Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. А. Писарев, О множестве чисел, представимых в виде цепных дробей с ограниченными неполными частными, *УМН*, 2000, том 55, выпуск 5, 177–178

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm327>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 17:05:20

О МНОЖЕСТВЕ ЧИСЕЛ, ПРЕДСТАВИМЫХ В ВИДЕ ЦЕПНЫХ ДРОЕЙ С ОГРАНИЧЕННЫМИ НЕПОЛНЫМИ ЧАСТНЫМИ

П. А. ПИСАРЕВ

Рассмотрим множество $F(k)$ всех иррациональных чисел отрезка $[0; 1]$, у которых все неполные частные разложения в цепную дробь ограничены числом $k \in \mathbb{Z}$. Известно [1], [2; Ch. 4], что его можно получить стандартной процедурой выкидывания счетного числа непересекающихся интервалов: $F(k) = \mathcal{I} \setminus \bigcup_{\nu} \Delta_{\nu}$ с выполнением τ -свойства: каждый раз интервал Δ_{ν} выкидывается из некоторого отрезка $M_{\nu} \subset \mathcal{I}$, разбивая его таким образом, что $M_{\nu} = N_1 \sqcup \Delta_{\nu} \sqcup N_2$ и $\min\{|N_1|, |N_2|\} \geq \tau|\Delta_{\nu}|$. (Через $|\cdot|$ здесь и в дальнейшем обозначается длина отрезка или интервала.) Например, в [3] утверждается, что при $k \geq 4$ выполняется $\tau \geq k/4$, а достаточно точные значения τ при $k = 2, 3$ использовались в [4]. Однако детального описания, как именно выполняется τ -свойство, мы нигде не встречали. В связи с этим в настоящей заметке мы описываем структуру выполнения τ -свойства для $F(k)$.

Итак, рассмотрим множество чисел, у которых первые r неполных частных ограничены величиной k и фиксированы, оно представляет собой некоторый отрезок M . Из него требуется удалить $k - 1$ интервал, состоящий из чисел, неполные частные которых превышают k . Введем обозначение $[*, i_1, i_2, \dots] = [0; a_1, a_2, \dots, a_r, i_1, i_2, \dots]$, где все $a_j \leq k \forall j \leq r$, $\frac{p_r}{q_r} = [0; a_1, \dots, a_r]$ — подходящая дробь n -го порядка. Пусть

$$\xi := \min F(k) = [0; \overline{k, 1}], \quad \max F(k) = [0; \overline{1, k}] = \frac{1}{1 + \xi} = \frac{1}{\xi} - k.$$

Разбиение исследуемого отрезка будет осуществляться последовательно $k - 1$ шагом. На i -м шаге отрезок M_i , с концами $[*, \overline{k, 1}]$ и $[*, \overline{1, k}]$, будет дробиться следующим образом: $M_i = N_i^1 \sqcup \Delta_i \sqcup N_i^2$, где концы выкидываемого интервала Δ_i суть $[*, i + 1, \overline{k, 1}]$ и $[*, i, \overline{1, k}]$.

Длины $|N_i^1|$, $|\Delta_i|$, $|N_i^2|$ легко находятся ([5] или [1]). Пусть $t = \frac{q_r}{q_{r-1}}$. Тогда

$$|\Delta_i| = \frac{\xi - 1/\xi + k + 1}{(t(\xi + i + 1) + 1)(t(1/\xi - k + i) + 1)q_{r-1}^2},$$

$$|N_i^1| = \frac{1/\xi - \xi - i - 1}{(t/\xi + 1)(t(\xi + i + 1) + 1)q_{r-1}^2}, \quad |N_i^2| = \frac{1/\xi - k - \xi}{(t(1/\xi + i - k) + 1)(t(i + \xi) + 1)q_{r-1}^2}.$$

Ниже в утверждениях 1–3 отрезок M , из которого мы выкидываем $k - 1$ интервал, соответствующий следующему этапу цепной дроби, считается зафиксированным.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. $\frac{\Delta_{i+1}}{N_{i+1}^2} > \frac{\Delta_i}{N_i^2} \quad \forall i = \overline{1, k-2}; \quad \frac{\Delta_{k-1}}{N_{k-1}^2} < \frac{\Delta_{k-1}}{N_{k-1}^1}.$

Далее рассмотрим величину $\omega_i = \Delta_i/N_i^1$, $i = \overline{1, k-1}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. 1) Для фиксированного отрезка M возможны только два случая:

- (i) величина ω_i с ростом i монотонно возрастает;
- (ii) величина ω_i при увеличении i сначала убывает, затем возрастает, причем минимальное значение она принимает в точке $\frac{k}{2} - 1$, если k -четное, или в одной из двух точек $\frac{k \pm 1}{2} - 1$, если k — нечетное.

2) При $k = 3, 4$ выполняется только случай (i), а отрезков M , для которых выполнено свойство (ii), нет.

3) При $k = 5$ в процессе построения множества $F(5)$ встречаются отрезки M как с условием (i), так и с условием (ii), причем и тех и других бесконечное число.

4) При $k \geq 6$ в рассматриваемой процедуре построения множества $F(k)$ возникают только отрезки M со свойством (ii), а отрезков со свойством (i) нет.

Чтобы наметить доказательство утверждения 2, положим

$$\omega_{i+1} - \omega_i = A_i \cdot (2i + 2 + \xi + 1/t - k), \quad A_i > 0.$$

Утверждение 2 выводится из перечисленных ниже наблюдений а)–в).

а) При $k = 3$ или 4 всегда выполняется $2i + 2 + \xi + \varepsilon - k > 0$ и, следовательно, ω_i возрастает.

б) При $k = 5$ все определяется рассмотрением $i = 1$. Для отрезков M типа (i) необходимо выполнение неравенства $\xi + \varepsilon > 1$. Так как $\xi = (3\sqrt{5} - 5)/10$, то это равносильно $[a_r; a_{r-1}, \dots, a_1] < (5 + \sqrt{5})/6$. Но это неравенство будет выполняться для каждой подходящей дроби числа $[1; \overline{5, 1}]$. Значит, отрезков M , для которых выполнено (i), найдется бесконечное число. Аналогично устанавливается неограниченность числа отрезков M , для которых имеет место (ii).

в) При $k \geq 6$, полагая $i = 1$, видим, что $2 + 2 + \xi + \varepsilon - k < 0$. Значит, ω_i сперва убывает, а затем при больших i возрастает. Ясно, как определить точное значение i , где убывание сменяется возрастанием.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. $\omega_{k-1} > \omega_1$.

Из утверждений 1–3 вытекает

СЛЕДСТВИЕ. $F(k)$ является $\tau(k)$ -множеством, где $\tau(k) = \inf_M \frac{1}{\omega_i} = \min_M \frac{N_{k-1}^1}{\Delta_{k-1}}$, причем это значение $\tau(k)$ является максимально возможным и будет достигнуто уже на первом шаге дробления отрезка $\mathcal{J}$, а именно при $r = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В работе [6] было установлено, что если все Δ_ν выбрасываются с условием $\Delta_\nu \geq \Delta_{\nu+1}$, то изменение порядка их выкидывания не сможет уменьшить первоначально полученное значение τ . Имеют место следующие два факта:

- 1) $\forall M \quad \Delta_i \geq \Delta_{i+1}, i = \overline{1, k-1}$;
- 2) $\forall M \quad \Delta_i \geq N_{i+1}^1, i = \overline{1, k-2}$,

вытекающие из формул для длин Δ_i и N_i^1 . Это позволяет построить алгоритм выбрасывания Δ_ν по невозрастанию длин с сохранением значения $\tau(k)$.

Из последнего следствия легко получается асимптотическое равенство.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. $\tau(k) = \frac{k}{2} - \frac{3}{4} + O\left(\frac{1}{k}\right), \quad k \rightarrow \infty$.

Некоторые вычисленные нами значения $\tau(k)$ при малых k помещены в следующей таблице. Похожие результаты были получены в [7].

k	2	3	4	5	6	7	10	20	50
$\tau(k) \approx$	0.366	0.822	1.300	1.789	2.281	2.776	4.267	9.257	24.253

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Hall M. Jr. // Ann. of Math. (2). 1947. V. 48. P. 966–993. [2] Cusick T. W., Flahive M. E. The Markoff and Lagrange spectra. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1989. [3] Мошевитин Н. Г. // УМН. 1997. Т. 52. № 6. С. 145–146. [4] Cusick T. W. // Proc. Amer. Math. Soc. 1973. V. 38. № 2. P. 253–254. [5] Хинчин А. Я. Цепные дроби. М.: Наука, 1978. [6] Williams R. F. // Contemp. Math. 1991. V. 117. P. 163–175. [7] Astels S. // Trans. Amer. Math. Soc. 1999. V. 352. № 1. P. 133–170.

Принято редколлегией
07.09.2000