Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Гончаренко, О монодромии матричных уравнений Шрёдингера и взаимодействии матричных солитонов, *УМН*, 2000, том 55, выпуск 5, 175–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm326>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 08:58:03

О МОНОДРОМИИ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ ШРЁДИНГЕРА И ВЗАИМОДЕЙСТВИИ МАТРИЧНЫХ СОЛИТОНОВ

В. М. ГОНЧАРЕНКО

Рассмотрим матричный оператор Шрёдингера $L = -D^2 + U(x)$ с мероморфным $(d \times d)$ -матричнозначным потенциалом $U(x)$. Говорят, что L имеет *локальную тривиальную монодромию* около регулярной особой точки $x = x_0 \in \mathbb{C}$, если все решения соответствующего уравнения Шрёдингера $L\psi = \lambda\psi$ однозначны в окрестности x_0 для любого $\lambda \in \mathbb{C}$. Предположим, что $x_0 = 0$ и разложение Лорана $U(x)$ в окрестности 0 имеет вид

$$(1) \quad U(x) = \sum_{r \geq -2} C_r x^r.$$

Следующие две теоремы являются обобщением результатов Дюистермаата и Грюнбаума [1], рассматривавших скалярный случай.

ТЕОРЕМА 1 (см. [2]). *Матричный оператор Шрёдингера L с потенциалом (1) имеет тривиальную монодромию около $x = 0$ тогда и только тогда, когда $C_{-2} = \sum_{j=1}^k m_j(m_j - 1)P_j$, $m_j \in \mathbb{N}$, $1 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_k = M$, где P_j – коммутирующие проекторы на собственные подпространства V_j , соответствующие собственным значениям $m_j(m_j - 1)$: $P_i P_j = \delta_{ij} P_i$, $\sum_{j=1}^k P_j = I$, и коэффициенты C_l , $l = -1, 0, \dots, 2M - 3$, удовлетворяют условиям $P_i C_l P_j = 0$, если $|m_i - m_j| \geq l + 1$ или $m_i + m_j = l + 3$, $l + 5, \dots, l + 2k + 1, \dots$.*

Если потенциал $U(x)$ рациональный и стремится к 0 при $x \rightarrow \infty$, а условия локальной тривиальной монодромии выполнены в каждой из его особенностей x_j , $j = 1, \dots, n$, то $U(x)$ имеет вид $\sum_{j=1}^n A_j / (x - x_j)^2$. При этом условия теоремы 1 образуют переопределенную систему на $(d \times d)$ -матрицы A_j и полюсы x_j , которая называется *уравнениями матричного локуса* [2]. В этом случае мы говорим, что L имеет тривиальную монодромию в $\mathbb{C}$.

ТЕОРЕМА 2 (см. [2]). *Если оператор L имеет тривиальную монодромию в $\mathbb{C}$ и его потенциал рационален и убывает на бесконечности, то L получается матричным преобразованием Дарбу оператора $L_0 = -D^2$, т.е. существует дифференциальный оператор $A = D^n + a_1(x)D^{n-1} + \dots + a_n(x)$ с $(d \times d)$ -матричными коэффициентами $a_j(x)$, сплетающий L и L_0 : $LA = AL_0$.*

Другой класс потенциалов операторов Шрёдингера с тривиальной монодромией, которые получаются матричными преобразованиями Дарбу оператора L_0 – это N -солитонные решения $U_N(x, t)$ матричного уравнения КдФ $U_t = 3UU_x + 3U_x U - U_{xxx}$ (см. [3]). Чтобы выписать формулу для $U_N(x, t)$, мы используем понятие *квазидетерминантов*, введенное в [4]. Пусть $R = \text{Mat}_d(\mathbb{C})$ – алгебра $(d \times d)$ -матриц и $X = (N \times N)$ -матрица над R . Для любых $1 \leq i, j \leq n$ пусть $r_i(X)^{(j)}$ есть i -я строка без j -го элемента и $c_j(X)^{(i)}$ есть j -й столбец без i -го элемента матрицы X . Пусть также X^{ij} – подматрица X , полученная удалением i -й строки и j -го столбца X . Тогда по определению квазидетерминант $|X|_{ij} = x_{ij} - r_i(X)^{(j)}(X^{ij})^{-1}c_j(X)^{(i)}$.

Пусть теперь A есть $(N \times N)$ -матрица, (i, j) -м элементом которой является $(d \times d)$ -матрица $A_{ij} = \delta_{ij}I + R_j(t)e^{-(\lambda_i + \lambda_j)x} / (\lambda_i + \lambda_j)$, где $R_j(t) = R_j e^{8\lambda_j^3 t}$ (см. [5]) с некоторыми $(d \times d)$ -матрицами R_j и $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_N$. Тогда $U_N(x, t) = -2(\sum_{j=1}^N |A^{(j)}|_{jj} |A|_{jj}^{-1})'$, где $A^{(j)}$ получается из A дифференцированием j -й строки (см. [6]).

Далее мы будем предполагать, что $R_j = p_j \otimes q_j$, $j = 1, \dots, N$, где p_j – d -вектор, q_j – ко-вектор, а $(p_j, q_j) \neq 0$ – их естественное спаривание. Тогда односолитонное решение матричного уравнения КдФ имеет вид

$$U_1(x, t) = -\frac{2\lambda_1^2 p_1 \otimes q_1}{(p_1, q_1)} \text{sech}^2 \lambda_1(\theta_1 - \phi_1), \quad \phi_1 = \frac{1}{2\lambda_1} \ln \frac{(p_1, q_1)}{2\lambda_1},$$

где $\theta_1 = x - 4\lambda_1^2 t$. Мы называем $\frac{2\lambda_1^2 p_1 \otimes q_1}{(p_1, q_1)} = 2\lambda_1^2 \frac{R_1}{\text{tr } R_1}$ *матричной амплитудой* (поляризацией) солитона и ϕ_1 — его фазой.

Рассмотрим теперь 2-солитонное решение U_2 . Заметим, что оно регулярно, если $(p_1, q_1) > 0$, $(p_2, q_2) > 0$ и $\alpha > 0$, где $\alpha = 1 - 4\lambda_1\lambda_2(p_1, q_2)(p_2, q_1)/((\lambda_1 + \lambda_2)^2(p_1, q_1)(p_2, q_2))$. С точностью до экспоненциально убывающих при $|t| \rightarrow \infty$ членов мы имеем: при $t \rightarrow -\infty$

$$U_2(x, t) \sim -\frac{2\lambda_1^2 p_1 \otimes q_1}{(p_1, q_1)} \text{sech}^2 \lambda_1(\theta_1 - \phi_1^-) - \frac{2\lambda_2^2 \hat{p}_2 \otimes \hat{q}_2}{(\hat{p}_2, \hat{q}_2)} \text{sech}^2 \lambda_2(\theta_2 - \Phi_2^-),$$

где $\theta_j = x - 4\lambda_j^2 t$, $\phi_1^- = \frac{1}{2\lambda_1} \ln \frac{(p_1, q_1)}{2\lambda_1}$, $\phi_2^- = \frac{1}{2\lambda_2} \ln \frac{(\hat{p}_2, \hat{q}_2)}{2\lambda_2(p_1, q_1)^2}$ и $\hat{p}_2 = (p_1, q_1)p_2 - \frac{2\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}(p_2, q_1)p_1$, $\hat{q}_2 = (p_1, q_1)q_2 - \frac{2\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}(p_1, q_2)q_1$.
При $t \rightarrow +\infty$

$$U_2(x, t) \sim -\frac{2\lambda_1^2 \hat{p}_1 \otimes \hat{q}_1}{(\hat{p}_1, \hat{q}_1)} \text{sech}^2 \lambda_1(\theta_1 - \phi_1^+) - \frac{2\lambda_2^2 p_2 \otimes q_2}{(p_2, q_2)} \text{sech}^2 \lambda_2(\theta_2 - \phi_2^+),$$

где $\phi_1^+ = \frac{1}{2\lambda_1} \ln \frac{(\hat{p}_1, \hat{q}_1)}{2\lambda_1(p_2, q_2)^2}$, $\phi_2^+ = \frac{1}{2\lambda_2} \ln \frac{(p_2, q_2)}{2\lambda_2}$ и $\hat{p}_1 = (p_2, q_2)p_1 - \frac{2\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}(p_1, q_2)p_2$, $\hat{q}_1 = (p_2, q_2)q_1 - \frac{2\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}(p_2, q_1)q_2$. Поэтому $U_2(x, t)$ описывает взаимодействие двух 1-солитонов со скоростями $4\lambda_j^2$, $j = 1, 2$. Сдвига фаз $\Delta_j = \phi_j^+ - \phi_j^-$ имеют вид $\Delta_1 = \frac{1}{2\lambda_1} \ln \alpha$, $\Delta_2 = -\frac{1}{2\lambda_2} \ln \alpha$.

Заметим, что Δ_1 может принимать как положительные, так и отрицательные значения, т.е. в матричном случае медленный солитон после взаимодействия может сдвигаться не только назад, как в скалярном случае (см. [5]), но и вперед, если $\alpha > 1$, т.е. $(p_1, q_2)(p_2, q_1) < 0$.

Другой замечательной особенностью взаимодействия солитонов является изменение матричной амплитуды (ср. [7]): как легко видеть из формул, приведенных выше, амплитуда первого солитона меняется $2\lambda_1^2 R_1 / \text{tr } R_1 \rightarrow 2\lambda_1^2 \hat{R}_1 / \text{tr } \hat{R}_1$ и второго $-2\lambda_2^2 \hat{R}_2 / \text{tr } \hat{R}_2 \rightarrow 2\lambda_2^2 R_2 / \text{tr } R_2$, где $\hat{R}_1 = \hat{p}_1 \otimes \hat{q}_1$ и $\hat{R}_2 = \hat{p}_2 \otimes \hat{q}_2$.

В N -солитонном случае использование стандартных аргументов (см., например, [8]), основанных на существовании потоков, коммутирующих с потоком матричного уравнения КдФ [9], позволяет доказать следующий результат, хорошо известный в скалярном случае.

ТЕОРЕМА 3. *Для взаимодействия N солитонов матричного уравнения КдФ полный сдвиг фаз и изменение амплитуд солитонов могут быть вычислены как результат их попарного взаимодействия, описанного выше. В частности, результат взаимодействия не зависит от их порядка и многочастичный эффект отсутствует.*

Автор хотел бы выразить свою искреннюю признательность профессору А.П. Веселову за постановку задачи и многочисленные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Duistermaat J. J., Grünbaum F. A. // Comm. Math. Phys. 1986. V. 103. P. 177–240.
[2] Goncharenko V. M., Veselov A. P. // J. Phys. A. 1998. V. 31. P. 5315–5326. [3] Lax P. D. // Comm. Pure Appl. Math. 1968. V. 21. P. 467–490. [4] Гельфанд И. М., Ретах В. С. // Функци. анализ и его прил. 1991. Т. 25. № 2. С. 13–25. [5] Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. В. Теория солитонов. Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980. [6] Etingof P., Gelfand I., Retakh V. Factorization of differential operators, quasideterminants, and nonabelian Toda field equation // q-alg/971008. [7] Calogero F., Degasperis A. // Nuovo Cimento B (1). 1977. V. 39. P. 1–53. [8] Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике. М.: Мир, 1989. [9] Olmedilla E., Martinez Alonso L., Guil F. // Nuovo Cimento B (1). 1981. V. 61. P. 49–61.