очевидное неравенство:

$$(3) \quad \text{sys}_p(M, g) \geq \text{sys stab}_p(M, g),$$

причем простые примеры показывают, что две эти величины могут достаточно сильно различаться.

Сравнительно давно известен ряд систолических и интерсистолических проблем, с которыми можно познакомиться по прекрасной лекции [3]. Суть этих проблем кратко можно сформулировать следующим образом: для данного замкнутого многообразия M можно ли, меняя метрику в классе метрик единичного объема, сделать p -систолу или произведение систол разных (например, дополнительных) размерностей сколь угодно большим числом?

Интенсивное развитие систолической геометрии в последнее десятилетие показывает, что для систол размерности больше единицы ответ на этот вопрос очень часто бывает положительным, см. [4]–[9].

В частности, в [6] при дополнительных топологических предположениях на многообразии M установлена его $(p, m - p)$ -систолическая мягкость. В действительности эти дополнительные условия являются излишними, и мягкость имеет место для любого замкнутого многообразия. Перейдем к точным определениям и формулировкам.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Замкнутое m -мерное многообразие M называется $(p, m-p)$ -мягким ($1 \leq p \leq m/2$), если

$$(4) \quad \inf_g \frac{\text{vol}_m(M, g)}{\text{sys}_p(M, g) \cdot \text{sys}_{m-p}(M, g)} = 0,$$

где нижняя грань берется по всем римановым метрикам g на M .

Основным результатом этой заметки является

ТЕОРЕМА. Для любого замкнутого m -мерного многообразия M и любого p ($1 \leq p < m/2$) имеет место равенство:

$$(5) \quad \inf_g \frac{\text{vol}(M, g)}{\text{sys}_p(M, g) \cdot \text{sys stab}_{m-p}(M, g)} = 0.$$

СЛЕДСТВИЕ. Любое замкнутое m -мерное многообразие M является $(p, m-p)$ -мягким для всех $1 \leq p \leq m/2$.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. Для $p < m/2$ это непосредственно вытекает из теоремы с учетом (3). При $m = 2p$ это доказано в [7].

2. Хорошо известно, что заменить sys_p на sys stab_p в (5) нельзя, см., например, [10]. Автору не известно, что будет происходить при вариации метрики с дробью (5), если $m = 2p$.

Доказательство теоремы основано на изучении систолической геометрии на симплициальных комплексах специального вида. Каждый конечный симплициальный комплекс обладает римановыми метриками, определенными и гладкими на каждой грани и с естественными условиями согласованности на пересекающихся симплексах. Кроме того, на каждом симплициальном комплексе определен комплекс внешних дифференциальных форм, впервые введенный Томом еще в пятидесятые годы.

Все это превращает симплициальные комплексы в объекты, близкие к римановым многообразиям, но в отличие от многообразий класс конечных симплициальных комплексов замкнут относительно операции приклеивания по симплициальному отображению. Подробное доказательство будет опубликовано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Federer H. // Indiana Univ. Math. J. 1974. V. 24. P. 351–407. [2] Федерер Г. Геометрическая теория меры. М.: Наука, 1987. [3] Berger M. // Astérisque. 1993. V. 216. P. 279–310. [4] Katz M. // Geom. Dedicata. 1995. V. 57. P. 195–206. [5] Berard-Bergery L., Katz M. // Geom. Funct. Anal. 1994. V. 4. P. 621–632. [6] Babenko I., Katz M. // Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4). 1998. V. 31. P. 787–809. [7] Babenko I., Katz M., Suciu A. // Math. Res. Lett. 1998. V. 5. P. 461–471. [8] Katz M., Suciu A. // Contemp. Math. 1999. V. 231. P. 113–136. [9] Katz M., Suciu A. Systolic freedom of loop space // <http://www.cs.bu.ac.il/~katzmik/publications.html>. [10] Gromov M. Metric Structures for Riemannian Spaces. Boston: Birkhäuser, 1999.

Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова

Принято редколлегией
07.09.2000