Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. В. Богачев, Е. Б. Яровая, О моментах ветвящегося случайного блуждания
в случайной среде, *УМН*, 2000, том 55, выпуск 5, 173–174

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm325>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 17:53:21

О МОМЕНТАХ ВЕТВЯЩЕГОСЯ СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДЕНИЯ В СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ

Л. В. БОГАЧЕВ, Е. Б. ЯРОВАЯ

1. В работе рассматривается ветвящееся случайное блуждание с непрерывным временем на $\mathbb{Z}^d$ ($d \geq 1$). Ветвящаяся среда (т.е. интенсивности рождения и гибели частиц в узлах решетки) является случайной и задается случайными полями $\xi_2(\cdot) \geq 0$, $\xi_0(\cdot) \geq 0$ на $\mathbb{Z}^d$, определенными на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. “Диффузия” частиц происходит по закону простого симметричного случайного блуждания с интенсивностью скачков $\kappa > 0$. Таким образом, при фиксированной реализации $\omega \in \Omega$ случайной среды эволюция ансамбля частиц описывается однородным марковским процессом с переходами следующего вида: частица, находящаяся в точке x , за время $h \rightarrow 0$ независимо от остальных частиц с вероятностью $(2d)^{-1}\kappa h$ перепрыгивает в соседнюю точку x' ($|x' - x| = 1$), с вероятностью $\xi_2(x)h$ делится на две частицы, а с вероятностью $\xi_0(x)h$ погибает. (Формальное построение такого процесса см., например, в [1; гл. V, §3].)

2. Пусть $\mu_t(y)$ – число частиц в точке $y \in \mathbb{Z}^d$ в момент времени t , $\mu_t := \sum_y \mu_t(y)$. Будем считать, что при $t = 0$ имеется единственная частица, расположенная в точке $x \in \mathbb{Z}^d$, т.е. $\mu_0 = 1$, $\mu_0(y) = \delta_x(y)$ (здесь и далее $\delta_x(y)$ – символ Кронекера). Обозначим через $\mathbb{E}_x^{(\omega)}$ математическое ожидание относительно распределения процесса в “замороженной” случайной среде. Хорошо известно (см. [2], [3]), что производящие функции $F(z; t, x, y) := \mathbb{E}_x^{(\omega)}[e^{-z\mu_t(y)}]$, $F(z; t, x) := \mathbb{E}_x^{(\omega)}[e^{-z\mu_t}]$ ($z \geq 0$) удовлетворяют обратному уравнению Колмогорова

$$(1) \quad \partial_t F = \kappa \Delta F + [\xi_2(x)F - \xi_0(x)] \cdot (F - 1)$$

с начальными условиями

$$(2) \quad F(z; 0, x, y) = e^{-z\delta_y(x)}, \quad F(z; 0, x) = e^{-z},$$

где $\partial_t := \partial/\partial t$, а Δ – разностный лапласиан, действующий на функции $\psi: \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$ по формуле $\Delta\psi(x) = (2d)^{-1} \sum_{|x'-x|=1} \psi(x') - \psi(x)$.

Рассмотрим моменты $m_n(t, x, y) := \mathbb{E}_x^{(\omega)}[\mu_t^n(y)]$, $m_n(t, x) := \mathbb{E}_x^{(\omega)}[\mu_t^n]$ ($n \in \mathbb{N}$). Дифференцируя соотношения (1), (2) по z при $z = 0$, можно показать (см. [4]–[6]), что функции $\{m_n(t, x, y)\}$, $\{m_n(t, x)\}$ удовлетворяют цепочке линейных (неоднородных) уравнений

$$(3) \quad \partial_t m_n = \kappa \Delta m_n + \xi(x)m_n + \xi_2(x)g_n[m_1, \dots, m_{n-1}], \quad n = 1, 2, \dots,$$

с начальными условиями

$$(4) \quad m_n(0, x, y) = \delta_y(x), \quad m_n(0, x) \equiv 1, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где $\xi(x) := \xi_2(x) - \xi_0(x)$, $g_1 \equiv 0$, а при $n \geq 2$

$$(5) \quad g_n[m_1, \dots, m_{n-1}] := \sum_{i=1}^{n-1} \frac{n!}{i!(n-i)!} m_i m_{n-i}.$$

3. Пусть $\xi(\cdot)$, $\eta(t, \cdot) \geq 0$, $v_0(\cdot) \geq 0$ – случайные поля на $\mathbb{Z}^d$, определенные на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Рассмотрим неоднородную задачу Коши

$$(6) \quad \partial_t v(t, x) = \kappa \Delta v(t, x) + \xi(x)v(t, x) + \eta(t, x), \quad v(0, x) = v_0(x).$$

Положим $\ln_+ x := \max\{\ln x, 1\}$ и обозначим через Φ класс функций $\varphi: \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$, удовлетворяющих условию $\limsup_{|x| \rightarrow \infty} (|x| \ln |x|)^{-1} \ln_+ \varphi(x) < 1$.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 99-01-00298) и DFG (грант № 436 RUS 113/534).

ТЕОРЕМА 1. Предположим, что случайные величины $\xi(x)$, $x \in \mathbb{Z}^d$, независимы и одинаково распределены, и пусть справедливо условие

$$(7) \quad \left\langle \left(\frac{\xi^+(0)}{\ln_+ \xi(0)} \right)^d \right\rangle < \infty,$$

где $\xi^+ := \max(\xi, 0)$. Пусть P -н.н. выполнены следующие условия: а) $v_0(\cdot) \in \Phi$; б) при каждом x функция $\eta(t, x)$ непрерывна по t ; в) $Y(t, \cdot) := \max_{0 \leq s \leq t} \eta(s, \cdot) \in \Phi$ при каждом t . Тогда с вероятностью 1 задача (6) имеет единственное неотрицательное решение

$$(8) \quad v(t, x) = E_x \left[e^{\int_0^t \xi(x_s) ds} v_0(x_t) \right] + E_x \left[\int_0^t e^{\int_0^s \xi(x_u) du} \eta(t-s, x_s) ds \right],$$

где x_t – случайное блуждание на $\mathbb{Z}^d$ с генератором $\kappa\Delta$, а E_x – соответствующее математическое ожидание при условии $x_0 = x$.

Отметим, что в частном случае $\eta \equiv 0$ представление (8) сводится к известной формуле Фейнмана–Каца для уравнения Андерсона со случайным потенциалом (см. [3; теорема 2.1]).

4. Применяя теорему 1 к задаче Коши (3), (4), получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. Предположим, что пары $(\xi_2(x), \xi_0(x))$, $x \in \mathbb{Z}^d$, независимы и одинаково распределены. Пусть выполнено условие (7) и, кроме того,

$$\left\langle \left(\frac{\ln_+ \xi_2(0)}{\ln_+ \ln_+ \xi_2(0)} \right)^d \right\rangle < \infty.$$

Тогда при каждом $n \in \mathbb{N}$ с вероятностью 1 имеют место представления

$$m_n(t, x, y) = E_x \left[e^{\int_0^t \xi(x_s) ds} \delta_y(x_t) \right] + E_x \left[\int_0^t e^{\int_0^s \xi(x_u) du} \xi_2(x_s) g_n(t-s, x_s, y) ds \right],$$

$$m_n(t, x) = E_x \left[e^{\int_0^t \xi(x_s) ds} \right] + E_x \left[\int_0^t e^{\int_0^s \xi(x_u) du} \xi_2(x_s) g_n(t-s, x_s) ds \right],$$

где $g_n = g_n[m_1, \dots, m_{n-1}]$ – функция, определенная в (5).

5. В следующей теореме для полных моментов $\langle m_n^p(t, x, y) \rangle$, $\langle m_n^p(t, x) \rangle$ находится асимптотика при $t \rightarrow \infty$ в предположении, что распределение ξ имеет вебулловский “хвост” на $+\infty$. (Аналогичный результат для случая чистого размножения ($\xi_0 \equiv 0$) получен в работах [4], [5].)

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены условия теоремы 2. Предположим, что

$$(9) \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} z^{-\alpha} \ln P\{\xi(0) > z\} = -c$$

при некоторых $\alpha > 1$, $c > 0$. Тогда при всех $n, p \in \mathbb{N}$

$$(10) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-\alpha'} \ln \langle m_n^p \rangle = \gamma(\alpha, c)(np)^{\alpha'},$$

где $\alpha' := \alpha/(\alpha-1)$, $\gamma(\alpha, c) := (\alpha-1)\alpha^{-\alpha'} c^{-1/(\alpha-1)}$.

Отметим, что условие (7), накладываемое в теореме 2, автоматически выполнено в силу (9).

Авторы выражают благодарность С. Альбеверию и С. А. Молчанову за полезные дискуссии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Гихман И. И., Скороход А. В. Теория случайных процессов. Т. II. М.: Наука, 1973.
 [2] Скороход А. В. // Теория вероятн. и ее примен. 1964. Т. 9. С. 492–497. [3] Gärtner J., Molchanov S. A. // Comm. Math. Phys. 1990. V. 132. P. 613–655. [4] Яровая Е. Б. // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем. Мех. 1990. №4. С. 79–82. [5] Molchanov S. A. // IMA Vol. Math. Appl. 1996. V. 77. P. 81–109. [6] Albeverio S., Bogachev L. V. // Positivity. 2000. V. 4. P. 41–100.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова;
 ГНИИ профилактической медицины Минздрава РФ, г. Москва
 E-mail: lvb@mech.math.msu.su, yarov@cardpl.msk.ru

Принято редколлегией
 07.09.2000